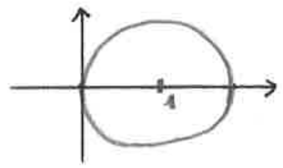
(3) Donada la funció $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2-2x}$.

(a) Trobeu el seu domini D.

• Cal $x^2+y^2-2x \neq 0$. És clar que $x^2+y^2-2x=0 \Updownarrow (x-1)^2+y^2=1$

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{x^2+y^2-2x=0\}$.



(b) Demostreu que, si $c \neq 0$ i $c \neq 1$, la corba de nivell d'alçada c és la circumferència de centre $(c/c-1, 0)$ i tangent a l'eix vertical. Què passa si $c=0$? I si $c=1$? Feu un croquis de les corbes de nivell de la funció.

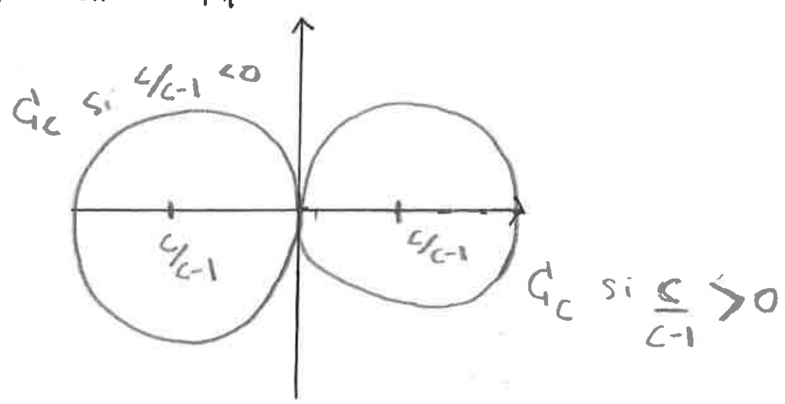
• Eq. de G_c: $\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2-2x} = c \iff x^2+y^2 = c(x^2+y^2-2x) \iff$

$\iff (1-c)x^2+(1-c)y^2+2cx = 0 \underset{c\neq 1}{\iff} x^2+y^2+\dfrac{2c}{1-c}x = 0 \iff$

$\iff x^2+2\cdot\dfrac{c}{1-c}x+\left(\dfrac{c}{1-c}\right)^2+y^2 = \left(\dfrac{c}{1-c}\right)^2 \iff \left(x-\dfrac{c}{c-1}\right)^2+y^2 = \left(\dfrac{c}{c-1}\right)^2$

Això és: G_c és la circumferència de centre $\left(\frac{c}{c-1}, 0\right)$ i radi $\left|\frac{c}{c-1}\right|$, i que per tant és tangent al eix y en el $(0,0)$.

- observem que: - Hem de treure el $(0,0)$ de G_c ja que $(0,0) \notin D$.
  - Si $c=0$, llavors G_0 ve donada per $x^2+y^2=0$ i per tant $G_0 = \{(0,0)\}$... Però això no val ja que $(0,0)\notin D$, i hem d'excloure doncs el valor $c=0$.
  - Si $c=1$, tenim: $x^2+y^2 = 1\cdot(x^2+y^2-2x) \iff x=0$. Per tant G_1 és l'eix y (menys el $(0,0)$!)



(c) A la vista d'aquest croquis, raoneu si podem donar una definició alternativa per a $f(x,y)$ als punts (x,y) que no pertanyen a D que la faci contínua en $(0,0)$.

- La resposta és no!

Fixeu-vos que les corbes de nivell que hem trobat són circumferències que són tangents a l'eix y en el $(0,0)$.

Si la funció f tingués límit en el $(0,0)$, llavors independentment de la corba en el pla (x,y) que triéssim, passant pel $(0,0)$, quan ens acostéssim al $(0,0)$ sobre aquesta corba els corresponents valors de $f(x,y)$ haurien de tendir a un cert valor (el límit).

Ara, si ens acostem al $(0,0)$ sobre la circumferència C_c, els valors de $f(x,y)$ sobre aquesta circumferència són sempre c. Com que el valor de c el podem pendre de forma "arbitrària", és clar que $\nexists \lim_{(0,0)} f(x,y)$ i per tant no podem fer f contínua en $(0,0)$.