(16) Digueu si els següents conjunts són oberts, tancats o compactes.

(a) $\boxed{A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x, e^{x} \underline{y} \sin x \leq y^4 + e^x\}}$

- És clar que A és tancat ja que està definit per desigualtats $\leq$ entre funcions contínues.
- Per veure si A és compacte cal verificar si és un conjunt acotat, això és, que està contingut en el interior d'un disc de $\mathbb{R}^2$.
- Si volem provar que efectivament és compacte, la idea bàsica és tractar de veure que una de les desigualtats que defineix el conjunt implica per si sola que el conjunt és acotat.

Com que en aquest cas la 2a és molt complicada, ens fixem en la 1a.

$$x^2 + y^2 \leq x \iff x^2 - x + y^2 \leq 0$$
$$\iff x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\iff (x - 1/2)^2 + y^2 \leq (1/2)^2.$$

Per tant A està inclos en $\overline{D}_{1/2}(1/2, 0)$ i és acotat $\Rightarrow$ A compacte.

(b) $\boxed{B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ e^{xy} + e^{yz} + e^{xz} \ge x+y+z\}}$

· És clar B tancat ja que la seva definició involucra desigualtats "$\le$" i "$\ge$" entre funcions contínues.

· Per la 1a condició tenim $B \subset \overline{B}_1(0,0,0)$ [bola tancada de centre $(0,0,0)$ i radi 1 en $\mathbb{R}^3$].

Per tant B és compacte.

(c) $\boxed{C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \le 0,\ y \le 2x\}}$

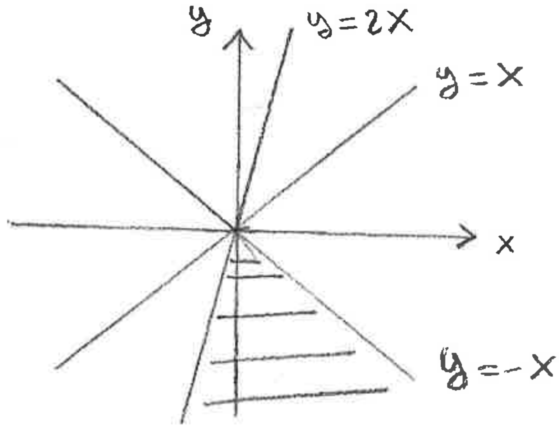
· És clar C_1 tancat.

· Cap de les condicions que defineixen C_1 determinen un conjunt acotat, ja que es compleixen per valors de x i y arbitrariament grans. Per tant sembla que C_1 no és compacte. Un dibuix pot ajudar, però és més facil veure que efectivament hi ha punts $(x,y) \in C_1$ amb x o y grans. P. ex. si fem $x=0$, llavors

$$(0,y) \in C_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 \le 0 & \underline{\text{sempre cert!}} \\ \text{i} \\ y \le 0 \end{cases}$$

Això és, la part negativa de l'eix y pertany a $C_1 \Rightarrow C_1$ no acotat $\Rightarrow C_1$ no compacte.

gràficament:



(d) $\boxed{D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1, \ xyz > 0\}}$

· És clar que D és obert ja que està definit via desigualtats "<" i ">" entre funcions contínues.

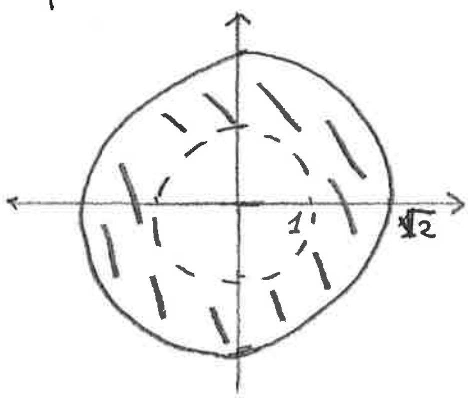
(e) $\boxed{E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \sin y > 0, \ x \neq 0, \ y \neq 0\}}$

· E obert: només surten operadors ">" i "≠".

(f) $\boxed{F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}}$

· F involucra simultàniament operadors "<" i "≤". No hauria de ser ni obert ni tancat.

· Si fem un dibuix, obtenim corona circular que té per fronteres les circumferències de centre (0,0) i radis 1 i $\sqrt{2}$.



Com que part de la frontera de E, però no tota, pertany al conjunt, aquest no és un conjunt ni obert ni tancat.

(g) $\boxed{G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 1, \ \dfrac{x^2+y^2}{x} < 2\}}$

Atenció: $\dfrac{x^2+y^2}{x}$ no és contínua en $\mathbb{R}^2$, ja que no està ben definida si $x = 0$. Però, si $(x,y) \in G$ llavors cal $x > 1$ i, en aquest cas,

$$\frac{x^2+y^2}{x} < 2 \underset{x>1}{\iff} x^2+y^2 < 2x$$

Llavors $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, \ x^2+y^2 < 2x\}$

i per tant és un conjunt obert.