43 Sigui $f(x) = \ln(x+1)$. Aproximem el valor $f(0.5)$ amb un error menor que 10^{-4}.

Si calculem el polinomi de taylor en $c=0$ de $f(x)$, fins grau n, llavors $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, on $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$, i z està entre c i x (z depèn de x).

Encara que z sigui desconegut, anem a veure que podem controlar el tamany de $R_n(x)$ i garantir que $|R_n(x)| < \varepsilon$ si triem un n adequat, on ε és l'error que volem fer.

En el nostre cas:

$f(x) = \ln(x+1)$, $f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$, $f''(x) = (-1)(x+1)^{-2}$,

$f'''(x) = (-1)(-2)(x+1)^{-3} = (-1)^2 2!(x+1)^{-3}$, $f^{(IV)}(x) = (-1)^3 3!(x+1)^{-4}$, ...

Així: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$.

Llavors: $R_n(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!} \frac{(x-c)^{n+1}}{(z+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{(x-c)^{n+1}}{(z+1)^{n+1}}$

Fent $c=0$, $x=0.5 \Rightarrow |R_n(0.5)| = \frac{1}{n+1}\frac{(1/2)^{n+1}}{z+1} < \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,

on usem que z, malgrat ser desconegut, compleix $0 < z < 0.5$, i per tant $z+1 > 1$. Llavors volem per a quin n més petit tenim $|R_n(0.5)| < 10^{-4}$, això és, $\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \le 10^{-4}$.

Podem trobar aquest n per tanteix, però si fem $n=9$, observem que és fàcil veure que: $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1024} < \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10^3} = 10^{-4}$.

Finalment: $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \dots - x^8/8 + x^9/9 + R_9(x)$.

d'on: $\underset{\ln(1.5)}{\underset{\parallel}{f(0.5)}} = \sum_{k=1}^{9} (-1)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{k} \pm 10^{-4}$.