(9) Sigui $a_0 > b_0 > 0$. Considerem

$a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$, mitja aritmètica; $b_1 = \sqrt{a_0 \cdot b_0}$, mitja geomètrica.

i definim les successions

$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, $b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$.

(a) Utilitzeu inducció per provar que $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$.

1er. pas: Verifiquem el cas $n=0$: $a_0 > a_1 > b_1 > b_0$?

És clar que $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2} < \frac{a_0+a_0}{2} = a_0$ i $b_1 = \sqrt{a_0 \cdot b_0} > \sqrt{b_0 \cdot b_0} = b_0$.

Falta veure $a_1 > b_1 \Leftrightarrow \frac{a_0+b_0}{2} > \sqrt{a_0 \cdot b_0} \Leftrightarrow \left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)^2 > a_0 b_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_0^2 + 2a_0b_0 + b_0^2 > 4a_0b_0 \Leftrightarrow a_0^2 - 2a_0b_0 + b_0^2 > 0 \Leftrightarrow (a_0-b_0)^2 > 0$,

que és cert en quant $a_0 - b_0 \neq 0$.

2on. pas: suposem $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$ per un cert n.

Volem veure que $a_{n+1} > a_{n+2} > b_{n+2} > b_{n+1}$.

- $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \underset{\uparrow}{<} \frac{a_{n+1}+a_{n+1}}{2} = a_{n+1}$.

  Per hipòtesis inducció $b_{n+1} < a_{n+1}$

- $b_{n+2} = \sqrt{a_{n+1} b_{n+1}} \underset{\uparrow}{>} \sqrt{b_{n+1} \cdot b_{n+1}} = b_{n+1}$.

  Per hip. induc. $a_{n+1} > b_{n+1}$

- Falta veure $a_{n+2} > b_{n+2} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} > \sqrt{a_{n+1} b_{n+1}}$.

  Repetint els càlculs anteriors, això equival a $(a_{n+1}-b_{n+1})^2 > 0$, que és cert ja que per hipòtesis d'inducció tenim $a_{n+1} - b_{n+1} \neq 0$.

(b) Raoneu que ambdues successions són convergents i que tenen el mateix límit.

- És clar que $\{a_n\}$ és una successió monòtona decreixent i acotada inferiorment, mentres que $\{b_n\}$ és monòtona creixent i acotada superiorment.

En efecte, per inducció hem provat en (a) que $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$, per a tot n. En particular:

$a_n > a_{n+1} \Rightarrow \{a_n\}$ decreixent; $b_{n+1} > b_n \Rightarrow \{b_n\}$ creixent.

A més, clarament qualsevol terme b_n de la successió $\{b_n\}$ és una cota inferior de $\{a_n\}$, mentres que qualsevol terme a_n de $\{a_n\}$ ho és de la successió $\{b_n\}$. Així doncs, $\{a_n\}$ és acotada inferiorment i $\{b_n\}$ superiorment.

· Sabem doncs que $\exists\, A = \lim_{n\to+\infty} a_n$ i $\exists\, B = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

· Quan tenim successions definides per recurrències, no és difícil establir equacions que han de verificar els corresponents límits simplement prenent límits en dites recurrències. Així:

· $a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_{n-1} + \lim_{n\to\infty} b_{n-1}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \dfrac{A+B}{2} \Rightarrow 2A = A + B \Rightarrow A = B.$

· $b_n = \sqrt{a_{n-1}\cdot b_{n-1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_{n-1} \cdot \lim_{n\to\infty} b_{n-1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \sqrt{A\cdot B} \Rightarrow B^2 = AB \Rightarrow B = A.$

$B \neq 0$. Raó: $b_0 > 0$ i $\{b_n\}$ creixent

· Per tant ambdues successions tenen el mateix límit.