

Càlcul 2: Continuïtat i Derivació de Funcions de Vàries Variables

Jordi Villanueva

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

1 de febrer de 2024

Notacions bàsiques i definicions topològiques a \mathbb{R}^n

- $x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; x_j és la coordenada j -èsima de x .
- Cas $n = 2$: Escriurem $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- Cas $n = 3$: Escriurem $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Definició (Norma euclídia o euclidiana a \mathbb{R}^n)

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. *Llavors:*

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

dóna el tamany del vector \vec{x} (distància del punt x a l'origen).

- Cas $n = 1$: $|x| = +\sqrt{x^2}$ (valor absolut de x).
- Cas $n = 2$: $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Cas $n = 3$: $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

- Desigualtats bàsiques entre normes i coordenades:

$$|x_j| \leq \|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

- Cas $n = 2$. **Atenció:** Aquestes són algunes desigualtats útils per veure que alguns límits en el $(0, 0)$ són zero:

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |x \cdot y| \leq x^2 + y^2, \quad x^2 \leq x^2 + y^4.$$

Definició (Distància euclidiana a \mathbb{R}^n)

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Llavors:*

$$d(x, y) = d(y, x) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Definició (Producte escalar a \mathbb{R}^n)

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Llavors:*

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y := x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n.$$

- **Observacions:** $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, $\|x\| = +\sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Algunes desigualtats bàsiques involucrant norma, producte escalar i distància

En el que segueix $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ denoten elements qualsevol de \mathbb{R}^n .

- **La desigualtat de Cauchy-Schwarz.**

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

- **La desigualtat triangular.**

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

- **La desigualtat triangular inversa.**

$$\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|.$$

Definició (Boles a \mathbb{R}^n)

- Bola oberta de \mathbb{R}^n de centre $a \in \mathbb{R}^n$ i radi $r > 0$:

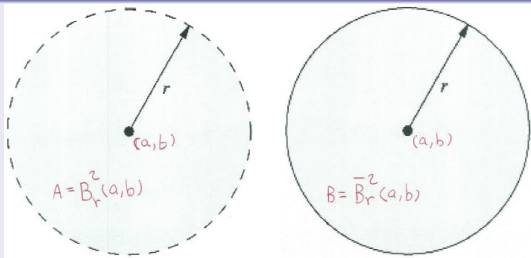
$$B_r^n(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\}.$$

Són els punts $x \in \mathbb{R}^n$ que disten de a **estrictament menys** que r .

- Bola tancada: $\bar{B}_r^n(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) \leq r\}$.

Són els punts $x \in \mathbb{R}^n$ que disten de a **menys o igual** que r .

Exemple ($B_r^2(a, b)$ vs. $\bar{B}_r^2(a, b)$)



Exemple (Boles de \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3)

- Cas $n = 1$: $B_r^1(a) = (a - r, a + r)$ interval obert de radi r .
- Cas $n = 1$: $\bar{B}_r^1(a) = [a - r, a + r]$ interval tancat de radi r .
- Cas $n = 2$: $B_r^2(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\}$.
Disc obert: punts estrictament en l'interior de la circumferència de centre (a, b) i radi r d'equació $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Cas $n = 2$: $\bar{B}_r^2(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}$
Disc tancat: punts en l'interior del disc més la circumferència que l'envolta.
- Cas $n = 3$: $B_r^3(x_0, y_0, z_0)$. Bola oberta de \mathbb{R}^3 : punts estrictament en l'interior de l'esfera de centre (x_0, y_0, z_0) i radi r d'equació $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$. Els punts de la bola oberta compleixen $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2$.
- Cas $n = 3$: $\bar{B}_r^3(x_0, y_0, z_0)$. Bola tancada de \mathbb{R}^3 : punts en l'interior de la bola més els de l'esfera que envolta la bola.

En les definicions següents $A \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt (qualsevol) **fixat**.

Definició (Punts interiors de A)

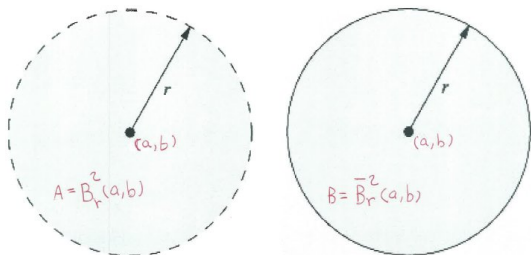
$a \in \mathbb{R}^n$ és un punt interior del conjunt A si $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon^n(a) \subset A$.

- a és un punt interior de A si: **(i)** a pertany a A ; **(ii)** tots els punts en un “entorn” de a també són de A .
- El valor de ε en la definició depèn del punt a triat i és fa molt petit si a és proper a la “frontera” de A .

Definició (Punts frontera de A)

$a \in \mathbb{R}^n$ és un punt frontera del conjunt A si $\forall \varepsilon > 0$ (per molt petit que sigui ε) la bola $B_\varepsilon^n(a)$ té intersecció no buida tant amb A com amb el complementari de A . Això és: $A \cap B_\varepsilon^n(a) \neq \emptyset$ i $A^c \cap B_\varepsilon^n(a) \neq \emptyset$.

- Un punt frontera d'un conjunt pot ser que sigui o no del conjunt.
- $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ (complementari de A): punts de \mathbb{R}^n que no són de A .



Exemple (Interior i frontera)

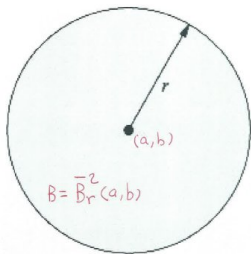
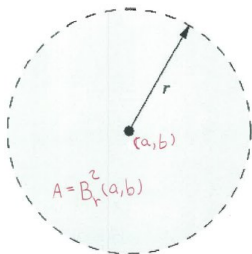
- $[0, 1)$ interval de \mathbb{R} . Els punts interiors de $[0, 1)$ són l'interval obert $(0, 1)$ i els seus punts frontera són els extrems de l'interval, $\{0, 1\}$.
- $A = B_r^2(a, b)$ **disc obert** format pels punts sombrejats de la figura. La circumferència discontinua **no** forma part de A . Tots els punts de A són punts interiors del conjunt. La frontera de A és la circumferència que l'envolta.
- $B = \bar{B}_r^2(a, b)$ **disc tancat** format pels punts sombrejats de la fig. La circumferència contínua **sí** que forma part de B . Els punts interiors de B són els de la bola oberta A . Els punts frontera de B són els de la circumferència que l'envolta.

Definició (Conjunts oberts, tancats, acotats i compactes)

- A és un conjunt obert síí. tots els seus punts són interiors (Això és, A no conté cap dels seus punts frontera).
- A és un conjunt tancat síí. A conté tots els seus punts frontera.
- **Observació:** Si A és un conjunt obert (resp. tancat), llavors el seu conjunt complementari $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ és tancat (resp. obert).
- A és un conjunt acotat si $\exists R > 0$ tal que $A \subset B_R^n(0)$ (Això és, A està contingut dins d'una bola de radi R prou gran).
- A és un conjunt compacte síí. A és tancat i acotat.

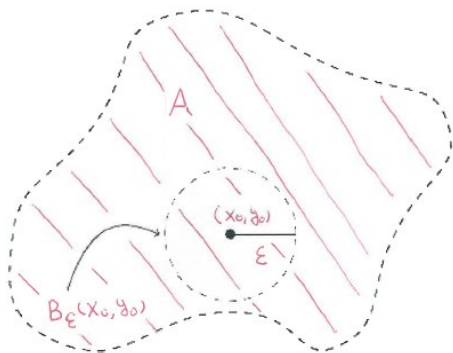
Exemple (Interior, frontera, oberts, tancats, acotats i compactes)

- $A = (a, b)$ (interval obert) i $B = [a, b]$ (interval tancat).
 - L'interior de A i B són el mateix: l'interval obert (a, b) .
 - La frontera de A i B és la mateixa: els dos punts extrems $\{a, b\}$.
 - Tots els punts de A són interiors: A és un conjunt obert de \mathbb{R} .
 - B conté tots els seus punts frontera: B és un conjunt tancat de \mathbb{R} .
 - B és un conjunt tancat i acotat i per tant és compacte.
- $A = [0, +\infty)$ és un conjunt tancat però no compacte de \mathbb{R} (la frontera de A només és el punt $\{0\}$).



Exemple (Interior, frontera, oberts, tancats, acotats i compactes)

- $A = B_r^2(a, b)$ **disc obert**. Tots el punts de A són interiors / A no conté cap dels seus punt frontera: A és un conjunt obert de \mathbb{R}^2 .
- En general: $B_r^n(a)$, **bola oberta**, és un conjunt obert de \mathbb{R}^n .
- $B = \bar{B}_r^2(a, b)$ **disc tancat**. B conté tots els seus punts frontera: B és un conjunt tancat de \mathbb{R}^2 . B és un conjunt tancat i acotat i per tant és un conjunt compacte.
- En general: $\bar{B}_r^n(a)$, **bola tancada**, és un conjunt tancat i acotat de \mathbb{R}^n i per tant compacte.



Exemple (Exemple gràfic de conjunt obert)

El conjunt A (“ratllat”) de la figura és un conjunt obert. La idea intuïtiva és que la seva corba **frontera** (la que separa la part de dins de la de fora del conjunt) la pintem de forma discontinua per indicar que els seus punts no formen part de A . Donat un punt qualsevol $(x_0, y_0) \in A$, triem $\varepsilon > 0$ prou petit de forma que la frontera de A disti més que $\varepsilon > 0$ de A . Per tant, la bola $B_\varepsilon^2(x_0, y_0)$ està íntegrament continguda en A . Els punts frontera de A són els de la corba discontinua que envolta A .

Comentari

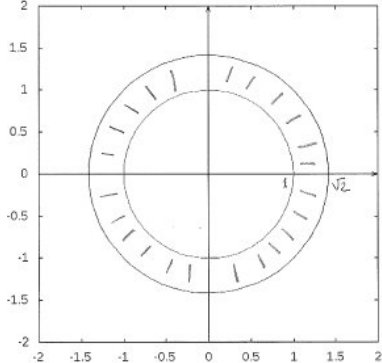
- La majoria de conjunts de \mathbb{R}^n no són ni oberts ni tancats. Per exemple, l'interval $A = [a, b)$ de \mathbb{R} no és ni obert ni tancat.
- Detectar conjunts oberts i/o tancats de \mathbb{R}^n per representació gràfica pot ser molt difícil.

Proposició (Caracterització d'oberts / tancats via continuïtat)

Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt definit mitjançant igualtats i desigualtats entre funcions contínues.

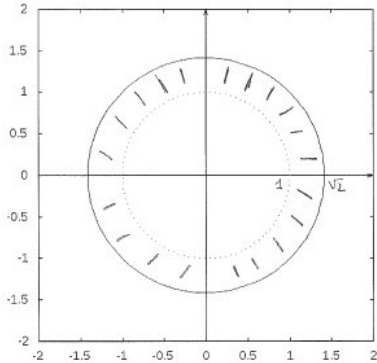
- Si la definició de A només involucra desigualtats del tipus: “ $>$ ”, “ $<$ ” i “ \neq ”, llavors A és obert.
- Si la definició de A només involucra desigualtats del tipus: “ \geq ”, “ \leq ” i “ $=$ ”, llavors A és tancat.
- Si la definició de A barreja simultàneament “desigualtats” del tipus **(a)** i **(b)** probablement el conjunt A no és ni obert ni tancat.

La idea de la proposició és que la frontera del conjunt s'obté a partir dels punts on és dóna alguna igualtat “ $=$ ”.



Exemple ($A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$)

A és l'anell "ratllat" contingut entre les circumferències de centre $(0,0)$ i radi interior 1 i exterior $\sqrt{2}$, de forma que ambdues circumferències formen part de A . Com que A està definit mitjançant dues desigualtats del tipus " \leq " llavors A és un conjunt tancat. Els punts frontera de A són la unió d'ambdues circumferències i per tant pertanyen tots a A : $\text{frontera}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$. En aquest cas doncs, es té A tancat i acotat $\implies A$ compacte.



Exemple ($B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$)

La circumferència de radi 1 no forma part de l'anell “semi-obert” B . Com que B està definit combinant una desigualtat estricta, “ $<$ ”, amb una de tipus semi-estricta, “ \leq ”, el més probable és que B no sigui ni obert ni tancat. Els punts frontera de B són de nou la unió de la circumferències interior i exterior. Per tant, hi ha punts frontera que pertanyen al conjunt B i d'altres que no. El conjunt B no és ni obert ni tancat.

Exemple ($C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x, e^{xy} - \sin x \leq y^4 + e^x\}$)

- És clar que C és un conjunt tancat en quant està definit per desigualtats “ \leq ” entre funcions contínues.
- Si veiem que C està contingut dins d'un disc de \mathbb{R}^2 , llavors C és acotat i per tant compacte.
- Per veure que C és acotat, és suficient veure, per exemple, que alguna de les dues condicions (desigualtats) que el defineixen dona lloc a un conjunt acotat. No cal que això sigui cert per a les dues desigualtats. Ens fixem en la primera i sumem $(\frac{1}{2})^2$ als dos costats:

$$\begin{aligned}x^2 - x + y^2 \leq 0 &\iff x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

- Així doncs, C està inclòs en el disc $\overline{B}_{1/2}^2(1/2, 0)$ i, per tant, C és compacte.

Funcions de vàries variables

Definició (Funcions vectorials i funcions components)

$$f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ x=(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x)=f(x_1, \dots, x_n)=(f_1(x), \dots, f_m(x))$$

és una funció (vectorial) de n variables i m components.

- $x \in D_f$ (domini de f) sí. $f_j(x)$ ben definida $\forall j = 1, \dots, m$.

- $$f_j : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x=(x_1, \dots, x_n) \mapsto f_j(x)=f_j(x_1, \dots, x_n)$$

és la j -èsima funció component de f , $\forall j = 1, \dots, m$.

Comentari (reducció a les funcions components)

L'estudi de moltes propietats de les funcions de n variables és pot fer component a component. Per això, començarem considerant

funcions reals de n variables (i una única component) de la forma:

$$f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x=(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x)=f(x_1, \dots, x_n)$$

Exemple (Dominis funcions de n variables i m components)

• $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = \left(\cos(xy^2), \frac{y}{x}, \ln(1 - x^2 - y^2) \right)$.
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$

• Les funcions components de f són:

$$f_1(x, y) = \cos(xy^2), \quad f_2(x, y) = \frac{y}{x}, \quad f_3(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2).$$

• El domini de f és: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x \neq 0\}$

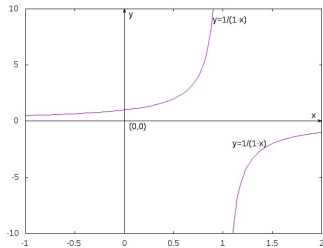
• $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \left(\underbrace{\sqrt{16 - 4x^2 - y^2}}_{f_1(x, y)}, \underbrace{\ln(xy)}_{f_2(x, y)} \right)$.
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$

• Domini de f_1 : $16 - 4x^2 - y^2 \geq 0 \iff 4x^2 + y^2 \leq 16$

$\iff \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \iff \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} \leq 1$ (interior i frontera d'una el·lipse de centre $(0, 0)$ i semi-eixos de longitud 2 i 4).

• Domini de f_2 : $x \cdot y > 0 \iff \{x > 0, y > 0\} \cup \{x < 0, y < 0\}$
(unió interiors primer i tercer quadrant, sense els eixos x, y).

• $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$ (part de l'interior i vora de l'el·lipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ continguda en l'interior del primer o del tercer quadrant).



Exemple (Dominis funcions de n variables i m components)

- $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{y - xy - 1}$.
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$

- $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - xy - 1 \geq 0\}$.

- *Primer estudiem la igualtat:* $y - xy - 1 = 0 \iff y = \frac{1}{1-x}$.

La gràfica $y = \frac{1}{1-x}$ trenca \mathbb{R}^2 en 3 components. Si un punt d'una component és de D_f tots els punts de la component també ho són (el signe de $y - xy - 1$ és sempre el mateix dins la component).

$$(x, y) = (0, 0) \implies y - xy - 1 < 0 \implies (0, 0) \notin D_f.$$

Per tant, D_f és l'unió de les dues components de \mathbb{R}^2 que queden per sobre i per sota de la gràfica de $y = \frac{1}{1-x}$.

Exemple (Dominis funcions de n variables i m components)

- *La funció identitat de \mathbb{R}^n :*

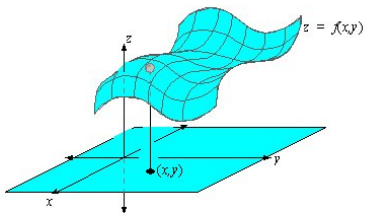
$$\text{Id} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ x=(x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \text{Id}(x)=(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

Definició (Gràfica d'una funció de n variables i m components)

$$f : D_f \subset \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ x=(x_1, \dots, x_n) & \mapsto & f(x)=f(x_1, \dots, x_n)=(f_1(x), \dots, f_m(x)) \end{array}$$

La gràfica de f és una varietat de dimensió n en \mathbb{R}^{n+m}

$$\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in D_f\}$$



Comentari (Visualització gràfica funcions reals de 2 variables)

- La gràfica, $y = f(x)$, d'una funció d'una variable, $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, és una corba en el pla (x, y) que podem dibuixar en un full de paper.
- Per a una funció de 2 variables, $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la seva gràfica:

$$\text{graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_f \text{ i } z = f(x, y)\}$$

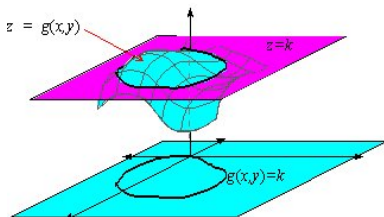
és una superfície en \mathbb{R}^3 . La base de la superfície és el domini de f i la seva l'alçada en cada punt és el valor $f(x, y)$ en el punt base. Podem pensar en $\text{graf}(f)$ com en el perfil d'una muntanya. Aquesta intuïció motiva la seva representació mitjançant l'us de **corbes de nivell**.

Definició (Corbes de nivell d'una funció de 2 variables)

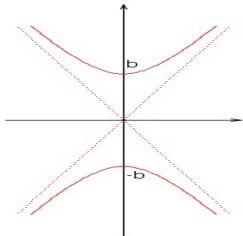
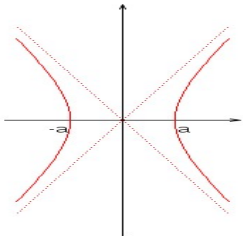
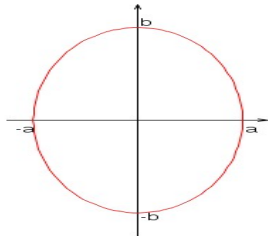
$$f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y)$$

La seva corba de nivell d'alçada $\lambda \in \mathbb{R}$ és el lloc geomètric dels punts als quals f assigna el valor λ :

$$C_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in D_f \text{ i } f(x,y) = \lambda\}$$

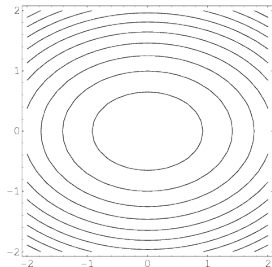
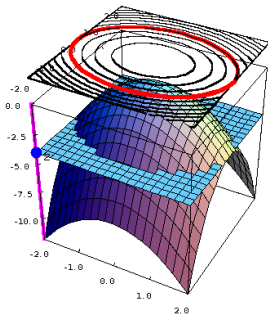
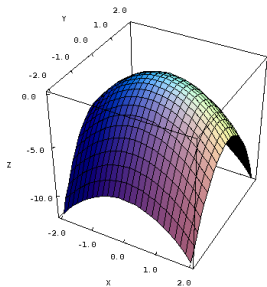


La corba de nivell s'obté tallant la superfície definida per la gràfica de la funció pel pla d'alçada triada i projectant la corba obtinguda en (x,y) . En la figura veiem la corba de nivell $C_k = \{g(x,y) = k\}$ per la funció de gràfica $z = g(x,y)$ que obtenim tallant pel pla $z = k$.



Comentari (El·lípses i hipèrboles)

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *el·lipse de semi-eixos $a > 0$ i $b > 0$ centrada en $(0,0)$.
(Si $a = b = R$ tenim una circumfèrència de radi R .)*
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *hipèrbola asimptòtica a les rectes $\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$ amb
2 branques que tallen l'eix x en $(\pm a, 0)$.*
- $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *hipèrbola asimptòtica a les rectes $\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$ amb
2 branques que tallen l'eix y en $(0, \pm b)$.*

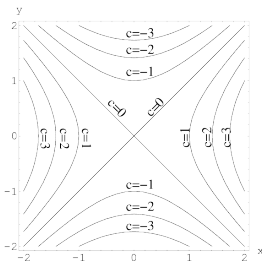
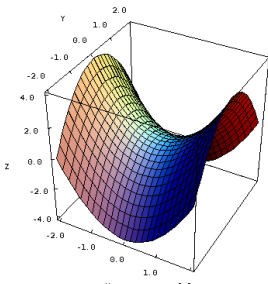


Exemple ($f(x, y) = -x^2 - 2y^2$ (paraboloide el·líptic))

La corba de nivell C_λ de f només té sentit per $\lambda \leq 0$ i ve donada per l'el·líipse de centre $(0, 0)$ i semi-eixos $a = \sqrt{|\lambda|}$ i $b = \sqrt{|\lambda|/2}$:

$$-x^2 - 2y^2 = \lambda \iff x^2 + 2y^2 = |\lambda| \iff \frac{x^2}{(\sqrt{|\lambda|})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{|\lambda|/2})^2} = 1.$$

El mapa de corbes de nivell de f està format per el·lípsies concèntriques entorn del $(0, 0)$. (En particular, $C_0 = \{(0, 0)\}$.)



Exemple ($f(x, y) = x^2 - y^2$ (paraboloide hiperbòlic))

Les corbes de nivell d'alçada c de f , $x^2 - y^2 = c$, són hipèrboles centrades en el $(0, 0)$ (per tant tenen 2 components separades):

- *Si $c > 0$ obtenim hipèrboles de la forma $\frac{x^2}{(\sqrt{c})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{c})^2} = 1$.*
- *Si $c < 0$ obtenim hipèrboles de la forma $-\frac{x^2}{(\sqrt{|c|})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{|c|})^2} = 1$.*
- *Si $c = 0$ obtenim les rectes asimptòtiques a les hipèrboles:*

$$x^2 - y^2 = 0 \iff y^2 = x^2 \iff y = x \text{ o bé } y = -x.$$

Exemple ($f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$)

Trobeu les corbes de nivell de f i digueu quin és el seu rang ($\text{rang}(f) = \text{conjunt de tots els valors que pren la funció } f$).

• La regla general per trobar corbes de nivell és tractar d'aïllar una de les variables en termes de l'altre.

• C_λ corba de nivell d'altura $\lambda \in \mathbb{R}$ té per equació $f(x, y) = \lambda$:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lambda \iff (\lambda + 1)y^2 = (1 - \lambda)x^2 \iff y = \pm \sqrt{\frac{1 - \lambda}{\lambda + 1}} x,$$

on hem suposat $\lambda + 1 \neq 0 \iff \lambda \neq -1$ i $\frac{1 - \lambda}{\lambda + 1} > 0$.

• Per tant, si $\lambda \neq \pm 1$ i $\frac{1 - \lambda}{\lambda + 1} > 0$, llavors C_λ és la unió de dues

rectes pel $(0, 0)$ de pendent $\pm \sqrt{\frac{1 - \lambda}{\lambda + 1}}$, excepte el $(0, 0)$ que no pertany a cap corba de nivell de $f(x, y)$.

- Casos límit: $C_1 = \{ \text{eix } x \} \setminus \{(0, 0)\}$, $C_{-1} = \{ \text{eix } y \} \setminus \{(0, 0)\}$:
 $\lambda = 1 \implies y^2 = 0 \implies C_1 = \{y = 0\} \setminus \{(0, 0)\}$
 $\lambda = -1 \implies x^2 = 0 \implies C_{-1} = \{x = 0\} \setminus \{(0, 0)\}$

• $\text{rang}(f)$ està definit per tots aquells valors $\lambda \in \mathbb{R}$ pels quals la corba de nivell C_λ té almenys un punt: $\text{rang}(f) = \left\{ \frac{1 - \lambda}{\lambda + 1} > 0 \right\} \cup \{\pm 1\}$.

$$\frac{1 - \lambda}{\lambda + 1} > 0 \iff \{1 - \lambda > 0 \text{ i } \lambda + 1 > 0\} \text{ o bé } \{1 - \lambda < 0 \text{ i } \lambda + 1 < 0\}:$$

$$1 - \lambda > 0, \lambda + 1 > 0 \iff \lambda < 1, \lambda > -1 \iff \lambda \in (-1, 1)$$

$$1 - \lambda < 0, \lambda + 1 < 0 \iff \lambda > 1, \lambda < -1, \text{ que mai és cert.}$$

Per tant: $\text{rang}(f) = [-1, 1]$.

• Com que les corbes de nivell de f són rectes o parelles de rectes pel $(0, 0)$ (excepte $(0, 0)$) \implies la funció f no té límit en el $(0, 0)$. En efecte:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L \iff \text{si triem valors de } (x, y) \text{ tendint a } (0, 0), \text{ de}$$

la forma que sigui, el valor límit de $f(x, y)$ quan $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ és L .

En aquest cas, si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ sobre una corba C_λ concreta, llavors quan assolim el punt $(x, y) = (0, 0)$ com a límit, el valor de la funció sobre aquesta corba de nivell tendeixen a ser el valor de λ triat. Com això val per a tot $\lambda \in [-1, 1]$, la funció f no pot tenir límit en el $(0, 0)$.

Definició (Composició de funcions de vàries variables)

$$f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad g : D_g \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

Definim la seva **composició** (g **compost amb** f) per

$$g \circ f : D_{g \circ f} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (1er. actua f)$$

El domini de $g \circ f$ és $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in D_f \text{ t.q. } f(x) \in D_g\}$.

Podem visualitzar $g \circ f$ com **superposició de dos processos** en que donada la **materia prima** x , llavors $(g \circ f)(x)$ ens dóna el **producte final**, però no veiem els passos intermitjos del procés de producció:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^k \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \\ & & \xrightarrow{(g \circ f)} & & \\ & & (g \circ f)(x) & & \end{array}$$

- Si volem que el procés f pugui actuar sobre x cal que x sigui del domini de f ($x \in D_f$).
- Per tal que el procés g pugui actuar sobre $f(x)$ cal que $f(x)$ sigui del domini de g ($f(x) \in D_g$).

Definició (Funció injectiva)

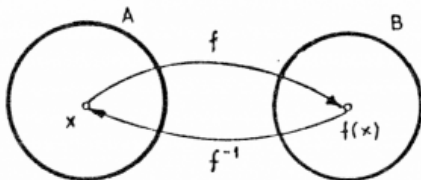
$f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ és una funció injectiva en $A \subset D_f$ si $\forall x, y \in A$ t.q. $x \neq y$ llavors $f(x) \neq f(y)$. (f és injectiva en A si f envia parelles de punts diferents de A a parelles de punts diferents de $f(A)$.)

Definició (Funció inversa)

$f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funció injectiva en $A \subset D_f$ i $B = f(A)$ conjunt imatge de A per f . Existeix $f^{-1} : B \rightarrow A$ **funció inversa** de f verificant:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in B$$

(Recordem: $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in A \text{ t.q. } y = f(x)\}$.)



Límit de funcions de vàries variables

Definició (Límit d'una funció real de n variables en un punt)

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x=(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x)=f(x_1, \dots, x_n)$$

on el domini A és un conjunt obert de \mathbb{R}^n . Siguin $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ un punt del domini i $L \in \mathbb{R}$. Llavors,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. si } 0 < d(x, a) < \delta, |f(x) - L| < \varepsilon$$

Comentari (Interpretació definició límit)

- *Sintèticament, la definició diu: " $x \rightarrow a, x \neq a \implies f(x) \rightarrow L$ ". Quan $x \in \mathbb{R}^n$ s'apropa o tendeix a a llavors $f(x)$ s'apropa a L , però independentment del valor de $f(a)$. ($\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no depèn de $f(a)$ i de fet no cal ni que f estigui definida en el punt a).*
- *El valor del límit L ha de ser un **nombre finit**.*

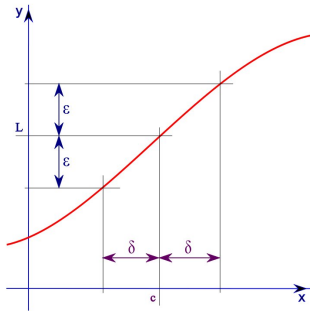
Comentari (Interpretació definició límit (continuació))

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. si } 0 < d(x, a) < \delta, |f(x) - L| < \varepsilon$$

- ε és un nombre tant petit com volguem i que mesura quan gran pot ser, com a molt, la distància entre $f(x)$ i el límit L :
$$d(f(x), L) = |f(x) - L|.$$
- $\delta = \delta(\varepsilon)$ és un nombre petit que depèn del valor de ε triat que diu quan proper ha de ser $x \in \mathbb{R}^n$ de a per tal que $f(x)$ disti de L menys que ε . És compleix que $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0^+$ quan $\varepsilon \rightarrow 0^+$.
- La distància euclidiana entre x i a és:

$$d(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}.$$

- **Cas** $n=1$: $d(x, a) = |x - a|$.
- **Cas** $n=2$: $d((x, y), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.



Comentari (Interpretació definició $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ si $n = 1$)

- $\varepsilon > 0$ defineix un interval de radi ε centrat en el punt L de l'eix y .
- Si calculem l'anti-imatge de l'interval $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ per la funció f (gràfica en vermell) obtenim un interval entorn del punt c (però que en general no està centrat en c com el de la figura).
- El valor de $\delta = \delta(\varepsilon)$ de la definició és tal que l'interval $[c - \delta, c + \delta]$ estigui contingut en l'anti-imatge $f^{-1}([L - \varepsilon, L + \varepsilon])$.

Trobar **una** fórmula explícita per de la funció $\delta(\varepsilon)$ és el que cal fer si ens demanen que apliquem la definició de límit en un exemple concret.

Exemple (Aplicació de la definició de límit (I))

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt[3]{x \cdot y} = 0$$

- $f(x, y) = \sqrt[3]{x \cdot y}$, $a = (0, 0)$, $L = 0$ i $d((x, y), (0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Calculem $|f(x, y) - L|$ i ho relacionem amb δ usant desigualtats:

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

- Concretament tenim:

$$\begin{aligned} |f(x, y) - L| &= |\sqrt[3]{x \cdot y} - 0| = |x|^{1/3} \cdot |y|^{1/3} \\ &\leq \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^{1/3} \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^{1/3} < \delta^{2/3}. \end{aligned}$$

- Hem vist doncs:

$$0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \delta^{2/3}.$$

Exemple (Aplicació de la definició de límit (I) (continuació))

- Hem de respondre a la següent qüestió: Qui és $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que

$$0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

- Com que hem vist $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \delta^{2/3}$, és clar que si igualem $\delta^{2/3} = \varepsilon$ podem concloure $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.
- Si aïllem δ en funció de ε en la relació $\delta^{2/3} = \varepsilon$ obtenim la fórmula que buscavem:

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{3/2}.$$

Exemple (Aplicació de la definició de límit (II))

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 + y^4} = 0.$$

- $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 + y^4}$, $a = (0, 0)$, $L = 0$.
- Calculem $|f(x, y) - L|$ i ho relacionem amb δ usant desigualtats:

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

- En aquest cas ens cal també la indicació $|\sin(z)| \leq |z|$, $\forall z \in \mathbb{R}$.
- Concretament tenim:

$$\begin{aligned} |f(x, y) - L| &= \left| \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 + y^4} - 0 \right| \leq \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^4} \cdot y^2 \\ &\leq \frac{x^2 + y^4}{x^2 + y^4} \cdot y^2 \leq |y|^2 \leq \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 < \delta^2. \end{aligned}$$

Exemple (Aplicació de la definició de límit (II) (continuació))

- *Hem vist doncs:*

$$0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \delta^2.$$

- *Hem de respondre a la següent qüestió: Qui és $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que*

$$0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

- *É clar que si igualem $\delta^2 = \varepsilon$ podem concloure $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.*
- *Si aïllem δ en funció de ε en la relació $\delta^2 = \varepsilon$ obtenim la fórmula que buscavem:*

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} = \sqrt{\varepsilon}.$$

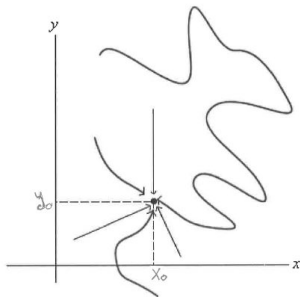
Comentari (Interpretació definició de límit via camins pel punt a)

- *Recordem: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ vol dir que quan $x \in \mathbb{R}^n$ tendeix o s'apropa a a llavors $f(x)$ tendeix a L .*
- *Si $f(x)$ és una funció **d'una variable** només hi ha dues maneres d'apropar-se a $a \in \mathbb{R}$: per la dreta o per l'esquerra. Per això, podem caracteritzar límit en \mathbb{R} termes de límits laterals:*

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff L^+ = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \quad L^- = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \quad L = L^+ = L^-$$

(El límit existeix sí. els límits laterals per la dreta i per l'esquerra existeixen i són coincidents.)

- *Si $f(x, y)$ és funció de **dues variable** i $a = (x_0, y_0)$ hi ha **infinites maneres diferents** d'acostar-se al punt (x_0, y_0) per corbes en el pla (x, y) que passen pel punt (x_0, y_0) . Per exemple, ens podem acostar per rectes, paràboles, etc.*



Proposició (Caracterització límit en \mathbb{R}^2 per camins)

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ *sí.* quan considerem qualsevol corba o camí en el pla (x,y) que passi pel punt (x_0, y_0) , llavors els valors de la funció $f(x,y)$ tendeixen a L quan (x,y) tendeix a (x_0, y_0) per punts sobre aquesta corba.

(En la figura veiem diversos camins que passen pel punt (x_0, y_0)).

La caracterització del límit en \mathbb{R}^2 per camins no és pràctica per calcular-lo... però sí per demostrar que el límit no existeix.

Proposició (Criteri no existència límit en \mathbb{R}^2 per camins)

Si és donada un dels dos casos següents llavors $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$.

- Hi ha almenys **dos camins diferents** pel punt (x_0, y_0) que donen lloc a límits diferents. (Recordeu el cas en que ens podem acostar a un punt sobre múltiples corbes de nivell d'altures diferents.)
- Hi ha almenys un camí per (x_0, y_0) pel qual el límit no existeix.

Exemple ($f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ funció definida si $x^2 + y^2 \neq 0$)

$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ ja que el límit en $(0,0)$ segons els dos camins de \mathbb{R}^2 definits pels grafs $y = x$ i $y = x^6 - x^2$ (que passen pel $(0,0)$ quan $x = 0$) donen valors diferents:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^6 - x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (x^6 - x^2)^2}{x^2 + (x^6 - x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^4 - 1)^2 = 1.$$

Exemple (Límit en (x_0, y_0) segons rectes)

Calquem el límit en el punt (x_0, y_0) quan ens hi acostem sobre rectes:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0 + m \cdot (x - x_0)) \quad \text{Límit sobre la recta de pendent } m$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) \quad \text{Límit sobre la recta de pendent infinit}$$

(Cas $(x_0, y_0) = (0, 0)$: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx)$ i $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y)$.)

Hem de calcular aquests límits per a tot valor de $m \in \mathbb{R}$. Llavors:

- Sí obtenim límits diferents per almenys dues rectes diferents (p. ex., si el resultat depèn de m) llavors: $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$.
- Si el límit és el mateix, L , per a totes les rectes, podem dir que si existeix el $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ ha de valer L .

ATENCIÓ: En cas que tots els límits segons rectes donin L , aquest càlcul **no** en diu que és que el límit existeixi. Només ens diu que, en cas que el límit existeixi, llavors ha de valdre L .

Exemple (Límits en el $(0,0)$ segons rectes)

- $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, funció definida si $(x, y) \neq (0, 0)$.

- Límit segons la recta $y = mx$, $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - (mx)^2}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - m^2}{1 + m^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

- Límit segons la recta $x = 0$, $y \rightarrow 0$:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0^2 - y^2}{0^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1.$$

- Per tant, el límit depèn de la recta triada $\implies \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Exercici (Límits en el $(0,0)$ segons rectes)

- Per $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, els límits en $(0,0)$ segons rectes $y = mx$

donen $\frac{m}{1 + m^2}$; segons la recta $x = 0$ dona $0 \implies \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

- Per $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, tots els límits en $(0,0)$ segons rectes són 0 .

Exemple (Límits en el (0, 0) segons rectes)

- $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$, funció definida si $x^2 + y^2 \neq 0$.

- Límit segons la recta $y = mx$, $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (mx)^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^4}{x^2 + m^2 x^2} = \begin{cases} \frac{0}{m} = 0, & m \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0, & m = 0 \end{cases}$$

(Observem: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$.)

- Límit segons la recta $x = 0$, $y \rightarrow 0$:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0^2 \cdot y^2}{0^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0.$$

- Per tant, tots els límits de la funció en el (0, 0) segons rectes donen zero... Però ja hem vist (triant una corba adequada) que hi ha d'altres corbes per les quals el límit de la funció en el (0, 0) sobre aquesta corba no és zero $\implies \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Exemple (Límits en el (0,0) segons rectes)

- $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, funció definida si $(x, y) \neq (0, 0)$.
- Límit segons la recta $y = mx$, $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (mx)}{x^4 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = \\ &= \begin{cases} \frac{0}{m^2} = 0, & m \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0, & m = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

- Límit segons la recta $x = 0$, $y \rightarrow 0$:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0^2 \cdot y}{0^4 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

- Tots els límits de la funció en el (0,0) segons rectes donen zero.
- Si calculem el límit en el (0,0) sobre paràboles $y = cx^2$, $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, cx^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (cx^2)}{x^4 + (cx^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c}{1 + c^2} = \frac{c}{1 + c^2}.$$

El límit depèn del valor de c triat (de fet és suficient que per algun c no doni igual a zero) $\implies \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Comentari (Mètodes bàsics càlcul límit funcions dues variables)

En centrem en el càlcul del límit en el $(0, 0)$, ja que és el punt al que refereixen la majoria dels exemples.

- *Tractar de relacionar el càlcul del límit en \mathbb{R}^2 amb el càlcul del límit d'una (altra) funció d'una variable.*
- *Tractar d'acotar el tamany del numerador per expressions que és simplifiquin amb el denominador, usant desigualtats del tipus:
 $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 \leq x^2 + y^2$, $x^2 \leq x^2 + y^4$, ...*
- *Si $f(x, y) = m(x, y) \cdot k(x, y)$, on:*
 - $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} k(x, y) = 0$ (té límit zero).
 - $|m(x, y)| \leq M$ (està acotada si (x, y) és prou proper a $(0, 0)$).

Llavors: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

(El punt destacat és que no cal que existeixi el límit de $m(x, y)$.)

● **ATENCIÓ:** *No hem de perdre de vista que si creiem que el límit no existeix, llavors el que cal fer és trobar 2 camins diferents pel $(0, 0)$ (rectes o d'altres tipus de corbes) que donin lloc a límits diferents.*

Exemple (Càlcul límits funcions dues variables)

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\sin(z)}{z} = 1$, on $z = x^2 + y^2 \rightarrow 0^+$.
- Si $f(x, y) = \frac{x y^4}{x^2 + y^4}$ podem usar $y^4 \leq x^2 + y^4$ per veure que $f(x, y) \rightarrow 0$ si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$:

$$|f(x, y) - 0| = |x| \cdot \frac{y^4}{x^2 + y^4} \leq |x| \cdot \frac{x^2 + y^4}{x^2 + y^4} = |x| \rightarrow 0.$$

- $f(x, y) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = m(x, y) \cdot k(x, y)$, on:
 - $k(x, y) = x \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} k(x, y) = 0$.
 - $m(x, y) = \sin(1/(x^2 + y^2)) \implies |m(x, y)| \leq 1, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$.

Per tant: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \sin(1/(x^2 + y^2)) = 0$

(malgrat $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin(1/(x^2 + y^2))$ que és com el límit d'una variable $\lim_{z \rightarrow 0^+} \sin(1/z)$ que sabem que no existeix.)

Exemple (Límits funcions 2 variables via funcions 1 variable)

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} e^{1/z} = e^{1/0^+} = e^{+\infty} = +\infty, \quad \lim_{z \rightarrow 0^-} e^{1/z} = e^{1/0^-} = e^{-\infty} = 0.$$

$$\bullet \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{1/(x^2+y^2)} \underset{z=x^2+y^2}{=} \lim_{z \rightarrow 0^+} e^{1/z} = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-1/(x^2+y^4)} \underset{z=x^2+y^4}{=} \lim_{z \rightarrow 0^+} e^{-1/z} = \lim_{z \rightarrow 0^+} e^{-1/0^+} = e^{-\infty} = 0.$$

Exemple (Límits funcions 2 variables via desigualtats)

$$\bullet \text{ Per } f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ tots els límits en } (0, 0) \text{ per rectes són } 0.$$

$$\text{Usem ara } |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}:$$

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Llavors: } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Exemple (Límits funcions 2 variables)

Vegeu: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x y \ln(x^2 + y^2) = 0$. Fem:

$$f(x, y) = \underbrace{\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{\text{Hem vist té límit 0}} \cdot \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2} \ln(x^2 + y^2)}_{\text{Té límit 0 via límit una variable}}$$

Via L'Hôpital, és fàcil veure que si $a > 0$ és un nombre fixat:

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} z^a \ln(z) = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\ln(z)}{z^{-a}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1/z}{-a z^{-a-1}} = -\frac{1}{a} \lim_{z \rightarrow 0^+} z^a = 0.$$

Per tant:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \ln(x^2 + y^2) \underbrace{=}_{z=x^2+y^2} \lim_{z \rightarrow 0^+} z^{1/2} \ln(z) \underbrace{=}_{a=1/2} 0.$$

Exemple (Límit en $(0,0)$ de $f(x,y) = \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 + y^4}$)

- Usant $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$, és fàcil veure que tots els límits en $(0,0)$ segons rectes $y = mx$ són igual a zero. P. ex., si $m \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(m^2 x^4)}{x^2 + m^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(m^2 x^4)}{m^2 x^4}}_{=1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{m^2 x^4}{x^2 + m^4 x^4}}_{=0} = 0.$$

En efecte: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(m^2 x^4)}{m^2 x^4} \underbrace{=}_{z=m^2 x^4} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^4}{x^2 + m^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^2}{1 + m^4 x^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

- El límit "natural" segons la corba $x = y^2$ també dona 0:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y^6)}{2y^4} = \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y^6)}{y^6}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} y^2}_{=0} = 0.$$

Exemple (Límit en $(0,0)$) de $f(x,y) = \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 + y^4}$ (Continuació)

- Tractem de veure que el límit és 0 usant de nou $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 + y^4} = \underbrace{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 y^2}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}}_{=0} = 0.$$

En efecte:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 y^2} \underbrace{=}_{z=x^2 y^2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1,$$

$$\left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} - 0 \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^4} \cdot y^2 \leq \underbrace{\frac{x^2 + y^4}{x^2 + y^4}}_{=1} \cdot y^2 \leq y^2.$$

Llavors, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^2 = 0 \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} = 0.$

Definició (Continuïtat d'una funció real de n variables en un punt)

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (A \text{ conjunt obert})$$
$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Direm que f és **contínua** en el punt $a \in A$ sí.

$$\exists L = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad i \quad L = f(a)$$

Comentari

- 1 Si f no és contínua en a direm que f és discontinua en a .
- 2 Si A no és un conjunt obert la definició de continuïtat en els seus **punts frontera** és més complexa. Veurem exemples concrets en el cas en que f és una funció **definida a trossos** i volem estudiar la continuïtat en els punts frontera entre els diferents trossos.
- 3 f és contínua en un conjunt si es contínua en tots els seus punts.

Definició (Continuïtat funcions de n variables i m components)

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (A \text{ cjt. obert})$$
$$x=(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x)=f(x_1, \dots, x_n)=(f_1(x), \dots, f_m(x))$$

f és contínua en un punt a sí. totes les seves funcions components, $f_1(x), \dots, f_m(x)$, són contínues en a . En termes d'epsilons i deltes, f és contínua en a sí:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q. si } d(x, a) < \delta, \text{ llavors } d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

(Ara, el valor de x tal que $d(x, a) < \delta$ sí que el podem triar $x = a$.)

Proposició (Propietats bàsiques continuïtat)

- Operacions elementals:** f, g funcions reals contínues en $a \implies b \cdot f$ ($\forall b \in \mathbb{R}$), $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (si $g(a) \neq 0$) contínues en a .
- Composició de funcions:** $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$. f contínua en a i g contínua en $f(a) \implies g \circ f$ contínua en a .
- Funció inversa:** $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua en a i suposem que existeix f^{-1} funció inversa de $f \implies f^{-1}$ contínua en $f(a)$.

Corol·lari (Continuïtat per generació)

Totes les funcions elementals simples (polinomis, trigonomètriques, exponencials,...) i les seves combinacions (sumes, productes, composicions,...) són contínues dins del seu domini de definició.

Exemple (Continuïtat per generació)

$$f(x, y, z) = x^y + \sin\left(\frac{x+y}{y^2+z^2}\right) = e^{y \cdot \ln(x)} + \sin\left(\frac{x+y}{y^2+z^2}\right)$$

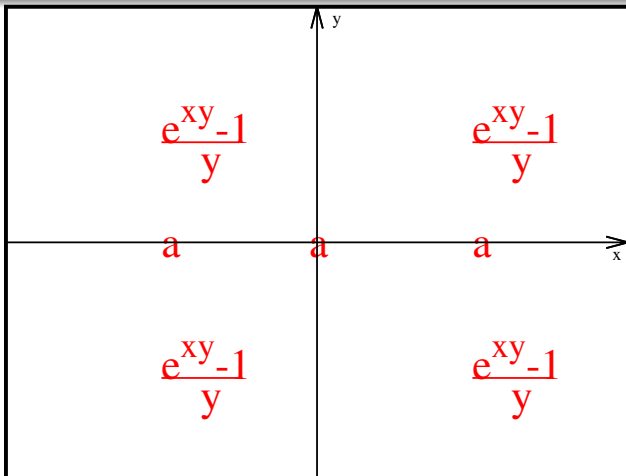
és contínua “per generació” si $(x, y, z) \in D_f$ on:

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \text{ i } (y, z) \neq (0, 0)\}.$$

Exercici (Problema 12)

Estudieu la continuïtat en \mathbb{R}^2 de $f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy} - 1}{y}, & y \neq 0 \\ a, & y = 0 \end{cases}$

en termes del valor de $a \in \mathbb{R}$ triat.



• És clar que, per generació, la funció $f(x, y)$ és contínua en tot \mathbb{R}^2 excepte potser en l'eix x .

• Anem a veure si hi ha algun valor $a \in \mathbb{R}$ que fa que $f(x, y)$ sigui contínua en $(0, 0)$. Cal verificar:

$$(1) \quad \exists L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y), \quad (2) \quad L = f(0, 0) = a.$$

• Per calcular $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ hem de considerar totes les formes possibles d'acostar-nos a $(0, 0)$ i veure que donen lloc al mateix límit L .

• En aquest cas hi ha dues formes de tendir a $(0, 0)$:

• Per punts sobre l'eix x , de la forma $(x, 0) \rightarrow (0, 0)$:

$$\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} f(x, 0) = \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} a = a.$$

• Per punts de fora de l'eix x , de la forma $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ amb $y \neq 0$:

$$\lim_{\left\{ \begin{array}{l} (x,y) \rightarrow (0,0) \\ y \neq 0 \end{array} \right\}} f(x, y) = \lim_{\left\{ \begin{array}{l} (x,y) \rightarrow (0,0) \\ y \neq 0 \end{array} \right\}} \frac{e^{xy} - 1}{y} = \lim_{\left\{ \begin{array}{l} (x,y) \rightarrow (0,0) \\ y \neq 0 \end{array} \right\}} \frac{e^{xy} - 1}{xy} \cdot x = 1 \cdot 0 = 0$$

on usem $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$ fent $z = xy \rightarrow 0$ quan $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

- Per tant, $\exists L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \iff a = 0$ i val $L = 0$.
- Fem $a = 0$ i discutim la continuïtat de $f(x,y)$ en la resta de punts de l'eix x , de la forma $(x_0, 0)$ amb $x_0 \neq 0$. Apliquem la mateixa aproximació anterior:

- Tendim a $(x_0, 0)$ sobre l'eix x , fent $(x, 0) \rightarrow (x_0, 0)$:

$$\lim_{(x,0) \rightarrow (x_0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,0) \rightarrow (x_0,0)} f(x,0) = \lim_{(x,0) \rightarrow (x_0,0)} a = \lim_{(x,0) \rightarrow (x_0,0)} 0 = 0.$$

- Tendim a $(x_0, 0)$ per fora de l'eix x , fent $(x,y) \rightarrow (x_0, 0)$ amb $y \neq 0$:

$$\lim_{\left\{ \begin{array}{l} (x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ y \neq 0 \end{array} \right\}} f(x,y) = \lim_{\left\{ \begin{array}{l} (x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ y \neq 0 \end{array} \right\}} \frac{e^{xy} - 1}{xy} \cdot x = 1 \cdot x_0 = x_0,$$

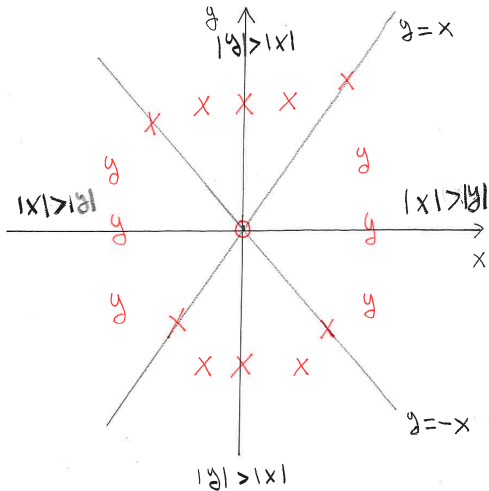
on de nou usem que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$ fent $z = xy \rightarrow x_0 \cdot 0 = 0$ quan $(x,y) \rightarrow (x_0, 0)$.

- Per tant, fent $a = 0$ obtenim que $f(x,y)$ només és contínua en $(x_0, 0)$ si $x_0 = 0 \implies f$ és contínua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \neq 0\}$.
- Si volem f contínua en \mathbb{R}^2 , cal re-definir $f(x,0) = x$ sobre l'eix x .

14 CC)

$$f(x,y) = \begin{cases} x, & \text{si } |x| \leq |y| \\ y, & \text{si } |x| > |y| \end{cases}$$

- Per definició, f és contínua $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ excepte potser si (x,y) pertany a una de les rectes $y=x$ o bé $y=-x$ on $|x|=|y|$.



$$\boxed{\text{Cas: } (x_0, y_0) = (0, 0) \quad f(0, 0) = 0}$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ |x| \leq |y|}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ |x| \leq |y|}} x = 0 \leftarrow \begin{array}{l} \text{límit quan ens} \\ \text{acostem al } (0, 0) \\ \text{per sobre o per} \\ \text{sota de les rectes} \\ \text{bisectriu.} \end{array}$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ |x| > |y|}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ |x| > |y|}} y = 0 \leftarrow \begin{array}{l} \text{límit quan ens} \\ \text{acostem al } (0, 0) \\ \text{Per la dreta o} \\ \text{l'esquerre de les} \\ \text{rectes bisectriu.} \end{array}$$

f és contínua en $(0, 0)$

cas $(x_0, y_0) = (a, a)$, $a \neq 0$

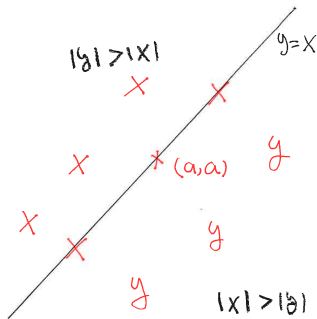
$$f(a, a) = a$$

- Punt general sobre la recta $y=x$ (diferent del $(0,0)$).
- Per fixar idees fem $a > 0$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,a) \\ |x| \leq |y|}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,a) \\ |x| \leq |y|}} x = a$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,a) \\ |x| > |y|}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,a) \\ |x| > |y|}} y = a$$

f és contínua en (a, a) , $a \neq 0$



Cas $(x_0, y_0) = (a, -a), a \neq 0$

$$f(a, a) = a$$

• Punt general sobre la recta

$$y = -x \text{ (diferent del } (0,0))$$

• Per fixar idees fem $a > 0$

$$y = -x$$

$$|x| > |y|$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,-a) \\ |x| \leq |y|}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,-a) \\ |x| \leq |y|}} x = a \quad \neq$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,-a) \\ |x| > |y|}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,-a) \\ |x| > |y|}} y = -a$$

$$|y| > |x|$$

f No és contínua en $(a, a), a \neq 0$

Derivada d'una funció d'una variable

Definició (Derivada d'una funció en un punt)

$$f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad i \quad c \in (a, b)$$

$x \mapsto f(x)$

Definim la **derivada de f en el punt c** com el valor del límit següent:

$$f'(c) = \frac{df}{dx}(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \underset{x=c+h}{=} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

(Sempre que el límit existeixi i sigui finit.)

Comentari

- 1 Si \nexists el límit (inclou quan $f'(c) = \pm\infty$) llavors direm que f **no és derivable** en el punt c .
- 2 Si f és derivable $\forall c \in (a, b)$ llavors anomenarem a la funció $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ la **funció derivada** de f .

Interpretació geomètica de la derivada

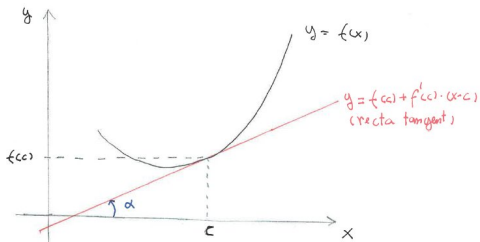
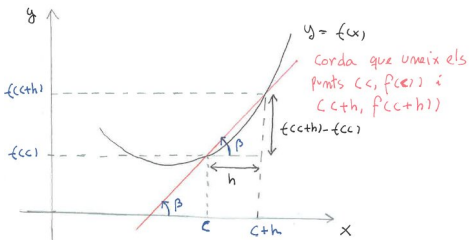
- $f'(c)$ dóna la pendent de la **recta tangent** a la gràfica $y = f(x)$ en el punt c . L'equació de la recta tangent és:

$$y = f(c) + f'(c) \cdot (x - c)$$

- Si $f'(c) = \pm\infty$ direm que la pendent de f en el punt c és infinita. (Però f no és derivable en c .)
- La recta perpendicular a la recta tangent en el punt $(c, f(c))$ s'anomena **recta normal** a la gràfica. La pendent de la recta normal en és $-\frac{1}{f'(c)}$ i la seva equació és:

$$y = f(c) - \frac{1}{f'(c)} \cdot (x - c)$$

(En el cas en que $f'(c) = 0$, la recta normal és $x = c$.)



- Si considerem la recta (“corda”) que uneix els punts $(c, f(c))$ i $(c+h, f(c+h))$ la seva pendent és:

$$\tan \beta = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

- Si fem el límit quan $h \rightarrow 0$ d'aquesta corda obtenim la recta tangent, la pendent de la qual és $\tan \alpha = f'(c)$.

- Def.: Derivada d'una funció vectorial d'una variable

$$f: (a,b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

Si existeixen les derivades de totes les funcions components de f en un punt $x_0 \in (a,b)$, llavors la derivada de f en aquest punt és: $f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \dots, f_m'(x_0))$

• Observem que $f(x)$ dona la parametrització d'una corba en \mathbb{R}^m i que $f'(x_0)$ és un vector tangent a la corba en el punt $f(x_0)$.

- Exemple: Si una partícula de \mathbb{R}^3 segueix la trajectòria donada per $\gamma(t) = (e^t, \sin t, t)$, llavors el seu vector velocitat en l'instant t és $\gamma'(t) = (e^t, \cos t, 1)$ i la seva velocitat és $\|\gamma'(t)\|$.

- Def.: Derivades parcials en un punt d'una funció real de m variables.

$$f: A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \text{ obert}, a \in A$$
$$x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$$

La derivada parcial de f respecte de la variable x_j en el punt $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ ve donada pel límit següent (si existeix i és finit), per a tot $j = 1, 2, \dots, m$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{x_j \rightarrow a_j} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_m)}{x_j - a_j}$$

Si el límit no existeix o és $\pm \infty$ direm que $\nexists \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

• Altres notacions:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_{x_j} f(a) = \partial_j f(a) = D_{x_j} f(a) = D_j f(a) = f'_{x_j}(a)$$

- Derivades parcials funcions $M=2$ variables

$$f: A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \text{ obert, } a = (x_0, y_0) \in A$$
$$(x, y) \longmapsto f(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

← $\begin{cases} \text{Em el quocient incremental} \\ \text{fixem el valor de la coord.} \\ \text{y} = y_0 \text{ i només variem } x \rightarrow x_0 \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

• Cas particular $a = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y}$$

- El càlcul de les derivades parcials via la seva definició només l'usarem en aquells punts on la definició de la funció presenta algun problema o indeterminació. En els altres punts usarem regles de derivació anàlogues a les de la derivada.

- Example 1: $f(x, y) = \frac{y - \sin(y)}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) = 0$.

Uavors:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$(f(x, 0) = \frac{0}{x^2} = 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{y - \sin y}{y^2}\right)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \sin y}{y^3} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3/3! + O(y^5)}{y^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{6} + O(y^2)\right) = \frac{1}{6}.$$

$$(Taylor \sin y = y - \frac{y^3}{3!} + O(y^5))$$

- Exemple: $f(x,y) = (x^2+y^2)^x = e^{x \cdot \ln(x^2+y^2)}$, $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 1$

Lavors:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(x^2)} - 1}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x^2)}{[x^2 + 2]} \quad (\text{L'Hôpital})$$

$$= \frac{1 \cdot [-\infty + 2]}{1} = -\infty \Rightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

on. usem $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2)}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{(\text{L'Hôpital})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2/x}{-1/x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0.$$

$$(f(0,y) = e^{0 \cdot \ln(y^2)} = e^0 = 1)$$

- Exemple: $f(x,y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

$(f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0)$

Càlcul derivades parcials $f(x,y)$ en un punt (no problemàtic)

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} [f(x, y_0)] \Big|_{x=x_0}$ ← Fixem el valor de la variable $y = y_0$ i obtenim una funció que només depèn de x . Derivem aquesta funció respecte de x en el punt x_0 com a funció d'una variable.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} [f(x_0, y)] \Big|_{y=y_0}$$

• Exemple : $f(x, y) = x e^{y \sin x}$, $(x_0, y_0) = (\pi/2, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi/2, 0) = \frac{d}{dx} [f(x, 0)]_{x=\pi/2} = \frac{d}{dx} [x e^{0 \cdot \sin x}]_{x=\pi/2} = \frac{d}{dx} [x]_{x=\pi/2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\pi/2, 0) = \frac{d}{dy} [f(\pi/2, y)]_{y=0} = \frac{d}{dy} [\frac{\pi}{2} \cdot e^{y \sin(\pi/2)}]_{y=0} = \frac{d}{dy} [\frac{\pi}{2} e^y]_{y=0} = (\frac{\pi}{2} e^y)_{y=0} = \frac{\pi}{2}$$

• Exemple : $f(x, y) = \frac{(e^{xy} - 1) \arcsin(y^x) + y^4 \cos(\pi + xy)}{x^2 \cdot y^2 + x^2 + y^2}$ $\left[\frac{\partial f}{\partial y}(0, \pi) ? \right]$

$$f(0, y) = \frac{(e^{0 \cdot y} - 1) \arcsin(y^0) + y^4 \cos(\pi + 0 \cdot y)}{0^2 \cdot y^2 + 0^2 + y^2} = \frac{0 \cdot \arcsin(1) + y^4 \cos(\pi)}{y^2} = -y^2$$

Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, \pi) = \frac{d}{dy} [f(0, y)]_{y=\pi} = \frac{d}{dy} [-y^2]_{y=\pi} = [-2y]_{y=\pi} = -2\pi$$

· Càlcul de les funcions derivades parcials

Em base al comentari anterior, si volem calcular, p. ex., $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ per a tots els (x, y) en que això sigui possible de forma directa, el que es pot fer és interpretar y com si fos una constant i derivar $f(x, y)$ respecte de x com si fos una funció d'una variable (Això val també per $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ o pel cas de funcions n variables)

- Exemple: $f(x, y) = x e^{y \sin x}$

Les seves (funcions) derivades parcials són:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (x e^{y \sin x}) = \frac{\partial}{\partial x} (x) \cdot e^{y \sin x} + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} (e^{y \sin x}) = \\ &= e^{y \sin x} + x e^{y \sin x} \frac{\partial}{\partial x} (y \sin x) = e^{y \sin x} (1 + x y \cos x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (x e^{y \sin x}) = x \frac{\partial}{\partial y} (e^{y \sin x}) = x e^{y \sin x} \frac{\partial}{\partial y} (y \sin x) = \\ &= x e^{y \sin x} \sin x \end{aligned}$$

• Exemple: $f(x,y) = x^{y^x} = x^{(e^{x \cdot \ln y})} = e^{e^{x \cdot \ln y} \cdot \ln x}$

Travors:

$$(y^x = e^{x \ln y})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \underbrace{e^{e^{x \cdot \ln y} \cdot \ln x}}_{x^{y^x}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (e^{x \cdot \ln y} \cdot \ln x) = x^{y^x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (e^{x \cdot \ln y}) \ln x + e^{x \cdot \ln y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\ln x) \right\} =$$

$$= x^{y^x} \left\{ e^{x \cdot \ln y} \ln y \cdot \ln x + e^{x \cdot \ln y} \cdot \frac{1}{x} \right\} = x^{y^x} \cdot y^x \left\{ \ln x \cdot \ln y + \frac{1}{x} \right\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \underbrace{e^{e^{x \cdot \ln y} \cdot \ln x}}_{x^{y^x}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (e^{x \cdot \ln y} \cdot \ln x) = x^{y^x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (e^{x \cdot \ln y}) \cdot \ln x =$$

$$= x^{y^x} \cdot \underbrace{e^{x \cdot \ln y}}_{y^x} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} (x \ln y)}_{x/y} \cdot \ln x = x^{y^x} \cdot y^x \cdot y^{x-1} \cdot x$$

- Example: $f(x, y) = x^2 \cdot \tan\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$, $(x, y) \neq (0, 0)$. Vergeu $x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f$

(Idea: Relacionem $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ amb f)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{2x \tan\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}_{\frac{2}{x} \cdot f} + x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\tan\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \right] = \frac{2}{x} f + x^2 \underbrace{\left[1 + \left(\tan\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \right)^2 \right]}_{\frac{1}{x^4} f^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} \right)$$

$$= \frac{2}{x} f + x^2 \left(1 + \frac{1}{x^4} f^2 \right) \cdot \left(-\frac{y^2 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \right) = \frac{2}{x} f - \frac{2x^3 y^2}{(x^2+y^2)^2} \left(1 + \frac{1}{x^4} f^2 \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\tan\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \right] = x^2 \underbrace{\left[1 + \left(\tan\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \right)^2 \right]}_{\frac{1}{x^4} f^2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} \right)}_{\frac{2y(x^2+y^2) - y^2 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2 y}{(x^2+y^2)^2}} \\ &= x^2 \left(1 + \frac{1}{x^4} f^2 \right) \frac{2x^2 y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4 y}{(x^2+y^2)^2} \left(1 + \frac{1}{x^4} f^2 \right) \end{aligned}$$

- Def.: Vector derivades parcials d'una funció de n variables i m components

$$f: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad A \text{ obert}, \quad a \in A$$

$$x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

Si totes les funcions components de f admeten derivada parcial respecte x_j en el punt a , llavors podem introduir el vector de derivades parcials de f resp. x_j en a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \right) \in \mathbb{R}^m$$

- Per tant, si podem calcular totes les derivades parcials de f respecte x_1, \dots, x_m en el punt a , obtenim m vectors (un per cada derivada parcial) de dimensió m .
Què fem? Els usem per generar una matriu!

• Def.: Matriu Jacobiana o de derivades parcials en un punt.
 Per una funció de m variables i n components

Usant les notacions de la pàgina anterior, la matriu Jacobiana de f en el punt a és la matriu $m \times n$ que té per columnes els m vectors de derivades parcials (respecte de x_1, x_2, \dots, x_n) de f en el punt a . Així és:

$$Df(a) = J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

\uparrow 1a columna $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$
 \uparrow 2a columna $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$
 \uparrow columna n $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$

(observació:
 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ fila i
 columna j)

• Example : $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto f(x, y) = (\sin(xy), \sinh(xy^2), \cosh(x^2y))$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\cos(xy) \cdot y, \cosh(xy^2) \cdot y^2, \sinh(x^2y) \cdot 2xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (\cos(xy) \cdot x, \cosh(xy^2) \cdot 2xy, \sinh(x^2y) \cdot x^2)$$

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(xy) \cdot y & \cos(xy) \cdot x \\ \cosh(xy^2) \cdot y^2 & \cosh(xy^2) \cdot 2xy \\ \sinh(x^2y) \cdot 2xy & \sinh(x^2y) \cdot x^2 \end{bmatrix}$$

$$\uparrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\uparrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

Remember:

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

observació:

(I) Si $f(x)$ és una funció d'una variable, el fet de que existeixi $f'(a)$ ens dona molta informació sobre el comportament de f entorn del punt:

$$\exists f'(a) \Rightarrow \begin{cases} \cdot f \text{ és contínua en } a \\ \cdot y = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) \text{ recta tangent a la gràfica } y = f(x) \text{ en } x=a. \end{cases}$$

(II) Si tenim $f(x, y)$ funció de dos variables, tot és força més complicat. Per exemple, el fet de que existeixin

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) \text{ i } \frac{\partial f}{\partial y}(a) \text{ ni tan sols ens garanteix per si sol}$$

que f sigui contínua en el punt a (ídem per més variables).

• Com comentarem, pel cas de funcions de 2 o més variables, a més de l'existència de derivades parcials cal quelcom més!

• Example: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Per aquesta funció hem vist: $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \\ \cdot f \text{ no és contínua en } (0,0). \end{array} \right.$

• Hi ha doncs funcions de 2 o més variables que:

(I) Tenen derivades parcials en un punt però no són ni contínues en el punt

(II) Són contínues en un punt però no tenen derivades parcials en aquest punt (p.ex., $f(x,y) = \sqrt[3]{x \cdot y}$ en $(0,0)$)

• Observem que, fora del $(0,0)$, la funció anterior no té cap "patologia" detectable. p.ex. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - x y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

- Def.: Direm que una funció $f: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ és de classe C^1 en A si: existeixen totes les funcions derivades parcials primeres de f en el conjunt A i a més a més, totes aquestes funcions són contínues en A . Escriurem: $f \in C^1(A)$.

- Això és: per tal que $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sigui C^1 en A cal:
 $(x,y) \mapsto f(x,y)$

- Pas 1: calcular les funcions

$$\frac{\partial f}{\partial x}: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Si alguna d'elles no la podem calcular en el punt $a \in A$, de segur de f no és C^1 en aquest punt.

- Pas 2: Veure de aquestes funcions $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ són contínues amb f . Si alguna d'elles no és contínua en el punt $a \in A$, llavors f no és C^1 en aquest punt.

Teorema: $f \in C^1(A) \Rightarrow f$ contínua en A .

Observacions:

- (1) Toda funció definida com a combinació de funcions elementals es sempre C^1 en tot el seu domini excepte com a molt en algun punt aïllat o en algun punt on la seva definició és "patològica" (com $\frac{xy}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$).
- (2) Si una funció no és contínua i/o no té derivades parcials en un punt no pot ser C^1 en aquest punt.
- (3) L'existència de derivades parcials en un punt no garanteix el caràcter C^1 en aquest punt (de fet ni tan sols la continuïtat en el punt).
- (4) Si veiem que una funció és C^1 en un punt (derivades parcials contínues en el punt) no cal que mirem o no si és contínua en el punt. Segur que ho és!
- (5) Si veiem que una funció no és C^1 en un punt (no té derivades parcials en el punt o aquestes no hi són contínues) cal estudiar la seva continuïtat en el punt "a part".

Exemple: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Estudieu la continuïtat de les seves derivades parcials.

• És clar, per generació, que $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. En el $(0,0)$ sabem que f no és contínua i per tant no hi pot ser C^1 .
Malgrat això, anem a calcular les seves funcions derivades parcials i estudiar-ne la seva continuïtat.

• Si $(x,y) \neq (0,0)$ llavors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(xy) \cdot (x^2+y^2) - xy \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y \cdot (x^2+y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

Referent als càlculs per $\frac{\partial f}{\partial y}$, les funcions derivades parcials són:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - x y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

• Tant $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ com $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ són contínues (per generació) si $(x,y) \neq (0,0)$.

Així, $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.

• Ni $\frac{\partial f}{\partial x}$ ni $\frac{\partial f}{\partial y}$ són contínues en $(0,0) \Rightarrow f$ no és C^1 en $(0,0)$ (de fet f no és contínua en $(0,0)$).

En efecte, fent límits segons rectes

$y = mx$, $x \rightarrow 0$, en $(0,0)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^3 x^3 - x^2 m x}{(x^2 + m^2 x^2)^2} = \frac{m^3 - m}{(1 + m^2)^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \begin{cases} \neq 0 & \text{Si } m^3 - m \neq 0 \end{cases}$$

Per tant, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ i $\frac{\partial f}{\partial x}$ no és contínua en $(0,0)$.
(Idem $\frac{\partial f}{\partial y}$)

• Exemple: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Estudia la Continuitat de f i de les seves derivades parcials en \mathbb{R}^2 .

• És clar que, per generació, $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\})$.

• Usant desigualtats $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ s'obté $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

$$|f(x,y) - 0| = \frac{|x| \cdot |y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0 \Rightarrow f \text{ és continua en } (0,0).$$

• Per tant: f és contínua en tot \mathbb{R}^2 .

• Si $(x,y) \neq (0,0)$, obtenim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(xy) \cdot \sqrt{x^2+y^2} - xy \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2+y^2})}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{y(x^2+y^2) - x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

• En $(0,0)$ usem definició, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, observant: $f(x,0) = \frac{x \cdot 0}{\sqrt{x^2+0^2}} = \frac{0}{\sqrt{x^2}} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0.$$

- Refent els càlculs per $\frac{\partial f}{\partial y}$, les funcions derivades parcials són:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- clarament $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ són contínues per generació fora del $(0,0)$ -

Per tant, $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.

- Ni $\frac{\partial f}{\partial x}$ ni $\frac{\partial f}{\partial y}$ són contínues en $(0,0) \Rightarrow f$ és contínua en $(0,0)$ però no C^1 en $(0,0)$.

Em efecte, és fàcil veure que, p.ex., no existeix el límit en $(0,0)$ de $\frac{\partial f}{\partial x}$

Segons la recta $x=0$:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{(y^2)^{3/2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{|y|^3} = \text{A}, \text{ ja que si } y > 0: \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^3}{|y|^3} = 1$$

$$\text{i si } y < 0: \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y^3}{|y|^3} = -1. \text{ Per tant, } \text{A} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ i } \frac{\partial f}{\partial x}$$

no és contínua en $(0,0) \Rightarrow f$ no és C^1 en $(0,0)$.

Derivades parcials d'ordre Superior

Per fixar idees, considerem primer una funció real de 2 variables:

$$f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \equiv f(x, y), \quad A \text{ obert}$$

Si suposem que existeixen les funcions derivades parcials primeres de f en A , $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$, llavors podem mirar si aquestes funcions admeten de nou derivades parcials en A . Això ens permet de definir les seves derivades parcials segones:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{deriv. parcial 2a resp.} \\ \text{de } x \text{ 2 cops} \end{array} \right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Derivades parcials segones resp. x i y (derivades creuades)
Hi ha dues possibilitats segons l'ordre de derivacions tractat (1er. actua la variable de més a la dreta). Em "principi" l'ordre de derivacions pot ser important (després comentem que "en general" no ho és!)

- Clarament podem estendre aquesta idea a funcions de n variables i a derivades d'ordre k qualsevol. P. ex.: $f = f(x, y, z)$

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^3 \partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \right) \right) \right) \right)$$

Exemple: $f(x, y) = x^2 + xy + y \sin x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + y \cos x ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + \sin x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2x + y + y \cos x) = 2 - y \sin x ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x + \sin x) = 1 + \cos x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2x + y + y \cos x) = 1 + \cos x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2 - y \sin x) = -\sin x$$

} Coincidència de
les derivades
creuades zones!

- Def.: Funcions de classe C^k .

(1) Direm que $f \in C^k(A)$, $k \geq 1$, si f és contínua en A , podem definir totes les funcions derivades parcials de f d'ordre $\leq k$ en A , i totes aquestes funcions són contínues en A .

(2) $f \in C^\infty(A)$ si f és $C^k(A)$ per a tot $k \geq 1$ (podem definir les seves derivades parcials a tots els ordres i totes són contínues).

(3) $f \in C^0(A)$ (ó $f \in C(A)$) si f és contínua en A .

Exemple: $f(x,y) = \frac{x \sin y + y e^x}{x^2 + y^4}$ és $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ per generació.

Comentaris observeu que si diem que $f \in C^2$ així vol dir que com a mínim té derivades fins ordre 2. Però dir $f \in C^2$ no vol dir que, eventualment, f no pugui ser p.ex. C^3 , etc.

- Proposicions: Coincidència de les derivades parcials creuades.

(1) Enunciat clàssic (Teorema de Schwarz)

Si $f = f(x, y)$ és una funció de 2 variables de classe $C^2(A)$, llavors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ en } A.$$

(2) Versió general: Si f és una funció de n variables de classe $C^k(A)$,

llavors totes les seves derivades creuades d'ordre $\leq k$ que involucrin derivades respecte de les mateixes variables, el mateix nombre de cops, però en ordre diferent, són coincidents.

• Exemple: si $f = f(x, y, z) \in C^4$, llavors:

$$\underbrace{\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial z}} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial z \partial x \partial x} = \dots$$

↳ Usarem aquesta notació (ordenant i agrupant variables respecte les que derivem diversos cops) per representar aquestes derivades.

◦ Exemple / exercici: $f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$
 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ però
 f no és C^2 en $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Podem veure
fàcilment que
 f és C^1 en $(0,0)$.

Calculem les derivades creuades en $(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1$$

Ullavors: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \Rightarrow f$ no pot ser C^2 en $(0,0)$.

Regla de la Cadena (pel càlcul de les derivades de la Composició de funcions)

- Cas funcions Reals d'una variable

$$(g \circ f)'(a) = \frac{d}{dx} (g \circ f)(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

- Cas funcions Vàries variables / Vàries components

La fórmula anterior la podem generalitzar pel càlcul de la matriu de derivades parcials de la composició substituint arreu derivades per matrius de derivades parcials i producte en \mathbb{R} per producte de matrius:

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

Pero cal que les "dimensions" encaixin bé!

• Teorema (Regla de la Cadena)

$$f: A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

A obert, $f \in C^1(A)$

$$g: B \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

$$u = (u_1, \dots, u_m) \mapsto g(u) = (g_1(u), \dots, g_k(u))$$

B obert, $g \in C^1(B)$

• La Composició $g \circ f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{(g \circ f)(x)}$$

defineix una funció

de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ que depèn de les variables "x" de f.

• Llavors, si $a \in A$ és tal que $f(a) \in B$, és te:

$$D(g \circ f)(a)$$

matrícula $k \uparrow \binom{k}{m}$ de deriv. parcials compostes

$$= Dg(f(a))$$

matrícula $k \uparrow \binom{k}{m}$

↑
producte
matrícies

$$Df(a)$$

matrícula $m \uparrow \binom{k}{m}$

• Exemple: Calculeu la matriu Jacobiana $Dh(0,0)$ on:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) = (x^2 + \cos y, e^{x+y}, x-y),$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(u,v) = (e^u, u - \sin v),$$

i fem $h = f \circ g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (únic ordre de composició possible)

• Notem que, de fet, es pot abordar el càlcul de $Dh(0,0)$ sense usar la regla de la cadena, si bé resulta força pesat:

$$\begin{aligned} h(u,v) &= (f \circ g)(u,v) = f(g(u,v)) = f(e^u, u - \sin v) = \\ &= \left(\underbrace{e^{2u^2} + \cos(u - \sin v)}_{h_1(u,v)}, \underbrace{e^{e^u + u - \sin v}}_{h_2(u,v)}, \underbrace{e^u - u + \sin v}_{h_3(u,v)} \right) \end{aligned}$$

Lavors, podem calcular directament $Dh(0,0)$ derivant les funcions h_1, h_2, h_3 .

P. ex., $h_2(u, v) = e^{e^u + u - \sin v} \Rightarrow \frac{\partial h_2}{\partial u} = e^{e^u + u - \sin v} \cdot \{e^u \cdot 2u + 1\} \Rightarrow \frac{\partial h_2}{\partial u}(0,0) = e$

- Però justament aquesta mena de càlculs són els que volem evitar usant la regla de la cadena! De fet, com veurem més endavant la regla de la cadena ens permet calcular derivades parcials de la composició de dues funcions fims; tot en el cas en que no tinguem l'expressió concreta ("fórmula") per alguna d'aquestes funcions. Només ens cal conèixer el valor numèric de les seves matrius de derivades parcials en els punts involucrats.
- Usem ara la regla de la cadena per calcular $Dh(0,0)$.

$$h = f \circ g \Rightarrow Dh(0,0) = \underbrace{Df(g(0,0))}_{\substack{\uparrow \\ \text{matriu } 3 \times 2}} \cdot \underbrace{Dg(0,0)}_{\substack{\uparrow \\ \text{matriu } 2 \times 2}}$$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{f \circ g} \uparrow$

$$\bullet g(u, v) = (e^{u^2}, u - \sin v)$$

$$\left. \begin{array}{l} D_u g = (e^{u^2} \cdot 2u, 1) \\ D_v g = (0, -\cos v) \end{array} \right\} Dg = \begin{bmatrix} 2u e^{u^2} & 0 \\ 1 & -\cos v \end{bmatrix}, Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ D_u g & D_v g \end{matrix}$

$$\bullet f(x, y) = (x^2 + \cos y, e^{x+y}, x-y), \quad g(0,0) = (1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} D_x f = (2x, e^{x+y}, 1) \\ D_y f = (-\sin y, e^{x+y}, -1) \end{array} \right\} Df = \begin{bmatrix} 2x & -\sin y \\ e^{x+y} & e^{x+y} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, Df(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

• Finalmente:

$$Dh(0,0) = Df \underbrace{(g(0,0))}_{(1,0)} \cdot Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ e \cdot 0 + e \cdot 1 & e \cdot 0 + e \cdot (-1) \\ 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

• Que hem calcular? $h = h(u, v) = (h_1, h_2, h_3)$

$$Dh = \begin{bmatrix} D_u h_1 & D_v h_1 \\ D_u h_2 & D_v h_2 \\ D_u h_3 & D_v h_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} D_u h_1(0,0) = 0, \quad D_v h_1(0,0) = 0 \\ D_u h_2(0,0) = e, \quad D_v h_2(0,0) = -e \\ D_u h_3(0,0) = -1, \quad D_v h_3(0,0) = 1 \end{array}$$

Derivació per Components

Si el que volem calcular és una derivada parcial concreta d'alguna funció component d'una composició de funcions, usar la regla de la cadena en termes d'un producte de matrius no sol ser la millor forma de procedir. Potser és millor identificar els càlculs necessaris per obtenir aquesta derivada concreta i fer només aquests. La "derivació per components" potser és més directa de gestionar si enlloc de com una composició la pensem com de fer una nova funció a partir de la substitució de les variables de les que depen una funció donada per expressions que depenen de noves variables.

- Cas funcions d'una variable: Donada $f(x)$, definim una nova funció $g(y)$ via la substitució $x = x(y)$ "abús notacional".
Lavors: $g(y) = f(x(y)) \Rightarrow \frac{dg}{dy} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$

• Exemple: $f(x) = e^x$, $x = x(y) = y^2$, $g(y) = f(x(y)) = e^{y^2}$

• Via càlcul directe: $\frac{dg}{dy}(y) = e^{y^2} \cdot 2y$

• Via regla de la cadena:

$$g(y) = f(x(y)) \Rightarrow \frac{dg}{dy}(y) = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = e^x \cdot 2y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{substitueix } x=x(y)=y^2}}{=} e^{y^2} \cdot 2y$$

• Cas funcions n variables: La regla de la cadena fa que la fórmula que obtenim en substituir les variables "velles" per funcions de variables "noves" sigui una suma de productes de derivades.

• Exemple: sigui $f = f(u, v, w)$ una funció donada i definim una nova funció $g(x, y)$ substituint

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = w(x, y) \quad (\text{abús notació})$$

• Volem les derivades parcials de g respecte de x, y .

Travors: $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

després Cal fer les substitucions

$$u = u(x, y), v = v(x, y)$$

$$w = w(x, y)$$

• Cas Concret: $f(u, v, w) = u^2 + v^2 - w$ i substitucions =

$$u = u(x, y) = x^2 y, v = v(x, y) = y^2, w = w(x, y) = e^{-x y}$$

$$\text{obtenim: } g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y), w(x, y)) = x^4 y^2 + y^4 - e^{-x y}$$

que, si volem, podem derivar directament. Via regla cadena:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = (2u) \cdot (2xy) + (2v) \cdot (0) + (-1) \cdot (-e^{-xy}) = 4x^3 y^2 + e^{-xy} y$$

substitucions!

$$\frac{\partial g}{\partial y} = (2u) \cdot (x^2) + (2v) \cdot (2y) + (-1) \cdot (-e^{-xy} \cdot x) = 2x^4 y + 4y^3 + e^{-xy} \cdot x$$

• Exemple: Sigüin $g(s,t)$, $h(s,t)$ dues funcions verificant:

$$g(0,0) = 0, h(0,0) = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\partial g}{\partial s}(0,0) = 1, \frac{\partial g}{\partial t}(0,0) = -1, \quad \frac{\partial h}{\partial s}(0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(0,0) = 2. \text{ Si } f(x,y) = \arctan(e^x \sin y) \text{ i definim}$$

$F(s,t)$ fent les substitucions $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$,

$$\text{Calcular } \frac{\partial F}{\partial s}(0,0), \frac{\partial F}{\partial t}(0,0).$$

• Tenim:

$$F(s,t) = f(x(s,t), y(s,t)) = f(g(s,t), h(s,t))$$

• Derivant per components:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial s}$$

• Ara avaluem en $s=t=0$ i observem $x = g(0,0) = 0$,
 $y = h(0,0) = \pi/2$. Per tant:

$$\cdot F = F(s, t), \quad f = f(x, y), \quad g = g(s, t), \quad h = h(s, t), \quad s = t = 0 \\ x = 0, \quad y = \pi/2$$

$$\cdot \frac{\partial F}{\partial s}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial x}(0, \pi/2) \cdot \frac{\partial g}{\partial s}(0, 0) + \frac{\partial F}{\partial y}(0, \pi/2) \cdot \frac{\partial h}{\partial s}(0, 0)$$

$$\cdot f(x, y) = \arctan(e^x \sin y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^x \sin y}{1 + (e^x \sin y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^x \cos y}{1 + (e^x \sin y)^2}$$

$$\text{d'om } \frac{\partial F}{\partial x}(0, \pi/2) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0, \pi/2) = \frac{0}{1+1^2} = 0. \quad \text{Alíxi:}$$

$$\cdot \frac{\partial F}{\partial s}(0, 0) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

$$\cdot \text{Ídem: } \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial t},$$

$$\cdot \frac{\partial F}{\partial t}(0, 0) = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(0, \frac{\pi}{2})}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\partial g}{\partial t}(0, 0)}_{-1} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(0, \pi/2)}_0 \cdot \underbrace{\frac{\partial h}{\partial t}(0, 0)}_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

- Exemple: Direm que $f(x, y)$ és homogènia de grau $m \in \mathbb{N}$ si:

$$f(t \cdot x, t \cdot y) = t^m \cdot f(x, y), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Demostren que si $f \in C^1$ llavors $x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = m f$.

Apliquem la regla de la cadena per derivar $(*)$ respecte de t :

$$\frac{\partial}{\partial t} [f(t \cdot x, t \cdot y)] = \frac{\partial}{\partial t} [t^m \cdot f(x, y)]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t \cdot x, t \cdot y) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(t \cdot x) + \frac{\partial f}{\partial y}(t \cdot x, t \cdot y) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(t \cdot y) = m t^{m-1} \cdot f(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t \cdot x, t \cdot y) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(t \cdot x, t \cdot y) \cdot y = m t^{m-1} f(x, y)$$

Fem ara $t = 1$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot y = m f(x, y).$$

Derivades direccionals

Definició (Derivada direccional d'una funció real en un punt)

- $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (A conjunt obert)
- $a \in A$ punt; $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ vector unitari: $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = 1$

La derivada direccional de f en el punt a segons el vector \vec{v} és:

$$D_{\vec{v}}f(a) = \frac{d}{dt} [f(a + t \cdot \vec{v})]_{|t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot \vec{v}) - f(a)}{t}$$

Comentari (Derivada direccional com derivada funció 1 variable)

Un cop fixats f , a , \vec{v} , la definició de $D_{\vec{v}}f(a)$ equival a:

- Considerem la següent funció d'una variable:

$$F(t) := f(a + t \cdot \vec{v}) = f(a_1 + t \cdot v_1, \dots, a_j + t \cdot v_j, \dots, a_n + t \cdot v_n)$$

- Llavors: $D_{\vec{v}}f(a) = F'(0)$.

Comentari (Relacio derivades parcials i derivades direccionals)

Les derivades parcials són un cas particular derivades direccionals: Si

$\vec{v} = \vec{e}_j = (0, \dots, \overset{(j)}{1}, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, j -èssim vector base natural \mathbb{R}^n , tenim

$$D_{\vec{e}_j} f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})$$

Exemple (Càlcul via definició de les derivades direccionals)

Derivades direccionals en $(0, 0)$ segons el vector unitari $\vec{v} = (v_1, v_2)$

de la funció $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Via la definició:

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t \cdot \vec{v}) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cdot v_1, t \cdot v_2) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{(t \cdot v_1)^3 - (t \cdot v_2)^3}{(t \cdot v_1)^2 + (t \cdot v_2)^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{v_1^3 - v_2^3}{v_1^2 + v_2^2}}{1} = \frac{v_1^3 - v_2^3}{v_1^2 + v_2^2} = v_1^3 - v_2^3. \end{aligned}$$

Comentari

- *La definició de derivada direccional només l'usarem en aquells punts on la funció presenti alguna "patologia" (com el $(0,0)$ en l'exemple anterior), anàlogament al que ja hem fet per calcular de les derivades parcials d'una funció via la seva definició.*
- *Per calcular derivades direccionals en aquells punts on la funció és C^1 usarem la **fórmula del gradient** que introduïm tot seguit.*
- *Si re-calculem les derivades direccionals en el $(0,0)$ de l'exemple anterior via la fórmula del gradient, obtenim $D_{\vec{v}}f(0,0) = v_1 - v_2$. Com aquest resultat difereix de l'obtingut via la definició (que és el correcte!), aquesta funció no pot ser C^1 en $(0,0)$.*
- *També podem introduir les **derivades d'una funció en un punt respecte d'un vector** per vectors \vec{v} de longitud qualsevol. En aquest cas, la fórmula del gradient val igualment. Però nosaltres només tractem el cas de **derivades direccionals** en que \vec{v} ha de ser unitari.*

Definition (Gradient d'una funció de n variables en un punt)

$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, A obert, $a \in A$.

El vector gradient de f en a és el seu vector de derivades parcials:

$$\text{grad } f(a) = \nabla f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

(Sempre que existeixin totes les derivades parcials en el punt a .)

Proposició (Fórmula del gradient)

Suposem $f \in \mathcal{C}^1(A)$. Llavors, si $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ vector unitari:

$$D_{\vec{v}}f(a) = \langle \text{grad } f(a), \vec{v} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot v_n$$

(Això és: la derivada direccional $D_{\vec{v}}f(a)$ la podem calcular com el producte escalar del vector gradient pel vector \vec{v} .)

Exemple (Derivada direccional (I) (continuació))

$$f(x, y) = x^y = (e^{\ln x})^y = e^{y \ln x}, \quad a = (e, 1), \quad \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y \ln x} \cdot \frac{y}{x} = y \cdot x^{y-1} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y \ln x} \cdot \ln x = x^y \ln x$$

$$\text{grad } f(e, 1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(e, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(e, 1) \right) = (1, e)$$

Llavors:

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(e, 1) &= \langle \text{grad } f(e, 1), \vec{v} \rangle \\ &= \left\langle (1, e), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle \\ &= 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + e \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1 - e}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Exemple (Derivada direccional (II))

$$f(x, y, z) = x^2 e^{-yz}, \quad a = (1, 0, 0), \quad \vec{v} = \left(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-yz}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 ze^{-yz}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -x^2 ye^{-yz}$$

$$\text{grad } f(1, 0, 0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, 0), \frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 0) \right) = (2, 0, 0)$$

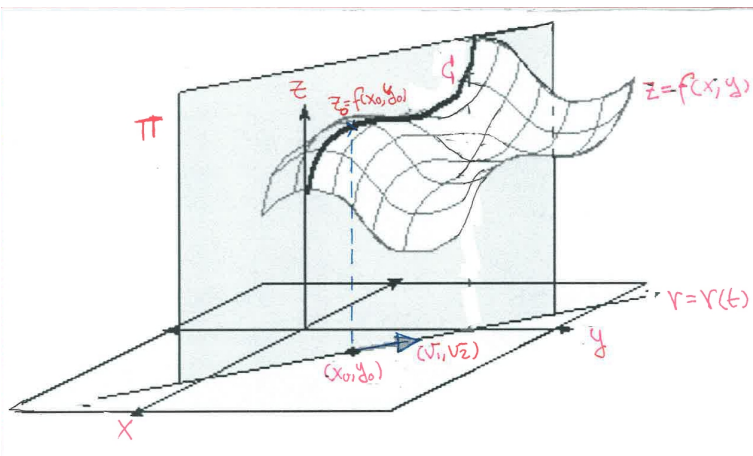
Llavors:

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(1, 0, 0) &= \langle \text{grad } f(1, 0, 0), \vec{v} \rangle \\ &= \left\langle (2, 0, 0), \left(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right) \right\rangle \\ &= 2 \cdot 1/\sqrt{3} + 0 \cdot (-1/\sqrt{3}) + 0 \cdot (1/\sqrt{3}) \\ &= 2/\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Comentari (Interpretació geomètrica deriv. direccionals $n = 2$)

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in A$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ *vector unitari*
 $(x, y) \mapsto z = f(x, y)$

- $\text{graf}(f) = \{z = f(x, y)\} \equiv$ *Gràfica de f (Superfície en el pla $x y z$).*
- $r = r(t) = (x_0 + t \cdot v_1, y_0 + t \cdot v_2) \equiv$ *Recta en el pla $x y$ que passa per (x_0, y_0) i té vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$.*
- $\Pi \equiv$ *Pla “vertical” determinat per la recta r i la direcció z .*
- $C = \text{graf}(f) \cap \Pi \equiv$ *Secció de la gràfica de f amb el pla Π que defineix una corba que correspon a la gràfica de la funció (d’una variable) $F(t) = f(x_0 + t \cdot v_1, y_0 + t \cdot v_2)$.*
- $F'(0) = D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) \equiv$ *Valor de la pendent de la gràfica de la funció $F(t)$ en $t = 0$, això és, valor de la pendent de la gràfica de $f(x, y)$ en el punt (x_0, y_0) i en la direcció del vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$.*
- *Recordem: La “pendent matemàtica” ens dóna l’angle format pel vector tangent a la gràfica amb la direcció horitzontal.*



Suposem que una formiga camina sobre la superfície determinada per la gràfica de la funció f . Si en un moment donat és en el punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) , on $z_0 = f(x_0, y_0)$, i decideix desplaçar-se en la direcció determinada pel vector pla $\vec{v} = (v_1, v_2)$, llavors la pendent a la que s'enfonsa és la donada per la derivada direccional $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$.

Proposició (Derivades direccionals màximes / mínimes)

$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A obert, $f \in C^1(A)$, $a \in A$, $\text{grad } f(a) \neq \vec{0}$, i :

$$\vec{u} = \frac{\text{grad } f(a)}{\|\text{grad } f(a)\|} \quad (\text{vector gradient normalitzat})$$

- El vector \vec{u} és el vector que fa **màxim** el valor de la derivada direccional $D_{\vec{v}}f(a)$ entre tots els vectors unitaris $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. A més:

$$D_{\vec{u}}f(a) = \|\text{grad } f(a)\| \quad \text{“derivada direccional màxima”}$$

- El vector $-\vec{u}$ és el vector que fa **mínim** el valor de la derivada direccional $D_{\vec{v}}f(a)$ entre tots els vectors unitaris $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. A més:

$$D_{-\vec{u}}f(a) = -\|\text{grad } f(a)\| \quad \text{“derivada direccional mínima”}$$

Demostració (Derivades direccionals màximes / mínimes)

Surt de la fórmula del gradient i la relació entre el producte escalar de dos vectors i el cosinus de l'angle que formen:

$$D_{\vec{v}}f(\mathbf{a}) = \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \vec{v} \rangle = \|\text{grad } f(\mathbf{a})\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = \|\text{grad } f(\mathbf{a})\| \cdot \cos \theta$$

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n \equiv$ Vector unitari; $\theta \equiv$ Angle format pels vectors \vec{v} i $\text{grad } f(\mathbf{a})$.

- $\theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1$ (valor màx. cosinus) \Rightarrow deriv. direc. màx.
- $\theta = \pi \Rightarrow \cos \theta = -1$ (valor mín. cosinus) \Rightarrow deriv. direc. mín.

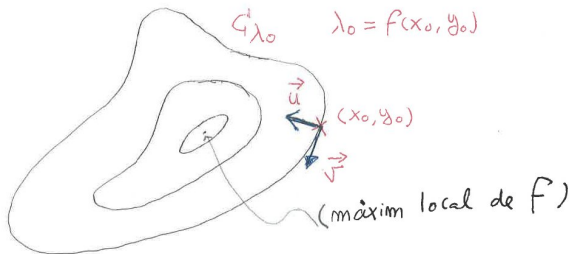
Proposició (Direcció perpendicular a les corbes de nivell)

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A obert, $f \in \mathcal{C}^1(A)$, $(x_0, y_0) \in A$, $\lambda_0 = f(x_0, y_0)$,

$C_{\lambda_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \lambda_0\}$

(C_{λ_0} és la corba nivell de f pel punt (x_0, y_0))

- Si $\text{grad } f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, llavors el vector $\text{grad } f(x_0, y_0)$ és **perpendicular** a la corba de nivell C_{λ_0} en el punt (x_0, y_0) .



Demostració (Direcció perpendicular a les corbes de nivell)

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ vector unitari perpendicular a $\text{grad } f(x_0, y_0)$ (n'hi ha dos!).

⇓

$$D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = \langle \text{grad } f(x_0, y_0), \vec{v} \rangle = 0$$

⇓

En la direcció del vector \vec{v} la pendent de la funció f és nul·la \implies
 f "es manté constant" si ens movem en la direcció del vector \vec{v}

⇓

\vec{v} és un vector tangent a la corba de nivell C_{λ_0} en el punt (x_0, y_0)

⇓

$\text{grad } f(x_0, y_0)$ és perpendicular a C_{λ_0} en el punt (x_0, y_0)

Exemple (Derivades direccionals màximes, mínimes i zero)

$$f(x, y) = x^y, \quad (x_0, y_0) = (e, 1), \quad f(e, 1) = e, \quad \text{grad } f(e, 1) = (1, e)$$

$$\vec{u} = \frac{\text{grad } f(e, 1)}{\|\text{grad } f(e, 1)\|} = \frac{(1, e)}{\sqrt{1 + e^2}} \quad (\text{vector gradient normalitzat})$$

- \vec{u} dóna la direcció de màxima pendent de $f(x, y)$ en el punt $(x_0, y_0) = (e, 1)$ i el valor de la pendent màxima és $\sqrt{1 + e^2}$.
- $-\vec{u}$ dóna la direcció de mínima pendent de $f(x, y)$ en el punt $(x_0, y_0) = (e, 1)$ i el valor de la pendent mínima és $-\sqrt{1 + e^2}$.
- \vec{u} és un vector perpendicular a la corba de nivell C_e en el punt $(x_0, y_0) = (e, 1)$.
- $\vec{v} = \frac{(e, -1)}{\sqrt{1 + e^2}}$ vector unitari tangent a la corba de nivell C_e en el punt $(x_0, y_0) = (e, 1)$.

Comentari (Derivades direccionals i mapes de corbes de nivell)

El perfil d'una certa muntanya ve donat per la gràfica $z = f(x, y)$.

Les coordenades (x, y) "viuen" al nivell del mar i donen la seva "base".

Un escalador és en el punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) , $z_0 = f(x_0, y_0)$.

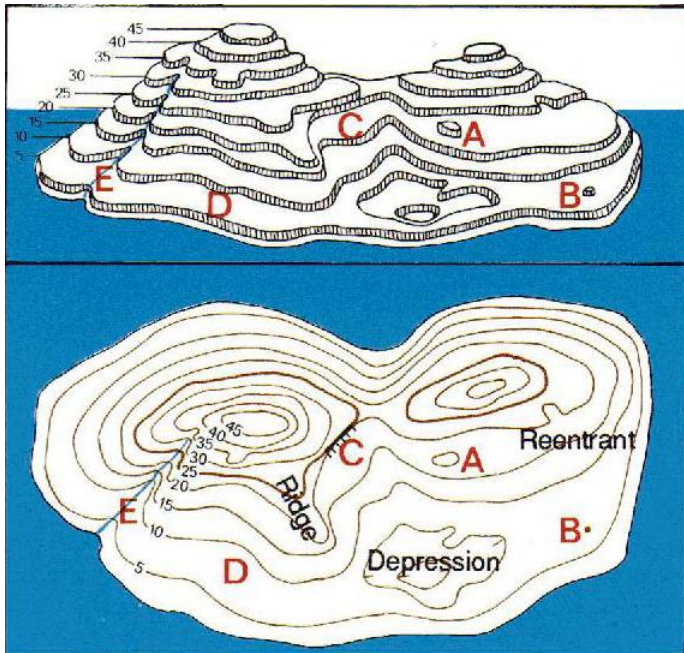
Per desplaçar-se usa un mapa de corbes de nivell de f .

Per tant, s'orienta segons la direcció de vectors en el pla (x, y) .

Si, des del punt on es troba, l'escalador vol...

- *... pujar el més ràpidament possible: ha de triar la direcció i sentit del vector gradient de f en (x_0, y_0) . En el mapa correspon a la direcció en la qual les corbes de nivell s'apreten més.*
- *... baixar el més ràpidament possible: ha de triar la direcció del vector gradient de f en (x_0, y_0) , però en sentit contrari al vector.*
- *... vorejar la muntanya seguint un recorregut que el mantingui a altura constant, sense pujar ni baixar: ha de seguir una de les direccions perpendiculars al vector gradient de f en (x_0, y_0) .*

Si l'escalador fa el cim, llavors el vector gradient és nul: no hi ha cap direcció de pujada passant pel cim. Ídem si és al fons d'una vall.



Exemple (Perfil muntanya (I))

El perfil d'una certa muntanya es modela mitjançant la funció:

$$h(x, y) = 5000 - 0.01 x^2 - 0.02 y^2 \quad (\text{unitats en metres}),$$

on, si (x, y) és un punt del pla imaginari (al nivell del mar) que defineix la base de la muntanya, llavors $z = h(x, y)$ ens dona la corresponent alçada. Suposem que un muntanyer es troba en el punt determinat per les coordenades $(x, y) = (10, 10)$ de la base. La seva altura actual és $z = h(10, 10) = 4997$ i, per tant, en ser l'altura de la muntanya 5000 m, el muntanyer és apunt de fer el cim. Suposem que el muntanyer tria la seva direcció de moviment en termes d'un mapa (en el pla $x y$) de corbes de nivell de la funció h . Per tant, el seu moviment queda determinat per la tria d'un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ unitari en aquest pla.

❶ Quina pendent afronta si es mou en la direcció d'un cert vector \vec{v} ?

$$D_x h = -0.02 x, \quad D_y h = -0.04 y, \quad \text{grad } h(10, 10) = 2 \cdot 10^{-1} (-1, -2).$$

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} h(10, 10) &= \langle \text{grad } h(10, 10), \vec{v} \rangle = -2 \cdot 10^{-1} \cdot \langle (1, 2), (v_1, v_2) \rangle \\ &= -2 \cdot 10^{-1} (v_1 + 2 v_2). \end{aligned}$$

Exemple (Perfil muntanya (II))

- 2 Quin pendent afrontem d'entrada si la direcció inicial de moviment és la donada pel vector $\vec{v} = \frac{(-1, -1)}{\sqrt{2}}$ apuntant cap al cim?

$$D_{\vec{v}}h(10, 10) = -2 \cdot 10^{-1} (v_1 + 2v_2) = -2 \cdot 10^{-1} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

- 3 Si el que volem és pujar el més ràpidament possible digueu quina és la direcció \vec{v} en la que ens hem de moure inicialment?
El natural és triar la direcció de màxim pendent en el punt (10, 10) en que ens trobem, donada pel vector gradient normalitzat.

$$\begin{aligned} \text{grad } h(10, 10) &= -2 \cdot 10^{-1} (1, 2), \\ \vec{v} &= \frac{\text{grad } h(10, 10)}{\|\text{grad } h(10, 10)\|} = -\frac{(1, 2)}{\|(1, 2)\|} = -\frac{(1, 2)}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

La pendent que afrontem inicialment si triem la direcció de màxim pendent és: $D_{\vec{v}}h(10, 10) = \|\text{grad } h(10, 10)\| = 2 \cdot 10^{-1} \cdot \sqrt{5}$.

Exemple (Perfil muntanya (III))

- 4 Quina direcció inicial $\vec{v} = (v_1, v_2)$ hem de triar si volem que el pendent inicial sigui del 40%?

Volem $\vec{v} = (v_1, v_2)$ unitari t.q. $D_{\vec{v}}h(10, 10) = \frac{40}{100} = 4 \cdot 10^{-1}$. Cal:

$$4 \cdot 10^{-1} = D_{\vec{v}}h(10, 10) = -2 \cdot 10^{-1} (v_1 + 2v_2) \implies \boxed{v_1 + 2v_2 = -2},$$

i, a més, $\|\vec{v}\| = 1 \implies \boxed{v_1^2 + v_2^2 = 1}$. Fent $\boxed{v_1 = -(2 + 2v_2)}$:

$$1 = v_1^2 + v_2^2 = (2 + 2v_2)^2 + v_2^2 = 4 + 8v_2 + 5v_2^2 \implies \boxed{5v_2^2 + 8v_2 + 3 = 0}.$$

Obtenim dues solucions: $\vec{v} = -\frac{(4, 3)}{5}$, $\vec{v} = (0, -1)$. En efecte:

$$v_2 = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{10} = \frac{-8 \pm 2}{10} = \begin{cases} \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \implies v_1 = -\frac{4}{5}, \\ \frac{-10}{10} = -1 \implies v_1 = 0. \end{cases}$$

Exemple (Perfil muntanya (IV))

- 5 Quina direcció inicial $\vec{v} = (v_1, v_2)$ cal triar si volem “circumval·lar” la muntanya, i. e., mantenir l’altura inicial sense pujar ni baixar?
- Cal triar \vec{v} paral·lel a la corba de nivell $C_{h(10,10)} = C_{4997}$ de $h(x, y)$ que passa pel punt $(x, y) = (10, 10)$ en que ens trobem. (Les corbes de nivell de $h(x, y)$ són el·lipse centrades en $(0, 0)$.)
 - El vector gradient $\text{grad} h(10, 10) = -2 \cdot 10^{-1} \cdot (1, 2)$ defineix un vector perpendicular a C_{4997} en $(10, 10)$.
 - Les dues direccions donades pels vectors unitaris ortogonals a $\text{grad} h(10, 10)$ són doncs paral·leles a C_{4997} en $(10, 10)$.
 - Si normalitzem el vector gradient, obtenim el vector $\frac{(-1, -2)}{\sqrt{5}}$.
- Per tant, les dues direccions buscades són:

$$\vec{v} = \frac{(2, -1)}{\sqrt{5}} \quad i \quad \vec{v} = \frac{(-2, 1)}{\sqrt{5}}$$

Fórmula de Taylor funcions 1 variable

El polinomi de Taylor de grau k de $f(x)$ en el punt $x = a$ és:

$$P_k(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k.$$

Llavors és té:

$$f(x) = P_k(x) + R_k(x),$$

on el tamany del residu del desenvolupament de Taylor, $R_k(x)$, tendeix a zero quan $x \rightarrow a$ més ràpidament que no pas $(x - a)^k$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_k(x)}{(x - a)^k} = 0.$$

Podem interpretar $R_k(x)$ com els termes de grau $k + 1$ i superior de $f(x)$ si expressem la funció com a suma de potències de $x - a$.

En particular, l'aproximació lineal de $f(x)$ entorn del punt $x = a$ és:

$$f(x) \approx P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Fórmula de Taylor funcions 2 variables

$$f(x, y) = P_k(x, y) + R_k(x, y)$$

- $P_k(x, y) \equiv$ Polinomi de Taylor de grau k de f en (x_0, y_0) .
- $R_k(x, y) \equiv$ Residu del desenvolupament de Taylor.
El podem interpretar com els termes de grau $k + 1$ i superior de $f(x, y)$ si l'expresssem com a suma de potències de $x - x_0$ i $y - y_0$.
- Propietat bàsica del residu pel càlcul de límits:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{R_k(x, y)}{\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)^k} = 0.$$

En el cas particular $(x_0, y_0) = (0, 0)$ diu:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{R_k(x, y)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^k} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{R_k(x, y)}{(x^2 + y^2)^{k/2}} = 0.$$

Aproximació lineal per $n = 2$

L'aproximació lineal de $f(x, y)$ entorn del punt (x_0, y_0) és:

$$f(x, y) \approx P_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Exemple

R resistència total equivalent a dues resistències R_1, R_2 en paral·lel:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \implies R = f(R_1, R_2) := \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Per tant: $\frac{\partial f}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}$. Si, inicialment $(R_1, R_2) = a = (10, 15)$ (en Ohms), i fem petites variacions $\Delta R_1, \Delta R_2$ de R_1, R_2 , l'aproximació lineal de f ens permet aproximar el valor de R :

$$\begin{aligned} R = f(10 + \Delta R_1, 15 + \Delta R_2) &\approx f(a) + \frac{\partial f}{\partial R_1}(a) \Delta R_1 + \frac{\partial f}{\partial R_2}(a) \Delta R_2 \\ &= 6 + \frac{9}{25} \Delta R_1 + \frac{4}{25} \Delta R_2. \end{aligned}$$

Polinomi de Taylor de grau 3 de $f(x, y)$ en (x_0, y_0)

$$\begin{aligned}P_3(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\&+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 \right. \\&\quad + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0) \\&\quad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 \right) \\&+ \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^3 \right. \\&\quad + 3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 (y - y_0) \\&\quad + 3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0)^2 \\&\quad \left. + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^3 \right).\end{aligned}$$

Exemple (Taylor de $f(x, y) = e^{x+y} \cos y$ en $(x_0, y_0) = (0, \pi/2)$)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} \cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y}(\cos y - \sin y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x+y} \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{x+y}(\cos y - \sin y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2e^{x+y} \sin y,$$

$$f(0, \pi/2) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, \pi/2) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, \pi/2) = -e^{\pi/2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \pi/2) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, \pi/2) = -e^{\pi/2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, \pi/2) = -2e^{\pi/2}$$

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= 0 + 0 \cdot (x - 0) - e^{\pi/2}(y - \pi/2) + \frac{1}{2!} \left(0 \cdot (x - 0)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot (-e^{\pi/2}) \cdot (x - 0)(y - \pi/2) + (-2e^{\pi/2})(y - \pi/2)^2 \right) \\ &= -e^{\pi/2}(y - \pi/2) - e^{\pi/2}x(y - \pi/2) - e^{\pi/2}(y - \pi/2)^2 \end{aligned}$$

Polinomi de Taylor de grau k de $f(x, y)$ en (x_0, y_0)

$$\underbrace{\text{Polinomi grau } k}_{P_k(x, y)} = \underbrace{\text{Polinomi grau } k - 1}_{P_{k-1}(x, y)} + \underbrace{\sum_{j=0}^k \frac{1}{(k-j)! j!} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^{k-j} \cdot (y - y_0)^j}_{\text{Termes grau } k \text{ del polinomi de Taylor}}$$

Termes grau k del polinomi de Taylor: suma de totes les derivades parcials k -èsimes de f avaluades en (x_0, y_0) : cada valor de j indica el nombre de cops que derivem respecte de y , mentres que $k - j$ és el nombre de cops que derivem respecte de x . Cada derivada del sumatori és divideix per $(k - j)!$ i per $j!$, i és multiplica per $(x - x_0)^{k-j} \cdot (y - y_0)^j$.

Desenvolupaments de Taylor d'una variable bàsics

$$① e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$② \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$③ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$④ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$⑤ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$⑥ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \cdot x^3 + \dots$$

$$⑦ \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Exemple (Taylor $f(x, y) = e^{x+y} \cos y$ en $(0, 0)$ per generació)

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \mathcal{O}_5(z)$$

(Notació: $\mathcal{O}_5(z) \equiv$ termes de grau 5 i superior en potències de z .)

$$\begin{aligned} f &= \left[1 + x + y + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \frac{(x+y)^4}{4!} + \mathcal{O}_5(x, y) \right] \times \\ &\quad \left[1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \mathcal{O}_6(y) \right] \\ &= \underbrace{1}_{\text{grau 0}} + \underbrace{x + y}_{\text{grau 1}} + \underbrace{\frac{(x+y)^2}{2} - \frac{y^2}{2}}_{\text{grau 2}} + \underbrace{\frac{(x+y)^3}{6} - (x+y)\frac{y^2}{2}}_{\text{grau 3}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{y^4}{24} - \frac{y^2(x+y)^2}{4} + \frac{(x+y)^4}{24}}_{\text{grau 4}} + \mathcal{O}_5(x, y) = 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + xy \\ &\quad + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2y}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3y}{6} - \frac{xy^3}{3} - \frac{y^4}{6} + \mathcal{O}_5(x, y). \end{aligned}$$

Exemple (Taylor $f(x, y) = e^{x+y} \cos y$ en $(0, 0)$ (continuació))

Quant val la derivada parcial $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(0, 0)$?

Fórmula general: $\text{coef}(x^{k-j} \cdot y^j) = \frac{1}{(k-j)!j!} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{y^4}{24} - \frac{y^2(x+y)^2}{4} + \frac{(x+y)^4}{24} &= \frac{y^4}{24} - \frac{y^2(x^2 + 2xy + y^2)}{4} \\ &\quad + \frac{x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4}{24} \\ &= \left(-\frac{2}{4} + \frac{4}{24} \right) xy^3 + \dots = -\frac{1}{3}xy^3 + \dots \end{aligned}$$

Fem $k = 4$, $j = 3$ i $k - j = 1$. Obtenim:

$$-\frac{1}{3} = \text{coef}(x \cdot y^3) = \frac{1}{1!3!} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(0, 0) \implies \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(0, 0) = -\frac{1!3!}{3} = -2.$$

Fórmula del binomi de Newton

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \binom{m}{2} a^{m-2} b^2 + \dots + \binom{m}{n} a^{m-n} b^n + \dots + b^m$$

On el nombre combinatori m sobre n és defineix com:
 j termes

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{\overbrace{m(m-1)\cdots(m-n+1)}^{j \text{ termes}}}{n!} = \binom{m}{m-n}$$

Exemple (Nombres combinatoris)

$$\binom{7}{0} = \binom{7}{7} = 1, \quad \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35 = \binom{7}{4}.$$

Exemple (Binomi Newton)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Exemple (Taylor $f(x, y) = e^{x+y} \cos y$ en $(0, 0)$ (fi))

Calculeu:

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y} \cos y - 1 - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Hem vist:

$$f(x, y) = P_1(x, y) + R_1(x, y) = 1 + x + y + R_1(x, y)$$

Llavors:

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{P_1(x, y) - 1 - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{= 0 \text{ per fórmula } P_1(x, y)} + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{R_1(x, y)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^1}}_{= 0 \text{ per propietat residu } R_1(x, y)} = 0.$$

Fórmula de Taylor funcions n variables en $a \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = P_k(x) + R_k(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$P_k(x)$ i $R_k(x)$ són el polinomi de Taylor de grau k de f en el punt $a = (a_1, \dots, a_n)$ i el residu del desenvolupament, complint:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_k(x)}{\|x - x_0\|^k} = 0.$$

$P_k(x)$ és la suma dels monomis $(x_1 - a_1)^{m_1} \dots (x_n - a_n)^{m_n}$ de grau $m = m_1 + \dots + m_n$ menor o igual que k , multiplicant cadascun d'ells per un coeficient definit en termes de les derivades parcials de f en el punt a :

$$\text{coef}((x_1 - a_1)^{m_1} \dots (x_n - a_n)^{m_n}) = \frac{1}{m_1! \dots m_n!} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}(a).$$

Exemple: Polinomi de Taylor per generació en $(0,0)$ fins grau 3

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + O_3(z) \Rightarrow e^{xy} = 1 + xy + O_4(x, y)$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + O_4(z) \Rightarrow \ln(1+x+y) = x+y - \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{3} + O_4(x, y)$$

Llavors:

$$f(x, y) = e^{xy} \cdot \ln(1+x+y) =$$

$$= \left\{ 1 + xy + O_4(x, y) \right\} \cdot \left\{ x+y - \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{3} + O_4(x, y) \right\}$$

$$= x+y - \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{3} + xy(x+y) + O_4(x, y)$$

$$= x+y - \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + x^2y + xy^2 + O_4(x, y)$$

$$= x+y - \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + O_4(x, y)$$

$P_3(x, y)$

Exemple: Polinomi de Taylor per generació en $(0,0,0)$ fins a grau 2

$$e^W = 1 + W + \frac{W^2}{2!} + O_3(W) \Rightarrow e^{X+Y} = 1 + X + Y + \frac{(X+Y)^2}{2} + O_3(X, Y)$$

$$\cos W = 1 - \frac{W^2}{2!} + O_4(W) \Rightarrow \cos(X+Y+Z) = 1 - \frac{(X+Y+Z)^2}{2} + O_4(X, Y, Z)$$

$$\sqrt{1+X} = (1+X)^{\frac{1}{2}} \underset{(\alpha=1/2)}{=} (1+X)^\alpha = 1 + \alpha X + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} X^2 + O_3(X) = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + O_3(X)$$

\uparrow $(\alpha=1/2)$ \uparrow $(\alpha=1/2)$

Per tant:

$$\begin{aligned} f(X, Y, Z) &= e^{X+Y} \sqrt{1+X} \cos(X+Y+Z) \\ &= \left\{ 1 + X + Y + \frac{(X+Y)^2}{2} + O_3(X, Y) \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + O_3(X) \right\} \cdot \left\{ 1 - \frac{(X+Y+Z)^2}{2} + O_4(X, Y, Z) \right\} \\ &= \left\{ 1 + \frac{3}{2}X + Y - \frac{(X+Y)^2}{8} + \frac{1}{2}X(X+Y) + \frac{(X+Y)^2}{2} + O_3(X, Y) \right\} \cdot \left\{ 1 - \frac{(X+Y+Z)^2}{2} + O_4(X, Y, Z) \right\} \\ &= 1 + \frac{3}{2}X + Y - \frac{(X+Y+Z)^2}{2} - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{2}X(X+Y) + \frac{(X+Y)^2}{2} + O_3(X, Y, Z) \\ &= 1 + \frac{3}{2}X + Y - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY + 2XZ + 2YZ) - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{2}(X^2 + XY) + \frac{(X^2 + 2XY + Y^2)}{2} + O_3(X, Y, Z) \end{aligned}$$

Finalment:

$$f(x, y, z) = 1 + \frac{3}{2}x + y + \frac{3}{8}x^2 - \frac{z^2}{2} + \frac{xy}{2} - xz - yz + O_3(x, y, z)$$

$P_2(x, y, z)$

Ara, és fàcil calcular totes les derivades segones de f en el $(0,0)$:

$$\text{coef}(x^2) = \frac{3}{8} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 3/4$$

$$\text{coef}(z^2) = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,0,0) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,0,0) = -1$$

$$\text{coef}(xy) = \frac{1}{2} = \frac{1}{1!1!} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,0) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,0) = 1/2$$

$$\text{coef}(xz) = -1 = \frac{1}{1!1!} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0,0) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0,0) = -1$$

$$\text{coef}(yz) = -1 = \frac{1}{1!1!} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,0,0) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,0,0) = -1$$

El reste de derivades segones són zero: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0,0) = 0$.

• Exemple: Polinomi de Taylor de grau 10 de $f(x, y, z) = e^{xy} \sin(xz)$ en $(0, 0, 0)$.

$$\left\{ e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \frac{w^4}{4!} + \frac{w^5}{5!} + O_5(w) \text{ ; fem } w = xy \right.$$

$$\left\{ \sin(w) = w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} + O_6(w) \text{ ; fem } w = xz \right.$$

$$f = \left\{ 1 + xy + \frac{(xy)^2}{2} + \frac{(xy)^3}{3!} + \frac{(xy)^4}{4!} + \frac{(xy)^5}{5!} + O_{12}(x, y) \right\} \cdot \left\{ xz - \frac{(xz)^3}{3!} + \frac{(xz)^5}{5!} + O_{12}(x, z) \right\}$$

$$= \underbrace{xz}_{\text{grau 2}} + \underbrace{\{(xy)(xz)\}}_{\text{grau 4}} + \underbrace{\left\{ -\frac{(xz)^3}{3!} + \frac{(xy)^2}{2} \cdot xz \right\}}_{\text{grau 6}} + \underbrace{\left\{ (xy) \left(-\frac{(xz)^3}{3!} \right) + \frac{(xy)^3}{3!} \cdot (xz) \right\}}_{\text{grau 8}} +$$

$$+ \left\{ \frac{(xz)^5}{5!} + \frac{(xy)^2}{2} \left(-\frac{(xz)^3}{3!} \right) + \frac{(xy)^4}{4!} \cdot (xz) \right\} + O_{12}(x, y, z)$$

$$= xz + x^2 y z = \frac{x^3 z^3}{6} + \frac{x^3 y^2 z}{2} - \frac{x^4 y z^3}{6} + \frac{x^4 y^3 z}{6} + \frac{x^5 z^5}{120} - \frac{x^5 y^2 z^3}{12} + \frac{x^5 y^4 z}{24} + O_{12}(x, y, z)$$

Calculem, p. ex.:

$$\text{coef}(x^5 y^2 z^3) = -\frac{1}{12} = \frac{1}{5! 2! 3!} \frac{\partial^{10} f}{\partial x^5 \partial y^2 \partial z^3} (0, 0, 0) \Rightarrow \frac{\partial^{10} f}{\partial x^5 \partial y^2 \partial z^3} (0, 0, 0) = -\frac{5! 2! 3!}{12} = -5! = -120.$$

• Exemple: Troben $\lambda \in \mathbb{R}$ per tal que el límit L existeix; i calculeu L .

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} \cos(x+y) - 1 + \lambda x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

• El denominador és $(x^2 + y^2) = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \Rightarrow$ Hem de desenvolupar per Taylor el numerador en el $(0,0)$ fins grau 2 i usar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{R_2(x,y)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = 0$

on $R_2(x,y)$ és el residu del desenvolupament de Taylor fins grau 2

$$\begin{aligned} e^{xy} \cos(x+y) &= \left\{ 1 + xy + O_4(x,y) \right\} \cdot \left\{ 1 - \frac{(x+y)^2}{2!} + O_4(x,y) \right\} = \\ &= 1 + xy - \frac{(x+y)^2}{2} + R_2(x,y) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + R_2(x,y). \end{aligned}$$

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\lambda - 1/2)x^2 + \frac{1}{2}y^2}{x^2 + y^2} + \underbrace{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{R_2(x,y)}{x^2 + y^2}}_{=0}$$

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(\lambda - \frac{1}{2})x^2 + \frac{1}{2}y^2}{x^2 + y^2}$$

• observem que $\nexists \lim_{(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ ni $\nexists \lim_{(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2}$ (Ho poden venir

veient que el límit sobre rectes en $(0,0)$ depèn de la recta triada).

• Per tant si volem que existeixi L cal que el denominador x^2+y^2 es compensi amb els x^2, y^2 del numerador. Això és

possible si $\lambda - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1}$

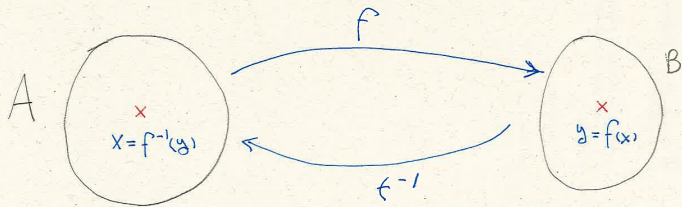
• Llavors: $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Teorema de la funció inversa

- Si $f: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ és una funció injectiva en el conjunt A , llavors ja hem comentat que f admet una funció inversa $f^{-1}: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow A$, on $B = f(A)$ (la imatge del conjunt A per f). La funció inversa f^{-1}

Compleix: $f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A$.

$$f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in B$$



- Veure si una funció de $n > 1$ variables és injectiva en un conjunt és, en general, inabordable.
- Encara que arribem a veure que f és injectiva en A , donar una fórmula explícita per f^{-1} és, en general, impossible (fins i tot pel cas de funcions de $n = 1$ variable).
- En general, ens conformem en poder contestar la pregunta de si f admet inversa local de fímita entorn d'un punt concret donat i en poder calcular les derivades d'aquesta funció inversa en aquest punt. Així és el que ens dona el teorema de la funció inversa.
- Donar fórmules explícites per la funció inversa ho deixem només per exemples concrets on els càlculs siguin abordables.

• Teorema de la funció inversa per funcions d'1 variable

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^1, \quad c \in (a, b)$$
$$x \mapsto f(x)$$

Lavors, si $f'(c) \neq 0$ la funció f és localment invertible entorn del punt c . Això és, existeix f^{-1} inversa local de f , definida en un entorn del punt $f(c)$ i complint:

$$f^{-1}(f(c)) = c \quad \text{i} \quad (f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$

• Exemple: $f(x) = xe^x$, $c = 1$, $f(1) = e$, $f'(x) = e^x(x+1)$, $f'(1) = 2e$

Lavors: $f'(1) = 2e \neq 0 \Rightarrow \exists f^{-1}$ inversa local de f definida entorn del punt $f(1) = e$, complint: $f^{-1}(e) = 1$ i $(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2e}$

• Teorema funció inversa (Per funcions de n variables)

$$f: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f \in C^k(A), \quad a \in A \text{ (punt fixat)}$$
$$x \mapsto f(x)$$

Si $\det(Df(a)) \neq 0 \Rightarrow f$ és localment invertible en el punt a

(determinant
matriu jacobiana
en el punt a)

$\Rightarrow \exists f^{-1}$ inversa local de f definida entorn
del punt $f(a)$ i complint $f^{-1}(f(a)) = a$

A més, aquesta inversa local també és C^k i podem calcular
la seva matriu de derivades parcials en $f(a)$ fent:

$$DF^{-1}(f(a)) = (Df(a))^{-1}$$

matriu jacobiana
de f^{-1} en $f(a)$

inversa matriu
jacobiana f en a

- Exemple: Considerem la funció $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ següent:

$$f(x, y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$$

(1) Vegem que podem aplicar el t^a de la funció inversa a f en el punt $a = (0, 0)$ i calculeu $Df^{-1}(2, 0)$.

• observem que $f(a) = f(0, 0) = (2, 0)$. Per tant, si podem aplicar el t^a de la inversa a f en a , llavors $f^{-1}(f(a)) = a$ ens diu que $f^{-1}(2, 0) = (0, 0)$.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} D_x f &= (e^x, e^x) \\ D_y f &= (e^y, -e^y) \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} D_x f(0, 0) &= (1, 1) \\ D_y f(0, 0) &= (1, -1) \end{aligned} \right\} Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

\uparrow $D_x f(0, 0)$ \downarrow $D_y f(0, 0)$

• $\det(Df(0, 0)) = -2 \neq 0 \Rightarrow$ Si podem aplicar el t^a inverse a f en $a = (0, 0)$.

Finalment:

$$Df^{-1}(2, 0) = (Df(0, 0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

• observacions: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

(2) Vegem que f admet inversa (local) f^{-1} definida entorn del punt $(2e, 0)$ i calculen $Df^{-1}(2e, 0)$

• Hem d'aplicar el t^e de la inversa a un punt $a = (x, y)$ t.q.

$f(a) = (2e, 0)$. Així vol dir:

$$f(x, y) = (e^x + e^y, e^x - e^y) = (2e, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x + e^y = 2e \\ e^x - e^y = 0 \end{cases}$$

• La 2a equació diu: $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

• La 1a equació diu doncs: $2e^x = 2e \Leftrightarrow x = 1$ } $\Rightarrow a = (1, 1)$.

• $Df(x, y) = \begin{pmatrix} e^x & e^y \\ e^x & -e^y \end{pmatrix} \Rightarrow Df(1, 1) = \begin{pmatrix} e & e \\ e & -e \end{pmatrix} \Rightarrow \det(Df(1, 1)) = -2e^2 \neq 0$.

Per tant, podem aplicar t^e inversa a f en $(1, 1)$ i $\exists f^{-1}$ inversa local de f definida entorn $\boxed{f(1, 1) = (2e, 0)}$ complint $f^{-1}(2e, 0) = (1, 1)$ i:

$$Df^{-1}(2e, 0) = (Df(1, 1))^{-1} = \begin{pmatrix} e & e \\ e & -e \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2e^2} \begin{pmatrix} -e & -e \\ -e & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2e} & \frac{1}{2e} \\ \frac{1}{2e} & -\frac{1}{2e} \end{pmatrix}$$

(3) Vegem que $f(x,y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$ admet inversa global f^{-1} . Calculeu $f^{-1}(u,v)$ i el seu domini de definició.

• Inversa global de f . Vol dir inversa de f definida en el domini més gran on això sigui possible. Per calcular-la, igualam $f(x,y)$ a una parella (u,v) arbitrària i miram per a quins valors de (u,v) és possible aïllar (x,y) en termes de (u,v) . Les expressions de (x,y) en termes de (u,v) així obtingudes són les que defineixen la inversa.

$$\begin{aligned} f(x,y) = (u,v) &\Leftrightarrow \begin{cases} e^x + e^y = u & (eq_1) \\ e^x - e^y = v & (eq_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (eq_1) + (eq_2): 2e^x = u+v \\ (eq_1) - (eq_2): 2e^y = u-v \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} e^x = \frac{u+v}{2} \\ e^y = \frac{u-v}{2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = \ln\left(\frac{u+v}{2}\right) \\ y = \ln\left(\frac{u-v}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(u,v) = \left(\ln\left(\frac{u+v}{2}\right), \ln\left(\frac{u-v}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

on $f^{-1}(u,v)$ (inversa global) està ben definida en $D_{f^{-1}}$ donat per:

$$D_{f^{-1}} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u+v > 0, u-v > 0\}.$$

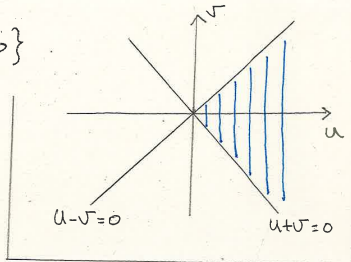
· Gràficament: $Df^{-1} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u+v > 0, u-v > 0\}$

(4) Useu la fórmula per f^{-1} obtinguda en (3)
i xecuejeu els resultats obtinguts per $Df^{-1}(2,0)$
i $Df^{-1}(2e,0)$.

$$f^{-1}(u,v) = \left(\ln\left(\frac{u+v}{2}\right), \ln\left(\frac{u-v}{2}\right) \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} D_u f^{-1} = \left(\frac{1}{u+v}, \frac{1}{u-v} \right) \\ D_v f^{-1} = \left(\frac{1}{u+v}, \frac{-1}{u-v} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow Df^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u+v} & \frac{1}{u-v} \\ \frac{1}{u+v} & \frac{-1}{u-v} \end{pmatrix} \quad \left[\text{obs.: } \ln\left(\frac{u+v}{2}\right) = \ln(u+v) - \ln 2 \right]$$

$$Df^{-1}(2,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Df^{-1}(2e,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2e} & \frac{1}{2e} \\ \frac{1}{2e} & -\frac{1}{2e} \end{pmatrix}$$



(5) Sigui $h(d, \beta) = \frac{d^2}{d^2 + \beta^2}$. Calculen $(h \circ f^{-1})(2e, 0)$ i usen la regla de la cadena per obtenir la matriu $D(h \circ f^{-1})(2e, 0)$.

$$\cdot (h \circ f^{-1})(2e, 0) = h(f^{-1}(2e, 0)) = h(1, 1) = \frac{1^2}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2}$$

$$\cdot D(h \circ f^{-1})(2e, 0) = Dh(f^{-1}(2e, 0)) \cdot Df^{-1}(2e, 0) = Dh(1, 1) \cdot Df^{-1}(2e, 0)$$

Aleshem:

$$Dh(d, \beta) = \left(\frac{\partial h}{\partial d}(d, \beta) \quad \frac{\partial h}{\partial \beta}(d, \beta) \right) = \left(\frac{2d\beta^2}{(d^2 + \beta^2)^2} \quad \frac{-2d^2\beta}{(d^2 + \beta^2)^2} \right)$$

$$Dh(1, 1) = \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right)$$

Finalment:

$$D(h \circ f^{-1})(2e, 0) = \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2e} & \frac{1}{2e} \\ \frac{1}{2e} & -\frac{1}{2e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2e} \end{pmatrix}$$

Teorema de la funció implícita

- Quan tenim sistemes d'equacions lineals compatibles indeterminats (més incògnites que equacions) sabem que tindrem infinites solucions i que el conjunt de totes les solucions el podrem representar ("parametritzar") en termes de tantes variables com "graus de llibertat" tingui el sistema.
- Si tenim, p. ex., dos equacions lineals independents amb tres variables (x, y, z) , sabem que tenim un grau de llibertat. Això vol dir que podem expressar dues de les variables en termes de l'altre. No sempre podem triar arbitràriament les variables que aïllem en funció de l'altre: cal que un cert determinant ("menor") sigui no nul.

- Exemple: Considereu el Sistema d'equacions lineals Compatible indeterminat?

$$\left. \begin{array}{l} X + y + z = 1 \\ X + y + 2z = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{graus de llibertat} = \text{Variables} - \text{eq. independents} = 3 - 2 = 1 \\ \text{"Variables que tenen el rol de paràmetres"} \end{array}$$

Per tant, el sistema ens permet expressar / aïllar dues de les variables en termes de la tercera.

- Qüestió 1: podem aïllar (x, y) en funció de z ?

Expressem el sistema en forma matricial $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

on $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ i considerem el determinant de la submatriu definida

per les columnes 1 i 2 (que corresponen a (x, y)): $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ No podem aïllar (x, y) en termes de z .

- Qüestió 2: podem aïllar (y, z) en funció de x ?

Ara cal calcular el sub-determinant de A definit per les columnes 2, 3 (per y, z):

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ Sí podem aïllar (y, z) en termes de x . De fet:

$$\boxed{y = y(x) = -1 - x, \quad z = z(x) = 2}$$

- El teorema de la funció implícita pretén abordar el mateix problema per cas de sistemes d'equacions no lineals qualsevol. En aquest cas, sol ser impossible aïllar explícitament unes variables en funció de les altres, però el que sí podem contestar és a la pregunta de si almenys localment (al voltant d'un punt donat), és possible (matemàticament parlant) expressar unes variables concretes en terme de les altres. A més a més, com veurem, si bé en general no és possible donar fórmules explícites per les funcions que s'obtenen en aïllar unes variables en terme de les altres, el teorema sí ens permet calcular (via derivació implícita) les derivades d'aquestes funcions en el punt concret que hem triat per aplicar el teorema.

- Si en la mateixa equació $f(x, y, z) = e^{xz} + e^{yz} - x - 1 = 0$ tractem d'aïllar, p.ex, z com a funció de x, y de forma explícita, no ens en sortirem!
- Fixem-nos ara en una solució concreta (donada) de l'equació $f(x, y, z) = 0$ com és $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$. Clarament $f(1, 1, 0) = 0$. El teorema de la funció implícita ens diu que si la derivada parcial de f respecte de z ("la variable que volem aïllar") en aquest punt és diferent de zero, llavors és possible aïllar la variable z com a funció de (x, y) a partir de l'equació $f(x, y, z) = 0$, entorn del punt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$ mat.
- Així permet definir una funció $z = z(x, y)$ ("abús de notació") per la qual no tenim cap fórmula i que compleix:

$$\boxed{f(x, y, z(x, y)) = 0}, \quad \boxed{z(x_0, y_0) = z_0 \Leftrightarrow z(1, 1) = 0}$$

- El valor $z(1,1) = 0$ és l'únic que comencem explícitament per aquesta funció $z(x,y)$, i reflecteix el fet de que el càlcul el fem entorn de la solució donada $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,0)$ de $f(x,y,z) = 0$.
- El fet de que $f(x,y,z(x,y)) \equiv 0$ ens diu que si donem una parella de valors de (x,y) (propers a $(1,1)$), llavors el valor $z(x,y)$ que ens dona aquesta funció defineix una terma $(x,y,z(x,y))$ que verifica l'equació $f(x,y,z) = 0$.
- A més, el teorema també ens diu que en ser $f(x,y,z)$ una funció C^∞ llavors també ho és $z(x,y)$. Les derivades parcials de $z(x,y)$ les podem obtenir derivant implícitament l'expressió $f(x,y,z) = 0$, entenent ara que $z = z(x,y)$ és la funció de (x,y) que ens defineix el teorema de la implícita. Els valors numèrics d'aquestes derivades però, només els podem obtenir en el punt $(x_0, y_0) = (1,1)$ triat.

• Calculs: $f(x, y, z) = e^{xz} + e^{yz} - x - 1 = 0$

• Primer, Verifiquem que efectivament podem aplicar el teorema de la funció implícita a l'equació $f(x, y, z) = 0$ entorn de la solució $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$ demanda i aïllar $z = z(x, y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x e^{xz} + y e^{yz} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 0) = 2 \neq 0$$

↑
(derivem resp. variable que volem aïllar!)

Per tant, efectivament podem aplicar el teorema i definir la funció $z = z(x, y)$ que compleix $z(1, 1) = 0$ i a més verifica l'equació:

$$f(x, y, z(x, y)) = 0 \iff e^{x \cdot z(x, y)} + e^{y \cdot z(x, y)} - x - 1 = 0 \quad (*)$$

• Ara, l'expressió (*) ens permet calcular via derivació implícita les derivades parcials de $z(x, y)$. Per fer-ho, i per simplificar notacions, ometem la dependència de z en (x, y) .

$$e^{x \cdot z} + e^{y \cdot z} - x - 1 = 0 \quad (*)$$

• Derivem (implícitament) $(*)$ entenent que $z = z(x, y)$

• Derivem $(*)$ respecte de x :

$$e^{x \cdot z} \left\{ z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right\} + e^{y \cdot z} \left\{ y \frac{\partial z}{\partial x} \right\} - 1 = 0$$

$$\text{Així permet aïllar } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - e^{x \cdot z} \cdot z}{e^{x \cdot z} \cdot x + e^{y \cdot z} \cdot y}$$

Fent $(x, y) = (1, 1)$ i $z = z(1, 1) = 0$ obtenim: $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = \frac{1}{2}$

• Derivem $(*)$ respecte de y :

$$e^{x \cdot z} \left\{ x \frac{\partial z}{\partial y} \right\} + e^{y \cdot z} \left\{ z + y \frac{\partial z}{\partial y} \right\} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-e^{y \cdot z} \cdot z}{e^{x \cdot z} \cdot x + e^{y \cdot z} \cdot y}$$

Fent $(x, y) = (1, 1)$ i $z = z(1, 1) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = 0$

Teorema de la funció implícita

Considerem el sistema de m equacions dependent de $m+n$ variables =

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x, y) = 0 \\ \dots \\ f_m(x, y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{f(x, y) = 0} \text{ on } f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$$

on les variables del sistema les agrupem de forma que $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
i $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Per tant, la funció $f(x, y)$ que defineix el sistema té $m+n$ variables i m components.

Suposem:

- (1) f es C^k en el seu domini
- (2) $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ és una solució coneguda del sistema $\Leftrightarrow f(x_0, y_0) = \vec{0}$.
- (3) $\det \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \neq 0$ on $\frac{\partial f}{\partial y} = D_y f$ és la matriu $m \times m$ de derivades parcials de f respecte de les variables y .

Llavors, podem aplicar el TA de la funció implícita a $f(x, y) = 0$ en un entorn de $(x, y) = (x_0, y_0)$ i definir una funció $g(x)$ que ens permet aïllar les variables y en termes de les variables x en un entorn d'aquest punt. Concretament:

(a) $g(x)$ és una funció de m variables i m components, definida en un entorn de $x = x_0$, verificant que $g \in C^k$; $g(x_0) = y_0$

(b) si donat un $x \in \mathbb{R}^n$ definim $y = g(x)$, llavors la parella $(x, g(x))$ verifica el sistema d'equacions $f(x, y) = 0$. Això és:

$$f(x, g(x)) = 0 \quad (*)$$

(c) Les derivades parcials de $g(x)$ les podem calcular o bé derivant implícitament $(*)$ o bé via la fórmula:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))$$

En aquesta fórmula, $\frac{\partial F}{\partial x} = D_x f$ denota la matriu $m \times m$ de derivades parcials de f respecte de x . Si la particularitzem en el punt $x = x_0$, obtenim:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0) = D_x g(x_0) = - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right)$$

• Notacions: $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, $g = (g_1, \dots, g_m)$.

$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv$ matriu que té per columnes els vectors de derivades parcials de f respecte de x_1, x_2, \dots, x_m .

$\frac{\partial g}{\partial x} \equiv$ idem passant per columnes les derivades de g respecte de x_1, \dots, x_m .

$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv$ ara les columnes són les derivades de f respecte y_1, y_2, \dots, y_m .

• Abús notacions: típicament, enlloc d'escriure que aïllem $y = g(x)$, usarem la notació $y = y(x)$ identificant $g(x)$ amb $y(x)$.

• Comentari: En el primer exemple $f(x, y, z) = 0$ que hem considerat, tenim $m=1$ equacions, $m+n=3$ variables $\Rightarrow n=2$ i hem aïllat $z = z(x, y)$. Per tant, les variables " $y \in \mathbb{R}^m$ " del teorema són la variable z de $f(x, y, z)$ i les variables " $x \in \mathbb{R}^m$ " del teorema són les variables (x, y) de $f(x, y, z)$. A més, en aquest cas la "matriu de derivades parcials de $\frac{\partial f}{\partial y}$ " del teorema redueix al càlcul de $\frac{\partial f}{\partial z}$ que és una funció a valors reals i, per tant, no cal calcular cap determinant.

• Exemple: Considerem el sistema d'equacions:

$$2z = x^2 - y, \quad y = z^2 + 2x$$

Xeguejen si el teorema de la funció implícita ens permet definir y i z com a funcions implícites de x en els

Punts (a) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 4, -2)$, (b) $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, -1)$.

Si això és possible, calculen $y'(x)$, $z'(x)$.

• El primer que cal fer és expressar el sistema com:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 2z - x^2 + y = 0 \\ f_2(x, y, z) &= y - z^2 - 2x = 0 \end{aligned} \right\} (*)$$

(a) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 4, -2)$ verifica $f_1(0, 4, -2) = f_2(0, 4, -2) = 0$ i per tant n'és una solució del sistema. Com que volem aïllar (y, z) en termes de x hem de calcular la matriu de derivades de $F = (f_1, f_2)$ respecte de (y, z) "variables que volem aïllar". Fem:

$$\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (y, z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2z \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (y, z)}(0, 4, -2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Per poder aplicar el teorema de la funció implícita calculem:

$$\det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (y, z)}(0, 4, -2) \right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Efectivament podem}$$

definir $y(x), z(x)$ localment entorn del punt $(x_0, y_0, z_0) = (0, 4, -2)$

Considerat, com plim $y(0) = 4, z(0) = -2$.

• Ara podem calcular $y'(x)$, $z'(x)$ derivant implícitament les equacions:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y(x), z(x)) = 0 \\ f_2(x, y(x), z(x)) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2z(x) - x^2 + y(x) = 0 \\ y(x) - z(x)^2 - 2x = 0 \end{array} \right\}$$

Derivant respecte de x obtenim:

$$\left. \begin{array}{l} 2z'(x) - 2x + y'(x) = 0 \\ y'(x) - 2z(x) \cdot z'(x) - 2 = 0 \end{array} \right\}$$

Si restem les eq.: $2(z(x)+1)z'(x) - 2(x-1) = 0 \Rightarrow z'(x) = \frac{x-1}{z(x)+1}$

A partir d'aquí: $y'(x) = \frac{2(x \cdot z(x) + 1)}{z(x) + 1}$

Si fem $x = x_0 = 0$, $y = y(x_0) = y_0 = 4$, $z = z(x_0) = z_0 = -2$, obtenim:

$$y'(0) = -2, \quad z'(0) = 1.$$

(b) Si triem la solució $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, -1)$ llavors no podem aplicar el TA de la implícita en aquest punt per aïllar (y, z) en funció x , ja que

$$\det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (y, z)} \right) (1, 3, -1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

• Exemple: El sistema

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, u, v) &:= x + yv + e^{y \cdot u} + e^{xv} - 3 = 0 \\ f_2(x, y, u, v) &:= y - xv + e^{xu} + e^{y \cdot v} - 3 = 0 \end{aligned} \right\} (*)$$

determina dues funcions $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ que satisfan $u(1, 1) = v(1, 1) = 0$. sigui ara $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Calculeu $Dg(1, 1)$ i $Dg^{-1}(0, 0)$.

— Anem a veure que podem aplicar el ta° de la funcions implícites a sistema (*) entorn del punt $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 0, 0)$

(1) $f_1, f_2 \in C^{\infty}$, $\forall (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$

(2) $\left. \begin{aligned} f_1(1, 1, 0, 0) &= 1 + 0 + e^0 + e^0 - 3 = 0 \\ f_2(1, 1, 0, 0) &= 1 - 0 + e^0 + e^0 - 3 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{el punt } (1, 1, 0, 0) \text{ triat és solució de } (*)$

(3) $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y e^{yu} & y + x e^{xv} \\ x e^{xu} & -x + y e^{yv} \end{pmatrix} \leftarrow \text{matriu de derivades parcials de } f_1, f_2 \text{ respecte les variables } u, v \text{ que volem aïllar (en termes } x, y).$

Per tant:

$$\det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (u, v)} \right) (1, 1, 0, 0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

Així doncs, podem aplicar el T.A. de la funció implícita al sistema (*) en el punt $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 0, 0)$ i definir dues funcions:

$u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, localment entorn d'aquest punt, verificant:

(i) $u(x, y)$, $v(x, y)$ són C^∞

$$(ii) \begin{matrix} u(1, 1) = 0, & v(1, 1) = 0 \\ \underbrace{\quad}_{x_0} \underbrace{\quad}_{y_0} & \underbrace{\quad}_{u_0} & \underbrace{\quad}_{x_0} \underbrace{\quad}_{y_0} & \underbrace{\quad}_{v_0} \end{matrix}$$

$$(iii) \left. \begin{matrix} f_1(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0 \\ f_2(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0 \end{matrix} \right\} \forall (x, y) \text{ en el domini de } u(x, y), v(x, y).$$

Si definim $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ i volem $Dg(1, 1)$, ens cal calcular les derivades parcials de $u(x, y)$, $v(x, y)$ respecte de x, y en el punt $(1, 1)$. Ho podem fer de dues maneres:

(I) Derivant implícitament les equacions de $u(x,y)$, $v(x,y)$.

Això vol dir considerar les equacions per aquestes funcions que es deriven del punt (iii) anterior i derivar-les respecte de x, y , entenent que $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ són ara funcions de x, y :

$$\left. \begin{aligned} x + y \cdot v(x,y) + e^{y \cdot u(x,y)} + e^{x \cdot v(x,y)} - 3 &= 0 \\ y - x \cdot v(x,y) + e^{x \cdot u(x,y)} + e^{y \cdot v(x,y)} - 3 &= 0 \end{aligned} \right\} (*+)$$

• Si derivem (*+) resp. de x (no explícitem la dependència de u, v en x, y):

$$\left. \begin{aligned} 1 + y \sqrt{x} + e^{y \cdot u} y u_x + e^{x \cdot v} \{v + x v_x\} &= 0 \\ -v - x \sqrt{x} + e^{x \cdot u} \{u + x \cdot u_x\} + e^{y \cdot v} y \cdot v_x &= 0 \end{aligned} \right\} \left(\begin{array}{l} \text{on } u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ v_x = \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right)$$

Fent $x = y = 1$, $u = u(1,1) = 0$, $v = v(1,1) = 0$:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \sqrt{x}(1,1) + u_x(1,1) + \sqrt{x}(1,1) &= 0 \\ -\sqrt{x}(1,1) + u_x(1,1) + \sqrt{x}(1,1) &= 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} u_x(1,1) + 2\sqrt{x}(1,1) &= -1 \\ u_x(1,1) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

D'on: $u_x(1,1) = 0$, $v_x(1,1) = -1/2$.

• Si derivem arc (***) respecte de g i avaluem en el mateix punt:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{y} + y\sqrt{y} + e^{yu} \{u + yu_y\} + e^{x\sqrt{y}} \cdot x \cdot \sqrt{y} &= 0 \\ 1 - x\sqrt{y} + e^{xu} \cdot x \cdot u_y + e^{y\sqrt{y}} \{y + y\sqrt{y}\} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u_y(1,1) + 2\sqrt{y}(1,1) &= 0 \\ u_y(1,1) &= -1 \end{aligned}$$

d'on $u_y(1,1) = -1$, $\sqrt{y}(1,1) = \frac{1}{2}$

(II) Usar la fórmula "compacta" que ens proporciona el t^a de la implícita:

$$\underbrace{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(1, 1)}_{\text{matriu de derivades}} = - \underbrace{\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}(1, 1, 0, 0) \right)^{-1}}_{\text{inversa de la matriu}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}(1, 1, 0, 0) \right)}_{\text{matriu de derivades}}.$$

matriu de derivades
parcials de les variables
aïllades en terme del
reste de variables en el
punt triat

inversa de la matriu
de derivades parcials
de les funcions definint
les equacions respecte de
les variables que aïllem
en el punt triat

matriu de derivades parcials
de les funcions definint les
equacions respecte de les
variables que fan paper de
paràmetres en el punt triat.

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}(1, 1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} \right)^{-1}(1, 1, 0, 0) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

(determinant = -2)

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}(1, 1, 0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \Big|_{(1, 1, 0, 0)} = \begin{pmatrix} 1 + e^{x \cdot v} & v + e^{y \cdot u} \\ -v + e^{x \cdot u} & 1 + e^{y \cdot v} \end{pmatrix} \Big|_{(1, 1, 0, 0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'om:

$$\begin{pmatrix} u_x(1, 1) & u_y(1, 1) \\ v_x(1, 1) & v_y(1, 1) \end{pmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(1, 1) = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

observem que en ser $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, llavors la seva matriu Jacobiana / de derivades parcials en $(x, y) = (1, 1)$ coincideix amb la

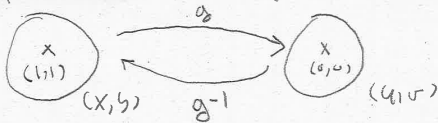
calculada: $Dg(1, 1) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

• El següent pas és veure que podem aplicar el teorema de la funció inversa a $g(x, y)$ en el punt $(x, y) = (1, 1)$. Tenim:

(1) $g \in C^\infty$ entorn $(x, y) = (1, 1)$.

(2) $Dg(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ verifica $\det(Dg(1, 1)) = -1/2 \neq 0$

Per tant, efectivament podem aplicar el teorema de la funció inversa a $g(x, y)$ en $(x, y) = (1, 1)$ i és té que existeix g^{-1} inversa local de f , també C^∞ , definida entorn del punt $g(1, 1) = (u(1, 1), v(1, 1)) = (0, 0)$



A més, g^{-1} compleix:

• $g^{-1}(0, 0) = (1, 1)$.

• $Dg^{-1}(0, 0) = (Dg(1, 1))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(-1/2)} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Comentari final: És fàcil veure que al sistema implícit (*) també li haguéssim pogut aplicar el T^S de la funció implícita en $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 0, 0)$ per definir $X = X(u, v)$ i $y = y(u, v)$ verificant $X(0, 0) = y(0, 0) = 1$. La raó és que $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}(1, 1, 0, 0) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

clarament, si $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ ens expressa u, v en termes de x, y entorn del punt triat, llavors la seva inversa $g^{-1}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ és la que ens expressa x, y en termes u, v .

Extremes de funcions de vàries variables

-Def: Donada $f: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$

(i) Direm que a  s un $\left\{ \begin{array}{l} \text{màxim} \\ \text{mínim} \end{array} \right\}$ relatiu de f en A si

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ t.g. } \left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq f(a) \\ f(x) \geq f(a) \end{array} \right\} \text{ si } x \in A \cap B_\varepsilon^m(a)$$

(ii) Direm que a  s un $\left\{ \begin{array}{l} \text{màxim} \\ \text{mínim} \end{array} \right\}$ absolut de f en A si

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq f(a) \\ f(x) \geq f(a) \end{array} \right\} \forall x \in A$$

- Anomenarem "extremes" de f als seus màxims i mínims.
- Primerament discutirem els extremes relatius de f en conjunts oberts i tot seguit farem alguns exemples de càlcul d'extremes absoluts en dominis "senzills".

• Def.: Direm que a és un punt crític de $f: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
si totes les derivades parcials de f són zero en a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0.$$

• Proposició (Condició necessària d'extrem relatiu)

$f: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, A obert, $f \in C^1(A)$, $a \in A$

llavors: si a és un extrem relatiu de f en $A \Rightarrow a$ és un punt crític de f en A .

• Atenció: El recíproc d'aquest resultat no sempre és cert!
Pot ser que $a \in A$ sigui un punt crític de f però no sigui pas un extrem relatiu. El més que podem dir en general és que els punts crítics de f ens donen els candidats a extrems relatius de f .

- Exemple: $f(x, y) = x^2 - y^2$ té un punt crític en $(0, 0)$ però no hi té cap extrem en aquest punt.

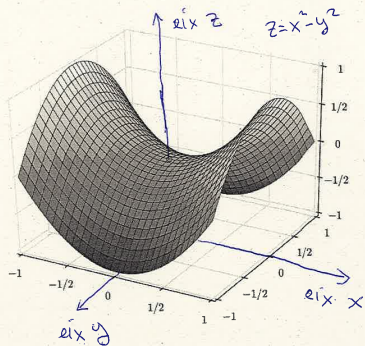
• La secció de la gràfica $y = f(x, 0)$ amb el pla $y = 0$ és:

$f(x, 0) = x^2 \Rightarrow (0, 0)$ mínim relatiu d'aquesta secció.

• La secció de la gràfica $y = f(0, y)$ amb el pla $x = 0$ és:

$f(0, y) = -y^2 \Rightarrow (0, 0)$ màxim relatiu d'aquesta secció.

• Aquest és l'exemple paradigmàtic d'una funció que en $(x, y) = (0, 0)$ hi té un punt crític que no és ni màx. ni mínim relatiu, sinó un punt de sella.



• Teorema (Condicions suficients d'extrem relatiu)

$f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A obert, $f \in C^2(A)$, $a \in A$

Suposem que a és un punt crític de f ("candidat a extrem")

i denotem per $H = H_f(a)$ la seva matriu hessiana en el punt a

($H_f(a)$: matriu $n \times n$ i simètrica de derivades parcials segones de la funció f en el punt a). Llavors:

- (1) Si tot els vap's (valors propis) de H són negatius $\Rightarrow f$ té un màxim relatiu en el punt a
- (2) Si tots els vap's de H són positius $\Rightarrow f$ té un mínim relatiu en a
- (3) Si H té simultàniament almenys un vap. positiu i almenys un vap negatiu $\Rightarrow f$ té un punt de sella en a (ni màx. ni mín.)
- (4) En qualsevol altre cas (si f té tots els vap's del mateix signe tret d'alguns o alguns vap's zero) \Rightarrow el criteri del hessia no ens permet decidir si a és màx./mín. relatiu o res de res.

• Proposicions (Determinacions del signe dels valors de la Hessiana)

Cas $n=2$ $f = f(x, y)$ i (x_0, y_0) punt crític de f .

$$H = H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

$T = \text{tr}(H) \equiv$ suma elements
"traces" diagonal H

$D = \det(H) \equiv$ determinant.

avors:

(1) $D > 0, T \geq 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ és un mínim relatiu de f

(2) $D > 0, T < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ és un màxim relatiu de f .

(3) $D < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ és un punt de sella de f

(4) $D = 0 \Rightarrow$ El criteri de la Hessiana no ens permet
decidir si (x_0, y_0) és màx., mín. relatiu o res de res.

Cas $m=3$ $f=f(x, y, z)$ i (x_0, y_0, z_0) punt crític de f .

$$H = H_f(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) \end{bmatrix}$$

Demostrem per A_1, A_2, A_3 els 3 menors principals de H . Així és:

$$A_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0), \quad A_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}(x_0, y_0, z_0), \quad A_3 = \det(H)$$

Lavors:

- (1) $A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ mínim relatiu de f
- (2) $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ màxim relatiu de f
- (3) $A_3 = 0 \Rightarrow H$ té almenys un $\text{rap} = 0$ (si volem dir més cal calcular els altres raps)
- (4) En qualsevol altre cas $\Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ és un punt de sella de f (màx - mín relatiu)

- Exemple: Trobem els punts crítics de $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$ i classifiquem-los d'acord amb el criteri del Hessià.

Pas 1: Busquem els punts crítics de f resolent el sistema (no lineal):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 4y = 0 \rightarrow -3x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(4-3x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 4/3\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y = 0 \rightarrow x = y \quad \text{Solucions: } (0,0), (4/3, 4/3)$$

Pas 2: Calculem i estudiem la matriu Hessiana de f en cada punt:

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} H_1 = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\ H_2 = H_f(4/3, 4/3) = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(0,0) $D_1 = \det(H_1) = -16 < 0 \Rightarrow (0,0)$ punt de sella de f (no és extrem relatiu)

(4/3, 4/3) $D_2 = \det(H_2) = 16 > 0$, $T_2 = \text{tr}(H_2) = -12 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (4/3, 4/3)$ és un màxim relatiu de f .

Exemple: $f(x, y) = x^2 + xy + y^3 - y^2 - 3x - 2y + 1$ Trobem els punts crítics de f i classifiquem-los usant el criteri del Hessià.

Pas 1 Busquem els seus punts crítics

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3-y}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 3y^2 - 2y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3-y}{2} + 3y^2 - 2y - 2 = 0 \Rightarrow 6y^2 - 5y - 1 = 0$$

$$\text{obtenim: } y = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{5 \pm 7}{12} \Rightarrow y = 1 \text{ o } y = -\frac{1}{6}$$

Solucions:

$$(1, 1); \left(\frac{19}{12}, -\frac{1}{6}\right)$$

Pas 2 Matriu Hessiana en cada punt

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6y - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$H_1 = H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = H_f\left(\frac{19}{12}, -\frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(1, 1) \Rightarrow D_1 = \det(H_1) = 7 > 0, T_1 = \text{tr}(H_1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{mín. relatiu}$$

$$\left(\frac{19}{12}, -\frac{1}{6}\right) \Rightarrow D_2 = \det(H_2) = -7 < 0 \Rightarrow \text{punt de sella (no és extrem)}$$

Exemple: $f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xy + z - y$ Idem que abans.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + y \cdot z = 0 \rightarrow \boxed{x = -yz} \quad (\text{Cap. Solució pot tenir } x=0, y=0 \text{ o } z=0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz - 1 = 0 \rightarrow \boxed{-yz^2 - 1 = 0} \rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy - 1 = 0 \rightarrow \boxed{-y^2z - 1 = 0} \rightarrow -\frac{1}{z^4} \cdot z - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{z^3} = -1 \Rightarrow \boxed{z = -1}$$

Únic pt. crític
de f

Solució
 $(-1, -1, -1)$

$$H_f = \begin{pmatrix} D_{xx}f & D_{xy}f & D_{xz}f \\ D_{xy}f & D_{yy}f & D_{yz}f \\ D_{xz}f & D_{yz}f & D_{zz}f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H = H_f(-1, -1, -1) = \begin{pmatrix} \underline{1} & -1 & -1 \\ -1 & \underline{0} & -1 \\ -1 & -1 & \underline{0} \end{pmatrix}$$

Calcularem els menors principals de H :

$$A_1 = 1, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

$A_1 > 0, A_2 < 0, A_3 < 0 \Rightarrow (-1, -1, -1)$ és un punt de sella de f
(ni màx. ni mín. relatiu).

Exemple: Vegeu que $(0,0)$ és un punt crític de $f(x,y) = x^2y + y^2x$

pel qual el criteri del hessia no decideix. A quina conclusió arribem si restringim els valors de f a la recta $y=x$?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yx \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \Rightarrow (0,0) \text{ punt crític de } f.$$

$$H_f = \begin{pmatrix} D_{xx}f & D_{xy}f \\ D_{xy}f & D_{yy}f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y \\ 2x+2y & 2x \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{tots els valors}$$

de la matriu hessiana són nuls \Rightarrow el criteri del hessia no decideix

• Si una funció $f(x,y)$ té un extrem relatiu en un punt i restringim els seus valors als d'una corba (recta, paràbola, etc) que passi pel punt, llavors la funció (d'una variable) que obtenim ha de tenir (independentment de la corba triada) el mateix tipus d'extrem que la funció $f(x,y)$ en el punt. Així, per exemple, si considerem rectes de la forma $y = mx$ pel $(0,0)$ la funció d'una variable que obtenim si restringim $f(x,y)$ a la recta és $g(x) = f(x, mx)$.

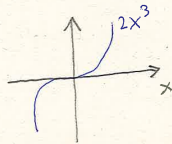
$g(x) = f(x, mx)$ llavors:

- (a) si per algun m la funció $g(x)$ té un extrem en $y=0$, llavors $f(x,y)$ no pot tenir un extrem en $(y=0)$.
- (b) La conclusió és la mateixa: si per un valor $m=m_1$ la funció $g(x)$ té un màx. en $y=0$ i per un altre $m=m_2$ la funció $g(x)$ té un mín.
- (c) Cas de que per tot $m \in \mathbb{R}$ la funció $g(x)$ tingui sempre un màx (o un mín.) així no garanteix res! Pot ser que si restringim p.ex. els valors de $f(x,y)$ a una paràbola de la forma $y=ax^2$, fent $h(x) = f(x, ax^2)$, llavors per algun $a \in \mathbb{R}$ el resultat sigui diferent.

• En l'exemple $f(x,y) = x^2y + yx^2$ és suficient fer $m=1$ i considerar la seva restricció a la recta $y=x$. Així és, estudiar la funció $g(x) = f(x, x)$ en $x=0$. Tenim:

$g(x) = f(x, x) = 2x^3 \Rightarrow g(x)$ té un punt d'inflexió

en $x=0$ (ni màx. ni mín. relatiu) $\Rightarrow f(x,y)$ no té cap extrem en $x=0$.



- Exemple: $Z(x, y)$ funció definida implícitament per l'equació:

$$f(x, y, z) := x^4 + y^4 + z^4 + a \cdot xy - 7x - 7y = z + 12 - a = 0 \quad (*)$$

on $a \in \mathbb{R}$ és un paràmetre, complint $Z(1, 1) = 1$.

(a) Calculeu $Z_x(1, 1)$ i $Z_y(1, 1)$ i diguen per a quin valor de $a \in \mathbb{R}$ són totes dues iguals a zero.

observem que, $\forall a \in \mathbb{R}$, podem aplicar el ts de la funció implícita a l'equació (*) en el punt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ per definir $Z = Z(x, y)$:

(1) $f(x, y, z)$ és C^∞ en tot \mathbb{R}^3 , $\forall a \in \mathbb{R}$.

(2) $f(1, 1, 1) = 0$, $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ solució de l'equació.

(3) $\frac{\partial f}{\partial z} = 4z^3 - 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = 3 \neq 0 \Rightarrow$ El ts de la implícita ens

permet aïllar $Z = Z(x, y)$ entorn del punt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$, complint

(i) $Z(x, y)$ és C^∞ (ii) $Z(1, 1) = 1$ (iii) $f(x, y, Z(x, y)) = 0, \forall x, y$

clarament, la funció $Z(x, y)$ està doncs ben definida $\forall a \in \mathbb{R}$.

• Les derivades de $Z(x,y)$ resp. x,y les podem calcular derivant implícitament

l'expressió que es deriva de l'equació $f(x,y,z(x,y))$:

$$x^4 + y^4 + z^4(x,y) + axy - 7x - 7y - z(x,y) + 12 - a = 0 \quad (**)$$

• Derivant $(**)$ resp. x i fent $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ (ometem dependència en x,y):

$$4x^3 + 4z^3 z_x + ay - 7 - z_x = 0 \quad (***)$$

$$\text{Fent } x=y=1, z=z(1,1)=1, \text{ s'obté: } z_x(1,1) = \frac{3-a}{3}$$

• Derivant $(**)$ resp. y obtenim $z_y(1,1) = \frac{3-a}{3}$

• clarament, si $a=3$ llavors $z_x(1,1) = z_y(1,1) = 0 \Rightarrow (1,1)$ és un punt crític de $Z(x,y)$ i candidat a extrem.

(b) Per aquest valor de $a=3$ calcular la matriu hessiana $H = H_{z(x,y)}(1,1)$

i discutir si $Z(x,y)$ té o no un extrem relatiu en $(1,1)$

• Fent $a=3$ i derivant implícitament $(***)$ resp. de x i de y s'obté:

$$12x^2 + 12z^2 z_x^2 + 4z^3 z_{xx} - z_{xx} = 0$$

$$12z^2 z_x z_y + 4z^3 z_{xy} + 3 - z_{xy} = 0$$

Fent $x=y=1$, $z=z(1,1)=1$, $z_x=z_x(1,1)=0$, $z_y=z_y(1,1)=0$ obtenim:

$$\left. \begin{array}{l} 12 + 3 z_{xx}(1,1) = 0 \\ 3 z_{xy}(1,1) + 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} z_{xx}(1,1) = -4 \\ z_{xy}(1,1) = -1 \end{cases}$$

• Repetim els càlculs per z_{yy} obtenim $z_{yy}(1,1) = -4$.

• Per tant, $H = H_{z(x,y)}(1,1) = \begin{pmatrix} z_{xx}(1,1) & z_{xy}(1,1) \\ z_{xy}(1,1) & z_{yy}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

$D = \det(H) = 15 > 0$
 $T = \text{tr}(H) = -8 < 0$ } $\Rightarrow z(x,y)$ té un màxim relatiu en el punt $(1,1)$.

Extremes absoluts de funcions definides sobre compactes

Teorema

Tota funció contínua definida en un conjunt compacte assolix el seu màxim i mínim absolut sobre el compacte. Així és:

$f: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, X compacte (tancat i acotat), $f \in C^0(X)$

llavors, existeixen $x_0, y_0 \in X$ (potser no únics!) tals que:

$$f(x_0) = \max_{x \in X} f(x) \quad , \quad f(y_0) = \min_{x \in X} f(x)$$

Comentaris:

(1) Si X no és compacte (no tancat i/o no acotat), llavors f en general no té extrems absoluts en X .

(2) Atenció: si $a \in X$ és un extrem relatiu que pertany a la frontera de X , llavors en general no és un punt crític de f .

- Nosaltres abordarem menys exemples de càlcul d'extremes absoluts en $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^2$ compacte en que la frontera de \mathbb{K} sigui "fàcil" (Trossos de rectes, una circumferència, ...). Per dimensions més grans o per fronteres més complexes cal usar els multiplicadors de Lagrange que es venen a Geometria.

- Mètode de càlcul dels extremes absoluts de $f: \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on \mathbb{K} compacte.

Pas 1 Buscar tots els punts crítics de f que siguin en l'interior de \mathbb{K}

Atenció: Si no volem discutir els extremes relatius de f , llavors No cal aplicar el mètode del hessia a aquests punts crítics.

Pas 2 Buscar tots els punts crítics de la funció d'una variable que s'obté en restringir els valors de f a la seva corba frontera

Atenció: Cas que la frontera de f tingui vèrtexs, tots els vèrtexs també els hem de considerar com a candidats als extremes absoluts.

Pas 3 Avaluem f en tots els punts obtinguts en el **Pas 1** i en el **Pas 2**. El punt(s) on $f(x, y)$ pren el seu valor més gran defineix el(s) màxim(s) absolut(s) de f . El valor mínim el(s) mínim(s) absolut(s).

- Exemple: trobem els extrems absoluts de $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ en:

(a) El triangle $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$

(b) El disc $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

Par 1 Busquem tots els punts crítics de f en \mathbb{R}^2 .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 = 0$$

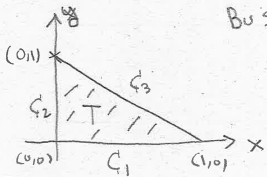
$\Rightarrow (x,y) = (1,1)$.

• Usant criteri hessia surt que $(1,1)$ és un mínim relatiu de f , però no ens cal fer-ho.

• $(1,1) \notin T$ però $(1,1) \in D$

Par 2 per T

La frontera de T és la unió dels seus tres costats. Busquem els punts crítics de f sobre cadascun d'ells.



$$C_1 = \{y=0, x \in [0,1]\}$$

$$g_1(x) = f(x,0) = x^2 - 2x, \quad x \in [0,1] \quad \text{restricció de } f(x,y)$$

$$g_1'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Sobre C_1 com a funció de x

obtenim el candidat $(1,0) \in T$

• $G_2 = \{x=0, y \in [0,1]\}$, $g_2(y) = f(0,y) = y^2 - 2y$, $y \in [0,1]$
 $g_2'(y) = 2y - 2 = 0$ ↳ restriccions de $f(x,y)$ sobre G_2 en funcions y

$y=1 \Rightarrow$ obtenim el candidat $(0,1) \in T$

• $G_3 = \{x+y=1, x \geq 0, y \geq 0\} = \{y=1-x, x \in [0,1]\}$

$g_3(x) = f(x, 1-x) = x^2 + (1-x)^2 - 2x - 2(1-x) = 2x^2 - 2x - 1$, $x \in [0,1]$

↳ restriccions de $f(x,y)$ sobre G_3 en funcions de x

$g_3'(x) = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1/2 \Rightarrow y = 1/2 \Rightarrow$ obtenim el candidat $(1/2, 1/2) \in T$

• Hem de considerar també com a candidats tots els vèrtexs del triangle T : $(0,0), (1,0), (0,1) \in T$

Pas 3 per T Avaluem $f(x,y)$ en tots els candidats obtinguts (111) Nota

$f(0,0) = 0 \leftarrow (0,0)$ és el màxim absolut de f en T

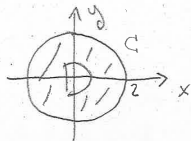
$f(1,0) = -1$

$f(0,1) = -1$

$f(1/2, 1/2) = -3/2 \leftarrow (1/2, 1/2)$ és el mínim absolut de f en T

Part 2 per $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \}$

La frontera de D és la circumferència C de centre $(0,0)$ i radi 2 : $C = \{ x^2 + y^2 = 4 \}$.



Parametritzem la circumferència C mitjançant l'angle θ de les coordenades polars:

$x = \underbrace{2}_{\text{radi}} \cos \theta, y = 2 \sin \theta, \theta \in [0, 2\pi]$. Aleshores, si $g(\theta)$ és la

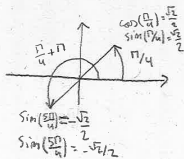
funció $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ restringida a C , en termes de θ :

$$g(\theta) = f(2 \cos \theta, 2 \sin \theta) = 4(\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1) - 2 \cdot 2 \cos \theta - 2 \cdot 2 \sin \theta = 4(1 - \cos \theta - \sin \theta)$$

Busquem els punts crítics de $g(\theta)$ per $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$g'(\theta) = 4(\sin \theta - \cos \theta) = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = \cos \theta \Leftrightarrow \theta \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$

obtenim: $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$



Part 3 per D Avaluem f en tots els candidats obtinguts (i,1) ara hi és!

$f(1,1) = -2 \leftarrow (1,1)$ és el mínim absolut de f en D . Vegeu $2 > 4(\sqrt{2}-1)$

$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4(1-\sqrt{2})$

$f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4(1+\sqrt{2}) \leftarrow (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ és el màxim absolut de f en D

Exemple: Considerem la funció $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida per:

$$f(x, y) = 4 - (x^2 + y^2) + 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

(a) Troben els seus punts crítics.

• observem que, per generacur, $f(x, y)$ ben definida i contínua en \mathbb{R}^2 , però, degut al terme $\sqrt{x^2 + y^2}$ no admet derivades parcials en $(0, 0)$. Aquest fet, no és cap problema per estudiar els seus extrems.

• Busquem els seus punts crítics $(x, y) \neq (0, 0)$, a partir dels punts on $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2y \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right).$$

Així doncs, els seus punts crítics diferents de $(x, y) = (0, 0)$ han de complir $x^2 + y^2 = 1$ (Circumferència de centre $(0, 0)$ i radi 1).

(b) Justifiquem que f té extrems absoluts sobre $D = \overline{B}_2(0, 0)$ (bola tancada de centre $(0, 0)$ i radi 2). On s'assoleixen?

• Com que $f(x, y)$ és contínua en D i D compacte, sabem que f assolirà els seus extrems absoluts en D ,

Per trobar els extrems absoluts de f en D cal avaluar la funció en:

$f(0,0) = 4$ (ja que f no té derivades en $(0,0)$).

$f(x,y) = 5$ si $x^2 + y^2 = 1$ (ja que aquests són els punts crítics de f)

$f(x,y) = 4$ si $x^2 + y^2 = 2^2$ (ja que la circumferència de centre $(0,0)$ i radi 2 és la frontera de D).

Per tant tots els punts de $x^2 + y^2 = 1$ són màxims absoluts i l'origen $(0,0)$ i els punts de $x^2 + y^2 = 4$ són mínims absoluts.

(c) té f extrems absoluts en $D = \mathbb{R}^2$? Si els té on s'assoleixen?

observem: $f(x,y) = 4 - [\sqrt{x^2 + y^2}]^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} = 5 - [(\sqrt{x^2 + y^2})^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} + 1] = 5 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2$

Per tant $f(x,y) \leq 5$ en tot \mathbb{R}^2 i $f(x,y) = 5$ si $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$ els extrems absoluts de f en \mathbb{R}^2 s'assoleixen en $x^2 + y^2 = 1$.

Si expressem f en coordenades polars, veiem que $f(x,y) = 4 - r^2 + r$ només depèn de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (distància a l'origen). clarament,

$\lim_{r \rightarrow +\infty} (4 - r^2 + r) = -\infty$ i per tant f es fa tant petit com vulguem

quan ens allunyem de l'origen $\Rightarrow f$ no té mínims absoluts en \mathbb{R}^2 .