(2) Troben les corbes de nivell de les següents funcions i digueu quin és el seu rang (i.e., el conjunt de valors que prenen).

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, definida per a $(x,y) \neq (0,0)$.

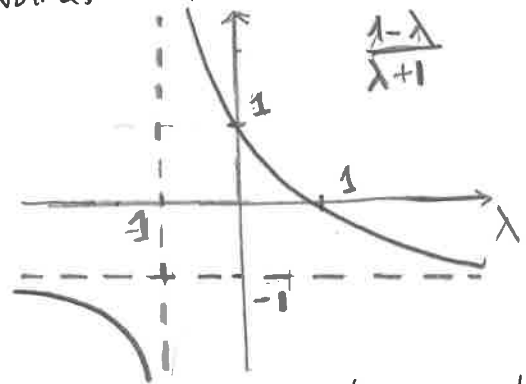
$C_\lambda \equiv \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lambda \underset{(\text{si } \lambda \neq -1)}{\Leftrightarrow} y^2 = \dfrac{1-\lambda}{\lambda+1} x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{1-\lambda}{\lambda+1}}\,|x|$ $\left(\text{si } \dfrac{1-\lambda}{\lambda+1} \geq 0\right)$

Treient el $|\cdot|$ de x i usant les opcions $\pm$, obtenim $y = \pm\sqrt{\dfrac{1-\lambda}{\lambda+1}}\, x$

Per tant C_λ són dues rectes pel $(0,0)$ de pendent $\pm\sqrt{\dfrac{1-\lambda}{\lambda+1}}$, però sense el $(0,0)$ (ja que no pertany al domini de f).

Per determinar el rang de f observem que $\dfrac{1-\lambda}{\lambda+1} > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-1,1)$.

Només cal veure la seva gràfica:



A més, en els casos extrems:

- si $\lambda = 1 \Rightarrow C_1$ és $y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (eix x)
- si $\lambda = -1 \Rightarrow C_{-1}$ és $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (eix y)

Per tant rang $f = [-1,1]$

(d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, definida per $(x,y) \neq (0,0)$.

$C_\lambda \equiv \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lambda \Leftrightarrow \lambda y^2 - xy + \lambda x^2 = 0 \underset{(\text{si } \lambda \neq 0)}{\Leftrightarrow} y = \dfrac{x \pm \sqrt{x^2 - 4\lambda^2 x^2}}{2\lambda} =$

$= \dfrac{x \pm |x|\sqrt{1-4\lambda^2}}{2\lambda} =$

$\underset{\uparrow}{=} x\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{1-4\lambda^2}}{2\lambda}\right)$

usem el signe $\pm$ per treure el valor absolut de x, sense afectar els 2 possibles resultats.

- Així, si $\lambda \neq 0$ i $1 - 4\lambda^2 > 0$, llavors C_λ ve donat per la unió de 2 rectes pel $(0,0)$ (una amb el signe $+$ i l'altra amb el $-$), però el $(0,0)$ l'hem d'excloure de C_λ!
- Casos límit són:

$\lambda = 0 \Rightarrow C_0$ és $xy = 0 \Leftrightarrow$ unió dels 2 eixos (menys el $(0,0)$).

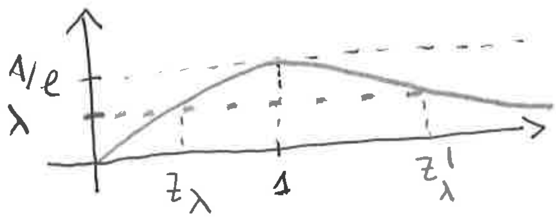
$\lambda = \pm 1/2$ (això és, quan $1 - 4\lambda^2 = 0$) $\Rightarrow C_{1/2}$ és la recta $y = x$

$C_{-1/2}$ " " " $y = -x$

- rang de $f = [-1/2, 1/2]$.

(f) $f(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{-x^2-y^2}$

- Fixeu-vos que si definim $h(z) = z e^{-z}$, per a $z \geq 0$, llavors $f(x,y) = h(x^2+y^2)$ (i.e., fem $z = x^2+y^2 \geq 0$). Llavors, els valors que pren f són els mateixos que els que pren h. En particular, donat λ, si $z_\lambda \geq 0$ és t.q. $h(z_\lambda) = \lambda$, llavors C_λ conté el cercle $x^2+y^2 = z_\lambda$ de radi $\sqrt{z_\lambda}$. (Diem "conté" perquè pot ser que C_λ contingui més d'un d'aquests cercles).
- Si estudiem $h(z)$ per a $z \geq 0$ tenim:
$h(0) = 0$; $h(z) > 0$ si $z > 0$; $\lim_{z \to +\infty} h(z) = 0$ (L'Hôpital);
$h'(z) = (1-z)e^{-z} \Rightarrow z = 1$ màxim (absolut) de $h(z)$, $h(1) = 1/e$



- Finalment:
rang f = rang $h = [0, 1/e]$ (fixeu-vos que la gràfica de h queda entre 0 i $1/e$).
- $C_0 = \{(0,0)\}$ (ja que $z=0$ és l'únic punt t.q. $h(0)=0$).
- Si $0 < \lambda < 1/e$, llavors C_λ és la unió de 2 cercles de radi $\sqrt{z_\lambda}$ i $\sqrt{z'_\lambda}$, on z_λ i z'_λ són les dues solucions de l'equació $h(z) = \lambda$. Vegeu-ne un exemple gràfic a la figura.