Useu el mètode d'inducció per provar el resultat de l'enunciat.

(1) Proveu que $1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$, $n\geq 1$

Fem $P(n): 1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$, ~~la~~ propietat que volem provar, per $n\geq 1$.

· <u>1er pas</u>: verifiquem $P(1): 1^3=1^2$ Certa!

· <u>2n pas</u>: Suposem $P(n)$ certa per a un cert $n\geq 1$, i anem a veure que també ho és $P(n+1)$. Això és:

$P(n+1): 1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3=(1+2+\dots+n+(n+1))^2$

Llavors:

$$1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3 \underset{\uparrow}{=} (1+2+\dots+n)^2+(n+1)^3$$

usem que $P(n)$ és cert!

Llavors, per veure que $P(n+1)$ és certa, cal xequejar que

$(1+2+\dots+n)^2+(n+1)^3 \stackrel{?}{=} (1+2+\dots+n+(n+1))^2$, si $n\geq 1$. (*)

Comprovar directament això és tant dur com demostrar $P(n)$...

a menys que usem que $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, fet que podem provar per inducció (però de fet és força obvi!).

Llavors, (*) esdevé:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3 \stackrel{?}{=} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \iff$$

dividim per $(n+1)^2$

$$\iff \frac{n^2}{4}+(n+1) \stackrel{?}{=} \frac{(n+2)^2}{4}$$

$$\frac{(n+2)^2}{4} = \frac{n^2+4n+4}{4}=\frac{n^2}{4}+n+1$$

Per tant $P(n+1)$ és certa!

(2) Proveu que $\forall n \geq 1$, $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$

$P(n)$: $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$,

1er. pas : Xequejem $P(1)$: $1\cdot 1! \overset{?}{=} (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$ o.k.

2on. pas: Suposem $P(n)$ certa $\forall n \geq 1$ i volem veure que $P(n+1)$ també ho és. Concretament:

$P(n+1)$: $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + n\cdot n! + (n+1)\cdot(n+1)! = (n+2)! - 1$

Així:

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + n\cdot n! + (n+1)\cdot(n+1)! \underset{\substack{\uparrow \\ \text{usem que } P(n) \text{ és cert}}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! =$$

$$= (n+1)! \, [1 + n + 1] - 1 = (n+2)! - 1.$$

(3) Proveu que $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$, $\forall n \geq 1$, $x \neq 1$.

$P(n)$: $(1+x)(1+x^{2^1})(1+x^{2^2})\cdots(1+x^{2^n}) = \dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$.

1er. pas : xequejem $P(1)$: $(1+x)(1+x^2) \overset{?}{=} \dfrac{1-x^{2^{1+1}}}{1-x} = \dfrac{1-x^4}{1-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1+x)(1-x)(1+x^2) \overset{?}{=} 1-x^4 \Leftrightarrow \underbrace{(1-x^2)(1+x^2)}_{1-x^4} \overset{?}{=} 1-x^4$ o.k.

2on. pas: suposem $P(n)$ certa $\forall n \geq 1$ i volem veure que $P(n+1)$ també ho és. Hem de veure doncs:

$P(n+1)$: $(1+x)(1+x^{2^1})(1+x^{2^2})\cdots(1+x^{2^n})(1+x^{2^{n+1}}) = \dfrac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x}$

Així:

$$(1+x)(1+x^{2^1})\cdots(1+x^{2^n})(1+x^{2^{n+1}}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{usem } P(n) \text{ cert.}}}{=} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \cdot (1+x^{2^{n+1}}) =$$

$$= \frac{1-(x^{2^{n+1}})^2}{1-x} = \frac{1-x^{2\cdot 2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x} \quad \text{o.k.}$$

4. Proveu que $1\cdot 5+2\cdot 5^2+\dots+n\cdot 5^n=\frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$, per a $n\geq 1$.

$P(n): 1\cdot 5^1+2\cdot 5^2+\dots+n\cdot 5^n=\frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$

1er. pas: Xequejem $P(1)$: $1\cdot 5^1 \stackrel{?}{=} \frac{5+(4\cdot 1-1)\cdot 5^{1+1}}{16}=\frac{5+3\cdot 25}{16}=\frac{80}{16}=5$. o.k.

2on. pas: Suposem $P(n)$ cert per a un ~~cert~~ $n\geq 1$ i volem veure que $P(n+1)$ també ho és. Concretament:

$$P(n+1): 1\cdot 5^1+2\cdot 5^2+\dots+n\cdot 5^n+(n+1)\cdot 5^{n+1}=\underbrace{\frac{5+(4(n+1)-1)5^{n+2}}{16}}_{\frac{5+(4n+3)5^{n+2}}{16}}$$

Així:

$$1\cdot 5^1+2\cdot 5^2+\dots+n\cdot 5^n+(n+1)5^{n+1}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{usem } P(n) \text{ certa}}}{=}$$

$$=\frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}+(n+1)5^{n+1}=\frac{5+[4n-1+16(n+1)]5^{n+1}}{16}=\frac{5+(20n+15)5^{n+1}}{16}=$$

$$=\frac{5+(4n+3)5\cdot 5^{n+1}}{16}=\frac{5+(4n+3)5^{n+2}}{16}$$

5. Proveu que $\forall n\geq 0$, $11^{n+2}+12^{2n+1}$ és divisible per 133.

En 1er. lloc hem de formalitzar la propietat. Observem que ser divisible per 133 vol dir que el nombre és un múltiple de 133, això és, 133 producte un altre enter. Així, $P(n)$ és:

$P(n): 11^{n+2}+12^{2n+1}=133\cdot M_n$, per a un cert $M_n\in\mathbb{N}$.

1er. Pas: Xequejem $P(0)$: $11^2+12^1=121+12=133=133\cdot M_0$ on $M_0=1$.

2on Pas: Suposem $P(n)$ cert per a un cert $n\geq 0$ i volem veure que $P(n+1)$ també ho és. Concretament, suposem que existeix $M_n\in\mathbb{N}$ i volem veure que $\exists M_{n+1}\in\mathbb{N}$ t.q.:

$P(n+1): 11^{n+3}+12^{2n+3}=133\cdot M_{n+1}$

Així:

$$11^{n+3}+12^{2n+3} = 11\cdot 11^{n+2}+12^{2n+3} \underset{\uparrow}{=} 11\left(133\cdot M_n - 12^{2n+1}\right)+12^{2n+3} =$$

usem $P(n)$ escrita com:

$$11^{n+2} = 133\cdot M_n - 12^{2n+1}$$

$$= 133\cdot 11\cdot M_n + 12^{2n+1}\underbrace{(12^2-11)}_{\substack{\shortparallel \\ 144-11=133}} = 133\cdot M_{n+1}, \text{ on } M_{n+1} = 11\cdot M_n + 12^{2n+1} \text{ és}$$

un nombre natural que podem calcular recurrentment:

$M_0 = 1$, $M_1 = 11\cdot M_0 + 12^{2\cdot 0+1} = 11\cdot 1 + 12 = 23$, $M_2 = 11\cdot M_1 + 12^{2\cdot 1+1} = \ldots$, etc.

Per tant, $P(n+1)$ és certa!