(7) Siguin $f(z), h(z)$ dues funcions d'una variable tals que existeixen les seves funcions inverses definides de la forma següent:

$$g^{-1}: (-1/2, 1/2) \to \mathbb{R}, \quad h^{-1}: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

Considerem la funció $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida per

$$f(x,y) = (g(x) + h(x-y),\ g(x) - h(x-y))$$

Calculeu explícitament $f^{-1}: B \to \mathbb{R}^2$, determineu el conjunt imatge $B = f(\mathbb{R}^2)$ i feu un croquis de $B$.

---

- La informació que tenim sobre $g, h$, ens diu que

$$g: \mathbb{R} \to (-1/2, 1/2), \quad h: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$

i són les dues bijectives (1 a 1) entre el corresponent conjunt de sortida i d'arribada.

- Si volem veure si $f$ té una funció inversa $f^{-1}$ definida en $B = f(\mathbb{R}^2)$ (el conjunt imatge de $\mathbb{R}^2$ per $f$), agafem una parella $(u,v) \in B$ i tractem de calcular $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tals que

$f(x,y) = (u,v)$. Llavors tenim:

(i) si per una parella $(u,v)$ podem calcular aquesta parella $(x,y)$ de forma única, l'expressió que relaciona $(x,y)$ amb $(u,v)$ ens defineix $f^{-1}(u,v)$.

(ii) El conjunt de valors $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ pels quals puguem trobar aquesta parella $(x,y)$ ens defineix el conjunt $B$.

Plantegem l'equació següent (dades $(u,v)$, incògnites $(x,y)$):

$$f(x,y) = (u,v) \iff \left\{\begin{array}{l} g(x) + h(x-y) = u \\ g(x) - h(x-y) = v \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sumant i restant} \\ \text{equacions}}}{\iff} \left\{\begin{array}{l} g(x) = \dfrac{u+v}{2} \\ h(x-y) = \dfrac{u-v}{2} \end{array}\right\}$$

Podem doncs obtenir $x = g^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right)$ si $\frac{u+v}{2} \in \underbrace{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{\text{domini } g^{-1}}$

i $x - y = h^{-1}\left(\frac{u-v}{2}\right)$ si $\frac{u-v}{2} \in \underbrace{(0, +\infty)}_{\text{domini } h^{-1}}$

Per tant: $x = g^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right)$ i $y = x - h^{-1}\left(\frac{u-v}{2}\right) = g^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right) - h^{-1}\left(\frac{u-v}{2}\right)$

ens defineixen $f^{-1}(u,v) = \Big(\underbrace{g^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right)}_{= x}, \underbrace{g^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right) - h^{-1}\left(\frac{u-v}{2}\right)}_{= y}\Big)$

Sempre que $(u,v) \in B$ definit per les condicions:

$$B = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \frac{u+v}{2} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \frac{u-v}{2} \in (0, +\infty) \right\} =$$

$$= \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -1 \leq u+v \leq 1,\; u-v \geq 0 \right\}$$