(6) Considerem les funcions

$f(\alpha,\beta)=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$. $g(x,y,z)=(z^2-xy-y^2,\ z^2-xy-x^2)$,

$h(u,v)=(u,v,u+v)$

(a) Quin és el domini de $F=f\circ g\circ h$?

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longrightarrow & (x,y,z) & \longrightarrow & (\alpha,\beta) & \longrightarrow & f(\alpha,\beta) \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & h(u,v) & & g(x,y,z) & & \end{array}$$

- $D_h=\mathbb{R}^2$, $D_g=\mathbb{R}^3$, $D_f=\{\alpha\neq\beta\}$.
- $D_{f\circ g\circ h}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\ /\ (u,v)\in D_h,\ h(u,v)\in D_g \wedge g(h(u,v))\in D_f\}$

Com que D_h i D_g són "tot" l'espai

$D_{f\circ g\circ h}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ g(h(u,v))\in D_f\}$.

$g(h(u,v))=g(u,v,u+v)=\left((u+v)^2-u\cdot v-v^2,(u+v)^2-uv-u^2\right)=$

$=(u^2+uv,\ v^2+uv)$

Així $g(h(u,v))\in D_f \Leftrightarrow u^2+uv\neq v^2+uv$

$\Leftrightarrow u^2\neq v^2 \Leftrightarrow u\neq v$ i $u\neq -v$

Per tant, $D_{f\circ g\circ h}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ u\neq v$ i $u\neq -v\}$.

(b) Calculem l'expressió de F. Per a quins valors de (u,v) podem concloure que $F(u,v)=f(u,v)$?

$F(u,v)=f(g(h(u,v)))=f(u^2+uv,\ v^2+uv)=$

$=\dfrac{u^2+uv+v^2+uv}{(u^2+uv)-(v^2+uv)}=\dfrac{(u+v)^2}{u^2-v^2}=\dfrac{u+v}{u-v}=f(u,v)$

Sii. $(u,v)\in D_{f\circ g\circ h}$ (sinó l'expressió no té sentit!)