

Continuïtat

Jordi Villanueva

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

27 de gener de 2025

Definició (Notacions fonamental funcions reals d'una variable)

$$\boxed{f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)}$$

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ està ben definida en el punt } x\}$ **domini de** f .
- $y = f(x)$ és la **imatge de** $x \in D_f$ **per la funció** f .
- $X \subset D_f \implies f(X) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in X \text{ t.q. } y = f(x)\}$
Si X és un subconjunt del domini de f , llavors $f(X)$ és el **conjunt imatge de** X **per** f (conjunt format per les imatges de **TOTS** els punts que pertanyen al conjunt X).
- $R_f = \text{rang}(f) = f(D_f)$ és el **rang o recorregut de** f (conjunt de tots els valors que assoleix la funció f per punts del seu domini).
- $Y \subset \mathbb{R} \implies f^{-1}(Y) = \{x \in D_f : f(x) \in Y\}$ Si Y és un subconjunt (qualsevol) de $\mathbb{R}$, llavors $f^{-1}(Y)$ es el **conjunt anti-imatge de** Y **per** f (conjunt format pels punts del domini de f tals que quan calculem la seva imatge aquesta pertany a Y).

Exemple ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$)

- **Domini de f** : Si volem $f(x)$ ben definit cal que x compleixi:

$$x \geq 0 \quad \text{i a més} \quad 1 - x \geq 0 \iff 1 \geq x \iff x \leq 1.$$

$D_f = [0, 1]$ i, de fet, $f(x)$ és contínua en $[0, 1]$ (per generació).

- La funció f és **simètrica** respecte del punt $\frac{1}{2}$: Si agafem els punts $x_1 = a$ i $x_2 = 1 - a$ amb $a \in [0, 1]$, un és a l'esquerra i l'altre a la dreta de $\frac{1}{2}$ i el punt mig entre ambdós és $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}$. Llavors és té que $f(x_1) = f(x_2)$:

$$f(x_2) = f(1 - a) = \sqrt{1 - a} + \sqrt{1 - (1 - a)} = \sqrt{1 - a} + \sqrt{a} = f(x_1)$$

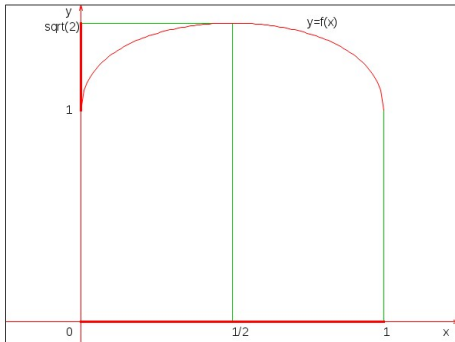
- En particular $f(0) = f(1) = 1$ i $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$.
- Tot seguit veiem:
 - $f'(x) > 0$, si $x \in (0, 1/2) \implies f$ estrictament creixent en $[0, 1/2]$.
 - $f'(x) < 0$, si $x \in (1/2, 1) \implies f$ estrict. decreixent en $[1/2, 1]$.
 - $f'(x) = 0 \iff x = 1/2$, on f hi té el seu màxim absolut en $[0, 1]$.
 - $x = 0$ i $x = 1$ són els mínims absoluts de f en $[0, 1]$.

Exemple ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ (continuació))

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \\&= \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{x}} \\&= \frac{(\sqrt{1-x})^2 - (\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x} + \sqrt{x})} \\&= \frac{(1-x) - (x)}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x} + \sqrt{x})} \\&= \frac{1-2x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x} + \sqrt{x})}\end{aligned}$$

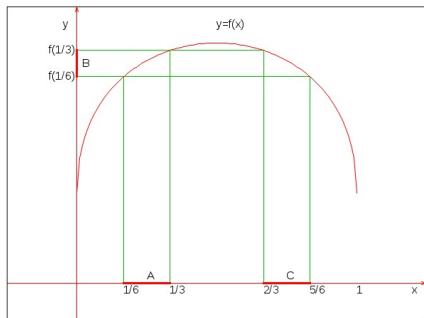
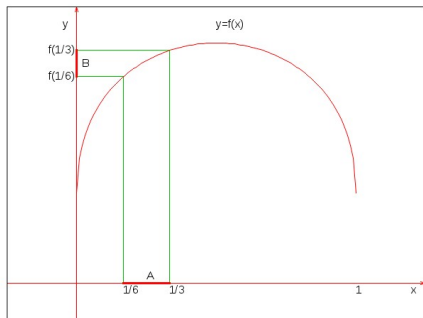
on usem: $(A - B) \times (A + B) = A^2 - B^2$ amb $A = \sqrt{1-x}$ i $B = \sqrt{x}$.

- $f'(0^+) = +\infty \implies f(x)$ té pendent més infinit quan x tendeix a zero per la dreta ($x \rightarrow 0^+$). En particular, direm que $\nexists f'(0^+)$.
- $f'(1^-) = -\infty \implies f(x)$ té pendent menys infinit quan x tendeix a ú per l'esquerra ($x \rightarrow 1^-$). En particular, direm que $\nexists f'(1^-)$.



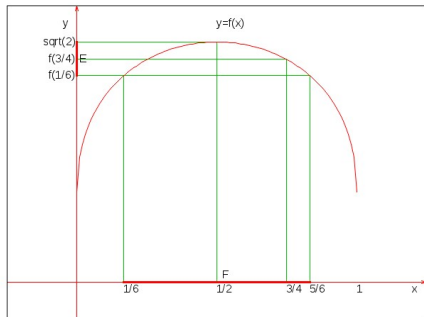
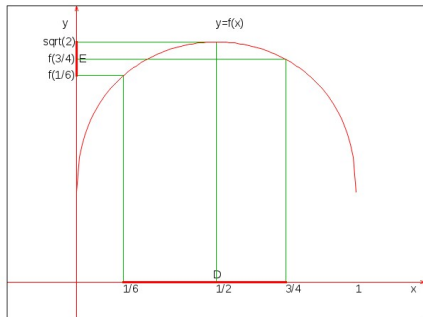
Exemple ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ (continuació))

- El rang o recorregut de f és $\text{rang}(f) = f(D_f) = f([0, 1]) = [1, \sqrt{2}]$.
- En paraules: Si movem els valors de x en l'interval $[0, 1]$ llavors $f(x)$ és mou en l'interval $[1, \sqrt{2}]$.
- En general: Si f és una funció contínua en l'interval $[a, b]$ llavors $f([a, b]) = [m, M]$ on $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ i $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$.



Exemple ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ (continuació))

- Si $A = [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$ llavors $B = f(A) = [f(\frac{1}{6}), f(\frac{1}{3})] = [\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}]$ és la imatge de l'interval $A = [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$ per la funció f .
- En canvi, $f^{-1}(B) = A \cup C$ on $C = [\frac{2}{3}, \frac{5}{6}]$: L'anti-imatge de l'interval B és unió de dos intervals. Els punts x tal que quan apliquem f van a parar dins de B són els que estan en A o bé en C .



Exemple ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ (continuació i fi))

- Si $D = [\frac{1}{6}, \frac{3}{4}]$ llavors $E = f(D) = [f(\frac{1}{6}), f(\frac{1}{2})] = [\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \sqrt{2}]$ és la imatge de D per la funció f . (El valor mínim de f en D és en el punt $\frac{1}{6}$ però el seu valor màxim és en $\frac{1}{2}$ i no en $\frac{3}{4}$.)
- L'anti-imatge per f de l'interval E és $F = f^{-1}(E) = [\frac{1}{6}, \frac{5}{6}]$.

Definició (Composició de funcions)

Siguin $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dues funcions donades. Definim la seva **composició** $g \circ f$ (g **composta amb** f) per:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (1er. \text{ actua } f \text{ i després } g)$$

El domini de $g \circ f$ és $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \text{ i } f(x) \in D_g\}$.

Podem visualitzar $g \circ f$ com **superposició de dos processos** f, g en que donada la **materia prima** x , llavors $(g \circ f)(x)$ dóna el **producte final**, però no veiem els passos intermitjos del procés de producció:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \\ & & \xrightarrow{(g \circ f)(x)} & & \end{array}$$

- Si volem que el procés f pugui actuar sobre x cal que x sigui del domini de f ($x \in D_f$).
- Per tal que el procés g pugui actuar sobre $f(x)$ cal que $f(x)$ sigui del domini de g ($f(x) \in D_g$).

Exemple (Composició de funcions)

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad g(x) = \frac{x-3}{x+5}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$$

$$\bullet (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \underbrace{g\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}_{\text{cal } x \neq 1} = \frac{\frac{x+1}{x-1} - 3}{\frac{x+1}{x-1} + 5} = \underbrace{\frac{-x+2}{3x-2}}_{\text{cal } x \neq \frac{2}{3}}$$

$D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{2}{3}\}$. Treiem $x = 1$ ja que $1 \notin D_f$. Treiem $x = \frac{2}{3}$ ja que si bé $\frac{2}{3} \in D_f$ llavors $f(\frac{2}{3}) = -5$ i per tant $f(\frac{2}{3}) \notin D_g$.

$$\bullet (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \underbrace{f\left(\frac{x-3}{x+5}\right)}_{\text{cal } x \neq -5} = \frac{\frac{x-3}{x+5} + 1}{\frac{x-3}{x+5} - 1} = \underbrace{\frac{-x-1}{4}}_{\text{sempre O.K.}}$$

$D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. Treiem $x = -5$ ja que $-5 \notin D_g$. En canvi, si $x \neq -5$ llavors $g(x) = \frac{x-3}{x+5}$ està ben definida i $g(x) \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (ho veiem perquè la fórmula $(f \circ g)(x)$ sempre està ben definida) i, per tant, $g(x) \in D_f$.

• Observeu, en particular, que $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$.

Definició (Funció injectiva / exhaustiva / bijectiva)

Sigui $f : A \rightarrow B$ una funció / transformació qualsevol que envia elements $x \in A$ del conjunt A a elements $f(x) \in B$ del conjunt B .

- *f injectiva en A sí. $\forall x_1, x_2 \in A$ t.q. $x_1 \neq x_2$ llavors $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
- *f exhaustiva entre A i B sí. $\forall y \in B, \exists x \in A$ t.q. $y = f(x)$.*
- *f bijectiva entre A i B sí. f és injectiva i exhaustiva.*

- f és injectiva en A si f envia parelles de punts diferents de A a parelles de punts diferents de B o, equivalentment, si no existeixen dos punts diferents de A amb la mateixa imatge quan els apliquem f .
- f és exhaustiva entre A i B si tot punt de B és imatge d'almenys un punt de A (pot ser imatge de més d'un punt de A) $\iff B = f(A)$.
- f és bijectiva entre A i B si tot punt de B és imatge d'exactament un punt de A (això és, f és 1 a 1 entre els conjunts A i B).
- Si f és injectiva en A i denotem $C = f(A) \subset B$, aleshores $f : A \rightarrow C$ és bijectiva (només en el cas que f sigui exhaustiva és té $C = B$).
- Sigui $f(x)$ funció real de variable real: f és injectiva en un interval $A \subset \mathbb{R}$ sí. f és estrictament creixent o estrictament decreixent en A .

Exemple

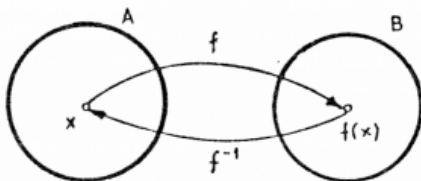
Considerem $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x^2$.

- $f(x)$ **no** és injectiva si triem $A = \mathbb{R}$, ja que $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (les parelles de punts de signe oposat tenen la mateixa imatge).
- $f(x)$ **sí** és injectiva en $A = [0, +\infty)$ ja que $f(x)$ és estrictament creixent en $[0, +\infty)$.
- $f(x)$ **sí** és injectiva en $A = (-\infty, 0]$ ja que $f(x)$ és estrictament decreixent en $(-\infty, 0]$.
- $f(x)$ és injectiva en tot interval $A \subset \mathbb{R}$ tal que $A \subset [0, +\infty)$ o bé $A \subset (-\infty, 0]$.
- $f(x)$ **no** és exhaustiva entre $A = \mathbb{R}$ i $B = \mathbb{R}$ ja que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (si $y < 0$, llavors y no és imatge per f de cap $x \in \mathbb{R}$).
- $f(x)$ **sí** és exhaustiva (però no injectiva) entre $A = \mathbb{R}$ i $B = [0, +\infty)$.
- $f(x)$ **sí** és bijectiva entre $A = [0, +\infty)$ i $B = [0, +\infty)$, ja que $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ és una funció 1 a 1.
- $f(x)$ també és bijectiva entre $f : (-\infty, 0] \rightarrow [0, +\infty)$.
- $f(x)$ també és bijectiva entre $f : [0, 2] \rightarrow [0, 4]$. ($f([0, 2]) = [0, 4]$).

Definició (Funció inversa)

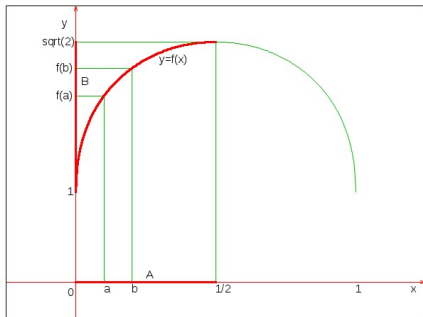
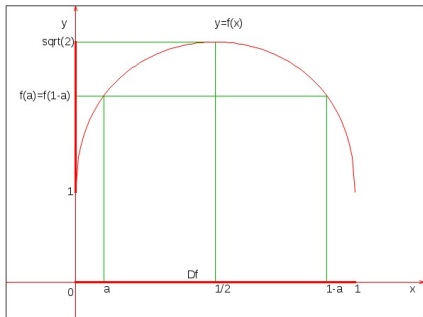
Si $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció injectiva en $A \subset D_f$ i denotem per $B = f(A)$, llavors $f : A \rightarrow B$ és **1 a 1 / bijectiva** i existeix $f^{-1} : B \rightarrow A$ **funció inversa de f** (inversa respecte de la composició) verificant:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in B$$



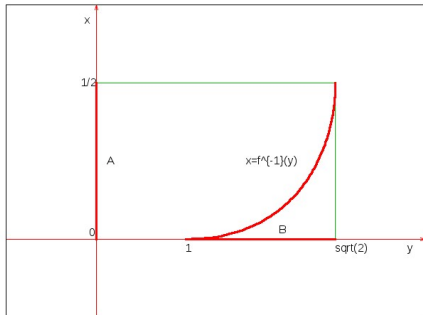
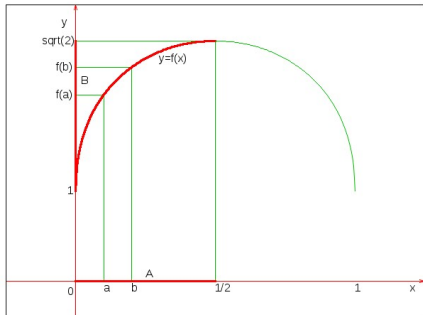
En general no és possible calcular explícitament la inversa f^{-1} d'una funció f donada. En els casos en que sí que és possible, ho fem així: Considerem la relació $f(x) = y$. Si som capaços d'aïllar x en funció de y a partir d'aquesta relació obtenim la inversa de f : $x = f^{-1}(y)$.

• P. ex.: $f(x) = x^2$ entre $f : [0, 2] \rightarrow [0, 4]$ té inversa $f^{-1} : [0, 4] \rightarrow [0, 2]$ donada per $f^{-1}(y) = +\sqrt{y}$ que surt d'aïllar x de $f(x) = x^2 = y$.



Exemple ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$)

- $f(x)$ no és invertible en tot el seu domini, $D_f = [0, 1]$, degut a la seva simetria respecte del punt $\frac{1}{2}$: $f(a) = f(1-a)$, $\forall a \in [0, 1]$.
- $f(x)$ sí que és invertible en l'interval $A = [0, \frac{1}{2}]$ ja que és una funció estrictament creixen en A .
- $B = f(A) = [1, \sqrt{2}] \implies f : A \rightarrow B$ és bijectiva i la inversa f^{-1} està definida entre els conjunts $f^{-1} : B \rightarrow A$.



Exemple ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ (continuació))

Calculem explícitament $f^{-1} : [1, \sqrt{2}] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ aïllant x en $f(x) = y$.

$$\begin{aligned}
 f(x) = y &\iff \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = y \iff \sqrt{1-x} = y - \sqrt{x} \\
 &\iff 1-x = (y - \sqrt{x})^2 = y^2 - 2y\sqrt{x} + x \\
 &\iff 2x - 2y\sqrt{x} + y^2 - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Per tant l'expressió $X = \sqrt{x}$ és solució d'una equació de 2on grau.

Exemple ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ (continuació i fi))

Concretament $X = \sqrt{x}$ verifica:

$$2X^2 - 2yX + y^2 - 1 = 0 \implies X = \frac{2y \pm \sqrt{(2y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (y^2 - 1)}}{2 \cdot 2}$$

D'aquí obtenim:

$$\sqrt{x} = X = \frac{y \pm \sqrt{2 - y^2}}{2} \implies x = f^{-1}(y) = \left(\frac{1}{2} \left(y - \sqrt{2 - y^2} \right) \right)^2.$$

*Per definir f^{-1} triem - en $\pm$ perquè $y = 1 \implies x = f^{-1}(y) = 0$.
(Si triem + en $\pm$ obtenim $f^{-1} : [1, \sqrt{2}] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$.)*

Exercici ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$)

*Considereu l'interval $I = [a, b] \subset [1, \sqrt{2}]$. La seva anti-imatge per f és
 $f^{-1}(I) = [f^{-1}(a), f^{-1}(b)] \cup [1 - f^{-1}(b), 1 - f^{-1}(a)]$
on $f^{-1} : [1, \sqrt{2}] \rightarrow [0, 1/2]$ és la inversa que hem calculat.*

Exemple (Inversa i composició de funcions)

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad g(x) = \frac{x-3}{x+5}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$$

- Calculem g^{-1} trobant x en termes de y solució de $g(x) = y$

$$g(x) = \frac{x-3}{x+5} = y \iff x-3 = (x+5)y \iff (1-y)x = 3+5y$$

$$\text{Obtenim } x = \frac{3+5y}{1-y}. \text{ Per tant, } g^{-1}(y) = \frac{3+5y}{1-y} \text{ i } D_{g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

- Calculem $g^{-1} \circ f$ i el seu domini:

$$(g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}(f(x)) = g^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{3+5\frac{x+1}{x-1}}{1-\frac{x+1}{x-1}} = -4x-1$$

cal $x \neq 1$

$$\text{Per tant, } D_{g^{-1} \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Funcions elementals

Les **funcions elementals simples** són:

- Polinomis.
- Exponencials i logarítmes: e^x i $\ln x$.
També $a^x = e^{x \ln a}$ i $\log_a x = \ln x / \ln a$, si $a > 0$.
- Trigonòmriques: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$.
- Trigonòmriques inverses: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$.
- Hiperbòliques i hiperbòliques inverses:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

i les seves inverses $\operatorname{argsinh} x$, $\operatorname{argcosh} x$, $\operatorname{argtanh} x$.

- Usarem la terminologia **funcions elementals** per referir-nos a les **combinacions** de funcions elementals simples definides mitjançant **operacions elementals** ($+$, $-$, $*$, $/$) i **composicions de funcions**.
- També considerarem d'altres funcions **no elementals simples** que juguem un paper destacat en el càlcul. P. ex.: $|x| = +\sqrt{x^2}$ (valor absolut), $\operatorname{sign}(x)$ (signe), $E(x)$ (part entera), $\mathcal{D}(x)$ (funció de Dirichlet).

Exemple (Funcions elementals)

- *Els polinomis.*
- *Les funcions*

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad \cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)}.$$

- *Potències com:*

$$(\tan(x))^{\sin(x)} = \left(e^{\ln(\tan(x))}\right)^{\sin(x)} = e^{\sin(x) \cdot \ln(\tan x)},$$

per aquells $x \in \mathbb{R}$ tals que $\tan(x) > 0$.

- *Composicions com la següent:*

$$f(x) = \exp\left(\sqrt{1 + \cos x} + \frac{\sinh x}{\ln x}\right),$$

també ho són dins del seu domini de definició.

Problema 3

Trobeu el domini de les funcions següents.

❶ $f(x) = \ln(\sin x)$. Solució: $D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2\pi k, 2\pi k + \pi)$.

❷ $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Solució: $D_f = \mathbb{R}$.

❸ $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{2-x}{\sqrt{2+x}}}$. Solució: $D_f = (-2, -1) \cup [1, 2]$.

Resolució: $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+1} \geq 0, 2+x > 0, 2-x \geq 0 \right\}$.

(a) $2+x > 0 \iff x > -2 \iff x \in (-2, +\infty)$.

(b) $2-x \geq 0 \iff x \leq 2 \iff x \in (-\infty, 2]$.

(c) $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$ és cert en $x = 1$, no ho és en $x = -1$, i sí ho és quan el signe de $x-1$ és igual al signe de $x+1$.

- Signe de $x-1$ i de $x+1$ són positius si $x > 1 \iff x \in (1, +\infty)$.

- Signe de $x-1$ i de $x+1$ són negatius si $x < -1 \iff x \in (-\infty, -1)$.

D_f surt d'interseccar els tres conjunts dels apartats (a), (b), (c).

❹ $f(x) = \sqrt{|x+2| - |x+1|}$. Solució: $D_f = [-3/2, +\infty)$.

5 $f(x) = \ln(3 - |2x - |x - 1||)$. Solució: $D_f = [-3/2, +\infty)$.

Resolució: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3 - |2x - |x - 1|| > 0\}$ i l'estudi detallat d'aquest conjunt els teniu més endavant en el problema 2.

6 $f(x) = \sqrt{\cos(5x)}$. Solució: $D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5} \right]$.

Resolució: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \cos(5x) \geq 0\}$.

D'entrada, tenim que el $\cos(y) \geq 0$ si $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i, degut al caràcter 2π periòdic del cosinus, també en tot interval de la forma $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, per a tot $k \in \mathbb{Z}$. Per tant:

$y \in \mathbb{R}$ és tal que $\cos(y) \geq 0 \iff y \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$.

Ara toca substituir y per $5x$. Tenim doncs:

$$5x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right] \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}\right].$$

7 $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$. Solució: $D_f = (-2, 0]$.

8 $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{1+x}\right)$. Solució: $D_f = [-1/2, +\infty)$.

Resolució: Com que $\arcsin(y)$ està definit sí i $-1 \leq y \leq 1$, llavors:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{x}{1+x} \leq 1 \right\} = [-1/2, +\infty).$$

La funció valor absolut

$$|x| = \begin{cases} +x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (|0| = 0, |x| > 0 \text{ si } x \neq 0.)$$

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$ es compleix: $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ i $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$.
- La **distància** entre dos punts $x, y \in \mathbb{R}$ ve donada per $|x - y|$.
Exemple: $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < |x - 3|\}$ són els punts x que disten menys de 1 que de 3. Com que el punt mig és $\frac{1+3}{2} = 2$ la solució és $A = (-\infty, 2)$.
- Si $f(x)$ és una funció qualsevol i calculem 1er $(f(x))^2$ i després fem l'arrel quadrada, el resultat és:

$$+\sqrt{(f(x))^2} \neq f(x), \quad +\sqrt{(f(x))^2} = |f(x)|.$$

- Aquesta fórmula permet calcular $\frac{d|f(x)|}{dx}$ si $f(x) \neq 0$ i $\exists f'(x)$. P. ex.:

$$f(x) = x^2 - 1 \implies |f(x)| = \sqrt{(x^2 - 1)^2} \implies \frac{d|f(x)|}{dx} = \frac{2x(x^2 - 1)}{\sqrt{(x^2 - 1)^2}}$$

Problema 2

Determineu els $x \in \mathbb{R}$ definits per les expressions següents.

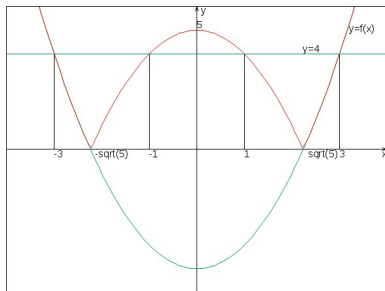
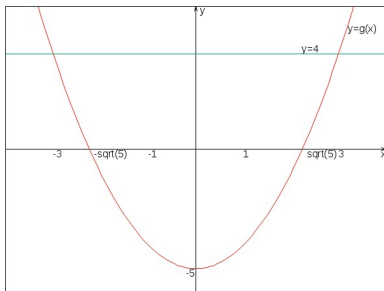
- ❶ $3 - |2x - |x - 1|| \geq 0$. Solució: $[-2/3, 2]$.
- ❷ $||2x + 1| - (3x + 3)| > 0$. Sol.: $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{4}{5}\} = (-\infty, -\frac{4}{5}) \cup (-\frac{4}{5}, +\infty)$.
- ❸ $|x| = -x$. Solució: $x \leq 0 \iff x \in (-\infty, 0]$.
- ❹ $|x^2 - 1| < \frac{1}{2}$. Solució: $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$.

Resolem primer una versió modificada de l'apartat 4 per simplificar-ne la visualització gràfica i després l'apartat 1. La clau en els dos casos és la identificació gràfica de la funció involucrada.

- ❹ (Modificat) $|x^2 - 5| < 4$. Solució: $(-3, -1) \cup (1, 3)$.

Volem trobar el conjunt $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 4\}$ on $f(x) = |x^2 - 5|$. La clau és pintar la gràfica de la funció $y = f(x)$ i veure per a quins x queda estrictament per sota de la de $y = 4$. Per fer-ho, definim $g(x) = x^2 - 5$. És clar que

$$f(x) = g(x), \quad \text{si } g(x) \geq 0; \quad f(x) = -g(x), \quad \text{si } g(x) \leq 0.$$



- 4 (Continuació) Les gràfiques de $g(x) = x^2 - 5$ i de $f(x) = |g(x)|$ són a la part superior. Per pintar la de $f(x)$ a partir de la de $g(x)$ només cal canviar de signe la part negativa de la gràfica de $g(x)$. Per tant, si volem identificar el conjunt $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 4\}$, cal trobar els punts on $f(x) = 4 \iff x \in \{-3, -1, 1, 3\}$:

$$f(x) = 4 \iff \begin{cases} x^2 - 5 = 4 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3 \\ x^2 - 5 = -4 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1 \end{cases}$$

Finalment gràficament veiem que $A = (-3, -1) \cup (1, 3)$.

- 1 $A = \{f(x) \geq 0\}$ on $f(x) = 3 - |2x - |x - 1||$. Cal treure els valors absoluts de la definició de $f(x)$, començant pel més interior. Quan treiem el valor absolut en alguna expressió el normal (no sempre) és que cada cas considerat trenqui en dos sub-casos diferents.

Observem: $|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - x, & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$. Llavors:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - |2x - (x - 1)|, & \text{si } x \geq 1 \\ 3 - |2x - (1 - x)|, & \text{si } x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 - |x + 1|, & \text{si } x \geq 1 \\ 3 - |3x - 1|, & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

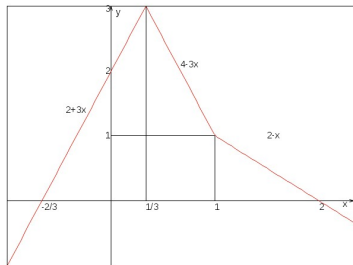
Notem: $|3x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & \text{si } x \geq 1/3 \\ 1 - 3x, & \text{si } x \leq 1/3 \end{cases} \implies$ el cas $x \leq 1$ de

$f(x)$ trenca en dos sub-casos: $1/3 \leq x \leq 1$ i $x \leq 1/3$. En canvi:

$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \geq -1 \\ -(x + 1), & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \implies$ el cas $x \geq 1$ de $f(x)$ **NO**

trenca en dos sub-casos, ja que $x \geq 1 \implies x \geq -1$. Tenim:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - (x + 1), & \text{si } x \geq 1 \\ 3 - (3x - 1), & \text{si } 1/3 \leq x \leq 1 \\ 3 - (1 - 3x), & \text{si } x \leq 1/3 \end{cases} = \begin{cases} 2 - x, & \text{si } x \geq 1 \\ 4 - 3x, & \text{si } 1/3 \leq x \leq 1 \\ 2 + 3x, & \text{si } x \leq 1/3 \end{cases}$$



1 (Continuació) A dalt tenim la gràfica de $f(x)$ (lineal a trossos):

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2 - x, & \text{si } x \geq 1 \\ 4 - 3x, & \text{si } 1/3 \leq x \leq 1 \\ 2 + 3x, & \text{si } x \leq 1/3 \end{array} \right\}.$$

Com $A = \{f(x) \geq 0\}$, conjunt de punts x on $f(x)$ és positiva o zero, ens cal trobar els punts on $f(x)$ s'anul·la. Gràficament són:

$$2 - x = 0 \iff x = 2, \quad 2 + 3x = 0 \iff x = -2/3.$$

Finalment, $A = [-2/3, 2]$.

Límits de funcions

Definició (Límit d'una funció en un punt)

Sigui $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funció definida en un interval obert $A = (a, b)$ i $c \in (a, b)$ un punt de l'interval i $L \in \mathbb{R}$. Direm que:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q., si } 0 < |x - c| < \delta, |f(x) - L| < \varepsilon$$

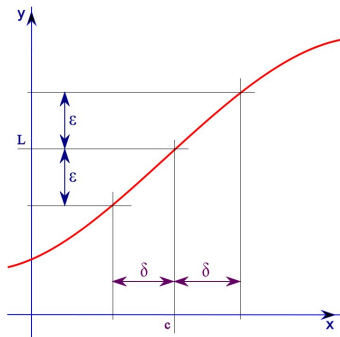
Comentari (Interpretació definició límit)

- *Sintèticament, la definició diu: " $x \rightarrow c, x \neq c \implies f(x) \rightarrow L$ ". Quan x s'apropa o tendeix a c llavors $f(x)$ s'apropa a L , però ho fa independentment del valor de $f(c)$. ($\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ no depèn del valor de $f(c)$). De fet no cal que $f(x)$ estigui definida en $x = c$)*
- *En la definició de límit tant el punt c com el límit L han de ser finits (no pas $\pm\infty$). Si el límit L "dóna" $\pm\infty$ hem de concloure que no existeix. Podem definir el concepte de **límit infinit o a l'infinit**, però llavors cal adaptar la definició (veure més endavant).*

Comentari (Interpretació definició límit (continuació))

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.q., si } 0 < |x - c| < \delta, |f(x) - L| < \varepsilon$$

- ε és un nombre tant petit com volguem i que mesura quant gran pot ser, com a molt, la distància entre $f(x)$ i el límit L :
$$\text{dist}(f(x), L) = |f(x) - L| .$$
- $\delta = \delta(\varepsilon)$ és un nombre petit que depèn del valor de ε triat i que ens diu quan proper ha de ser x de c per tal que $f(x)$ sigui a distància menor que ε de L .
- $\delta = \delta(\varepsilon)$ compleix $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0^+$ quan $\varepsilon \rightarrow 0^+$.
- Trobar la fórmula concreta de la funció $\delta(\varepsilon)$ és el que cal fer si en un exemple ens demanen que **apliquem la definició de límit**.



Comentari (Interpretació definició límit (continuació))

- $\varepsilon > 0$ defineix un interval de radi ε centrat en el punt L de l'eix y .
- Si calculem l'anti-imatge de l'interval $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ per la funció f (gràfica en vermell) obtenim un interval entorn del punt c (però que en general no està centrat en c com el de la figura).
- El valor de $\delta = \delta(\varepsilon)$ de la definició és tal que l'interval $[c - \delta, c + \delta]$ estigui contingut en l'anti-imatge $f^{-1}([L - \varepsilon, L + \varepsilon])$.

Exemple

Apliqueu la definició de límit i vegeu que $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0$.

- *En aquest cas $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $c = 0$ i $L = 0$.*
- *Hem de respondre a la següent qüestió: Qui és $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que:*

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- *Com que $|x - c| = |x|$ el punt de partida és la condició $|x| < \delta$.*
- *Calculem $|f(x) - L|$ i el relacionem amb δ via la condició $|x| < \delta$:*

$$|f(x) - L| = |\sqrt[3]{x} - 0| = |x|^{1/3} < \delta^{1/3}.$$

- *Si ens fixem en l'expressió final, $\delta^{1/3}$, volem que sigui ε . És clar que això ho aconseguim triant $\delta^{1/3} = \varepsilon$.*
- *Si aïllem δ d'aquesta relació, obtenim $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^3$ que és la fórmula que buscavem.*

Comentari

Si volem provar que $\nexists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$, llavors hem de trobar valors de x arbitràriament propers a c tals que ...

... o bé $f(x)$ tendeix a dos valors diferents de L quan $x \rightarrow c$.

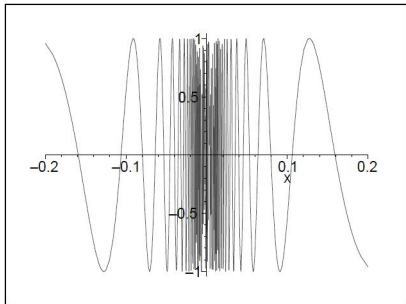
... o bé $f(x)$ tendeix a $\pm\infty$ quan $x \rightarrow c$.

Exemple (La funció de Dirichlet)

$$f(x) = \mathcal{D}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q} & (\text{nombres racionals}) \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & (\text{nombres irracionals}) \end{cases}.$$

$\nexists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ per a cap $c \in \mathbb{R}$. La raó és que podem aproximar tant com volguem c per nombres racionals i irracionals.

- Tant a prop com volguem de c hi ha infints valors de x racionals. Si tendim a c per valors de $x \in \mathbb{Q}$ llavors $f(x) = 0$. Per tant, $\mathbb{Q} \ni x \rightarrow c \implies f(x) \rightarrow 0$ i el límit hauria de ser $L = 0$.*
- Tant a prop com volguem de c hi ha infints valors de x irracionals. Si tendim a c per valors de $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ llavors $f(x) = 1$. Per tant, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ni x \rightarrow c \implies f(x) \rightarrow 1$ i el límit hauria de ser $L = 1$.*



Exemple ($\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ (Ídem $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \cos(1/x)$))

- $f(x) = \sin(1/x)$ és una funció (no definida en $x = 0$) que quan $x \rightarrow 0$ **oscil·la infinit cops** entre $y = -1$ i $y = 1$. Aquest caràcter oscil·latori fa que el seu límit en $c = 0$ no existeixi.
- Interpretació gràfica: calcular $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ vol dir que ens posem sobre la gràfica $y = f(x)$, fem $x \rightarrow 0$ i mirem si quan arribem a zero ho fem amb una alçada $y = L$ determinada. Llavors L és el valor del límit. Si la funció oscil·la com en la figura, quan tendim a zero aquesta alçada límit no està definida i el límit no existeix.

Exemple ($\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ (continuació i fi))

- Fem $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Els valors de la successió x_n compleixien $x_n \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow \infty$. Per aquests valors de $x_n \rightarrow 0$ tenim:

$$f(x_n) = \sin(1/x_n) = \sin(n\pi) = 0 \rightarrow 0 = L \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Si triem els valors de $x = x_n$ tendint a zero ens estem aproximant a $x = 0$ sobre punts de la gràfica $y = f(x)$ a alçada $L = 0$. Per tant, si el límit existeix ha de ser $L = 0$.

- Fem $\tilde{x}_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Els valors de la successió $\tilde{x}_n$ compleixien $\tilde{x}_n \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow \infty$. Per aquests valors de $\tilde{x}_n \rightarrow 0$ tenim:

$$f(\tilde{x}_n) = \sin(1/\tilde{x}_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \rightarrow 1 = \tilde{L} \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Si triem els valors de $x = \tilde{x}_n$ tendint a zero ens estem aproximant a $x = 0$ sobre punts de la gràfica $y = f(x)$ a alçada $\tilde{L} = 1$. Per tant, si el límit existeix ha de ser $\tilde{L} = 0$.

Definició (Límits laterals d'una funció en un punt)

- $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L^+$ és el límit de $f(x)$ en $x = c$ per la dreta:
 $f(x) \rightarrow L^+$ quan $x \rightarrow c$ però considerant valors de $x > c$.
- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L^-$ és el límit de $f(x)$ en $x = c$ per l'esquerra:
 $f(x) \rightarrow L^-$ quan $x \rightarrow c$ però considerant valors de $x < c$.

Proposició (Relació límit / límits laterals)

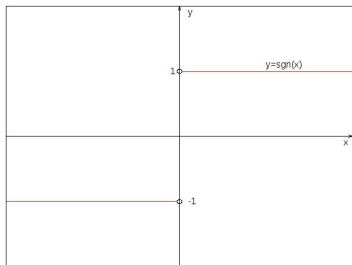
$$\exists L = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \iff \exists L^+ = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x), \exists L^- = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x), L = L^+ = L^-$$

(El límit existeix sí. els límits laterals existeixen i coincideixen.)

Corol·lari (Criteris no existència del límit)

Podem concloure que $\nexists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ si és dona un dels casos:

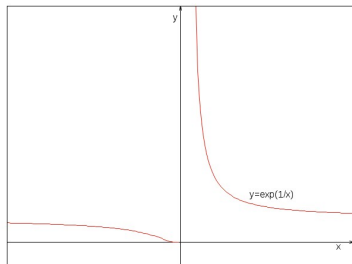
- $\nexists \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ o bé $\nexists \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$. (Inclou si un límit és $\pm\infty$.)
- $\exists L^+ = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x), \exists L^- = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ però $L^+ \neq L^-$.



Exemple (La funció signe)

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \left\{ \begin{array}{ll} +1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{array} \right\} \quad (\operatorname{sgn}(0) \text{ no està definit.})$$

$$\left. \begin{array}{l} L^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ L^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1 \end{array} \right\} \xRightarrow{L^+ \neq L^-} \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x).$$



Exemple ($f(x) = e^{1/x}$)

- $L^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = e^{1/0^-} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$
- $L^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = e^{1/0^+} = e^{+\infty} = +\infty.$

$$L^+ = +\infty \implies \nexists \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} \implies \nexists \lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x}.$$

Extensions del concepte de límit. Quadre resum.

- Segons la posició de c respecte l'interval (a, b) :

Normal	Lateral esquerre	Lateral dret
$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \star$ $(a, b) \ni c$ $0 < x - c < \delta$	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \star$ (a, c) $c - \delta < x < c$	$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \star$ (c, b) $c < x < c + \delta$

- Segons si c és $+\infty$ 0 $-\infty$:

Normal	en $-\infty$	en $+\infty$
$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \star$ $(a, b) \ni c$ $0 < x - c < \delta$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \star$ $(-\infty, b)$ $x < -N$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \star$ (a, ∞) $x > N$

- Segons els possibles valors que pot tenir L :

Finit	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \star} f(x) = L \in \mathbb{R}$ $ f(x) - L < \varepsilon$	$\lim_{x \rightarrow \star} f(x) = -\infty$ $f(x) < -M$	$\lim_{x \rightarrow \star} f(x) = +\infty$ $f(x) > M$

Extensions del concepte de límit. Comentaris.

- El quadre anterior permet escriure les 15 definicions de límit. P. ex.:

- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si i només si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que
 $c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

- $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$ si i només si $\forall M > 0, \exists \delta = \delta(M) > 0$ tal que
 $c < x < c + \delta \Rightarrow f(x) < -M.$

(Què el límit sigui $-\infty$ vol dir que $f(x)$ es fa “tant negatiu” com volguem quan x tendeix a c per la dreta. Per tant, aquí entenem que $M > 0$ el podem agafar tant gran com volguem i $\delta(M) > 0$ és petit i tendeix a zero quan M tendeix a $+\infty$).

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si i només si $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) > 0$ tal que
 $x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

(Calcular límit quan $x \rightarrow +\infty$ vol dir que ara és el valor de x el que podem agafar tant gran com volguem i per tant $N(\varepsilon) > 0$ tendeix a $+\infty$ quan ε tendeix a zero.)

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ si i només si $\forall M > 0, \exists N = N(M) > 0$ tal que
 $x < -N \Rightarrow f(x) > M.$

Càlcul de límits

- **Recepta bàsica:** El càlcul del límit en un punt d'una **funció elemental** (combinacions de funcions elementals simples via operacions bàsiques i composicions de funcions) el fem **avaluant les funcions involucrades en el punt corresponent**, sempre que aquesta avaluació es faci dins del domini de definició d'aquestes funcions i que no doni lloc a cap **indeterminació**.

(De fet, en tots aquests casos estem dient que la funció $f(x)$ és contínua i que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.)

- **Indeterminacions típiques:**

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad +\infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad 1^\infty \quad 0^0 \quad \infty^0$$

- **No són indeterminacions:**

$$\frac{a}{\infty} = 0 \quad 0^{+\infty} = 0 \quad \frac{1}{0} = \infty \quad a^{+\infty} = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < a < 1 \\ +\infty, & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Proposició (Operacions elementals amb límits)

Suposem: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \in \mathbb{R}$ *i* $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = K \in \mathbb{R}$

Llavors:

❶ $\lim_{x \rightarrow c} b \cdot f(x) = b \cdot L \quad \forall b \in \mathbb{R}$

❷ $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = L \pm K$

❸ $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot K$

❹ $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K} \quad \text{si } K \neq 0$

❺ $\lim_{x \rightarrow c} f(x)^n = L^n \quad \text{si } n \in \mathbb{N}$

Exemple

*Si $p(x)$ i $q(x)$ són dos polinomis i $q(c) \neq 0$, llavors $\lim_{x \rightarrow c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$
el calculem doncs per simple substitució.*

Proposició (Límit de la composició de funcions)

Suposem: $\lim_{x \rightarrow C} \mathbf{g}(x) = \mathbf{L}$ i $\lim_{x \rightarrow \mathbf{L}} f(x) = f(\mathbf{L})$

llavors: $\lim_{x \rightarrow C} f(\mathbf{g}(x)) = f(\mathbf{L})$

Comentari

- De fet, $\lim_{x \rightarrow \mathbf{L}} f(x) = f(\mathbf{L})$ vol dir que f és contínua en el punt $\mathbf{L}$.
- El resultat diu que **podem permutar funcions contínues i límits**:

Si $\lim_{x \rightarrow C} \mathbf{g}(x) = \mathbf{L}$ i f és contínua en el punt $\mathbf{L}$ llavors

$$\lim_{x \rightarrow C} f(\mathbf{g}(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow C} \mathbf{g}(x)\right) = f(\mathbf{L})$$

- El resultat **NO** és cert si f no és contínua en el punt $\mathbf{L}$:

$$\lim_{x \rightarrow C} \mathbf{g}(x) = \mathbf{L} \quad i \quad \lim_{x \rightarrow \mathbf{L}} f(x) = K \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow C} f(\mathbf{g}(x)) = K$$

Vegeu l'exemple que segueix.

Exemple $(\lim_{x \rightarrow C} \mathbf{g}(x) = \mathbf{L} \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow \mathbf{L}} f(x) = K \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow C} f(\mathbf{g}(x)) = K)$

- Fem $\mathbf{g}(x) \equiv \mathbf{0}$ i $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow C} \mathbf{g}(x) = \lim_{x \rightarrow C} \mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathbf{L}$
- $\lim_{x \rightarrow \mathbf{L}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \mathbf{0}} 1 = 1 = K \neq 0 = f(0) = f(\mathbf{L})$
(f no contínua en $\mathbf{L} = \mathbf{0}$)
- $(f \circ \mathbf{g})(x) = f(\mathbf{g}(x)) = f(0) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f \circ \mathbf{g} \equiv 0$
- $\lim_{x \rightarrow C} f(\mathbf{g}(x)) = \lim_{x \rightarrow C} 0 = 0 \neq 1 = K$

Proposició (Teorema de l'encaix o de l'entrepà)

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x$ prou proper a $x = c$
(no cal que sigui cert per a $x = c$.)
- $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$.

Lavors: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

Corol·lari (del teorema de l'encaix)

Suposem $f(x) = m(x) \cdot k(x)$ on:

- $\lim_{x \rightarrow c} k(x) = 0$ té límit zero.
- $|m(x)| \leq M$ està acotada quan x és prou proper a $x = c$
(però no té perquè existir $\lim_{x \rightarrow c} m(x)$.)

Lavors: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$

El corol·lari surt de: $\underbrace{-M \cdot |k(x)|}_{h(x)} \leq f(x) \leq \underbrace{M \cdot |k(x)|}_{g(x)}$.

Exemple ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

- Usant trigonometria elemental no costa pas gaire veure que (detalls a la pàgina següent):

$$\boxed{\cos(x) \sin(x) \leq x \leq \tan(x)} \quad \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}.$$

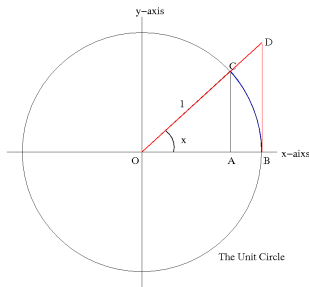
- $\cos(x) \sin(x) \leq x \implies \boxed{\frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}} \quad \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2}$

- $x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \implies \boxed{\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x}} \quad \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2}$

- Per les simetries del sinus i del cosinus les dues desigualtats també valen si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

- $\boxed{\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}} \quad \text{si } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1 \implies \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$



Demostració ($\cos(x) \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$)

- Si x és l'angle de la figura (en radians) l'àrea del tros de cercle de radi $R = 1$ determinat per OBC és $\Delta_1 = \frac{x}{2\pi} \times \pi R^2 = \frac{x}{2}$.
(Si $x = 2\pi$ ha de donar $\pi R^2 = \pi$.)
- Àrea triangle vèrtexs OAC : $\Delta_2 = \frac{\overline{OA} \times \overline{AC}}{2} = \frac{\cos(x) \times \sin(x)}{2}$
- Àrea triangle vèrtexs OBD : $\Delta_3 = \frac{\overline{OB} \times \overline{BD}}{2} = \frac{1 \times \tan(x)}{2}$
- És clar que $\Delta_2 \leq \Delta_1 \leq \Delta_3$

Comentari: També podem abordar aquests exemples via la fórmula de L'Hôpital, però molts cops aplicar L'Hôpital genera expressions "monstre" que podem evitar usant raonaments com els que segueixen.

Exemple (Tractament d'indeterminacions)

- $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ usant el lema de l'entrepà (vegeu-lo més endavant com exemple discontinuïtat evitable).

- Usant que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ tenim (multipliquem numerador i denominador per $1 + \cos x$ i usem $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

- Aplicant Ruffini tenim $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ i ho podem usar per cancel·lar el zero del denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3.$$

Exemple (Tractament d'indeterminacions (continuació))

- Podem racionalitzar l'expressió següent multiplicant numerador i denominador per $\sqrt{x+1} + 1$ per tal d'eliminar l'arrel (aquest truc, $(A-B) \times (A+B) = A^2 - B^2$, ja l'hem usat anteriorment):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \times \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (1)^2}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

- La definició del nombre e via successions és $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (o, més en general $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{A}{n}\right)^n = e^A$). La versió en “variable contínua” (per funcions) d'aquest límit és:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

El segon surt del primer prenent logaritme neperià i usant que en ser el logaritme funció contínua podem permutar límit i funció.

Problema 11(i,k)

Calculeu els límits següents usant, si us cal:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

$$(i) \quad L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{2}{\sin^2 x} \right) = -\infty + \infty \quad (\text{indeterminació}).$$

- $\cos x - 1 < 0$ si $x \approx 0$ però $x \neq 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$.
- $\sin^2 x > 0$ si $x \approx 0$ però $x \neq 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sin^2 x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

Posem denominador comú:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + 2(\cos x - 1)}{(\cos x - 1) \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x) + 2(\cos x - 1)}{(\cos x - 1) \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\cos x - 1)^2}{(\cos x - 1) \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x^2}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(k) \quad L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{\operatorname{cosec}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{\frac{1}{\sin(x)}} = 1^\infty \quad (\text{indetermin.}).$$

La idea és usar que si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, on $g(x)$ funció qualsevol:

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{1/u} = e \quad \underbrace{\implies}_{u=g(x)} \quad \lim_{x \rightarrow a} (1+g(x))^{1/g(x)} = e.$$

Fent $g(x) = \frac{-2x}{2+x}$ i usant $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, és té:

$$\frac{2-x}{2+x} = \frac{(2+x) - 2x}{2+x} = 1 + \frac{-2x}{2+x} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{\frac{2+x}{-2x}} = e.$$

Finalment:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{\frac{2+x}{-2x}} \right)^{\frac{-2x}{2+x} \cdot \frac{1}{\sin(x)}} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{\frac{2+x}{-2x}} \right)^{L'} = e^{-1},$$

on, usant que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$:

$$L' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{2+x} \cdot \frac{1}{\sin(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{2+x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \right) = -1 \cdot 1 = -1,$$

Definició (Funció contínua en un punt)

Direm que $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ és **contínua** en el punt $c \in (a, b)$ sí.

$$\exists L = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \quad i \quad L = f(c)$$

Comentari

- 1 Si f no és contínua en c direm que f és discontinua en c .
- 2 Si volem definir $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funció contínua en els extrems de l'interval cal modificar la definició usant límits laterals:

f és contínua en a sí. $\exists L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad i \quad L = f(a)$

f és contínua en b sí. $\exists L = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \quad i \quad L = f(b)$

- 3 f és contínua en un conjunt si es contínua en tots els seus punts.

Proposició (Propietats bàsiques de la continuïtat)

- 1 **Operacions elementals:** f i g contínues en c . Llavors $b \cdot f$ ($\forall b \in \mathbb{R}$), $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (si $g(c) \neq 0$) són contínues en c .
- 2 **Composició de funcions:** f contínua en c , g contínua en $f(c)$. Llavors $g \circ f$ és contínua en c .
- 3 **Funció inversa:** f contínua en c i suposem que existeix f^{-1} funció inversa de f . Llavors f^{-1} és contínua en $f(c)$.

Corol·lari (Continuïtat per generació)

Totes les funcions elementals simples (polinomis, trigonomètriques, exponencials,...) i les seves combinacions (sumes, productes, composicions,...) són contínues dins del seu domini de definició.

Exemple (Continuïtat per generació)

$$f(x) = \frac{e^x \sin x + \sqrt{\ln(3+x) - 1}}{x^4 + \sin^2 x}$$

f és contínua si x compleix les següents condicions:

- ❶ $\ln(3+x) \geq 1 \iff 3+x \geq e \iff x \geq e-3$ per tal que estigui ben definida l'arrel quadrada.
- ❷ $x \neq 0$ per tal que no s'anul·li el denominador.

Per tant, f és contínua en el seu domini:

$$x \in D_f = [e-3, +\infty) \setminus \{0\}$$

(En $x=0$ tenim $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\sqrt{\ln(3)-1}}{0^+} = +\infty$ i per tant $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ i f té doncs una singularitat essencial en $x=0$.)

Tipus de discontinuïtats

Suposem que c és un punt de discontinuïtat de $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.
Llavors c ha de ser d'un dels següents tres tipus:

(i) **Discontinuitat evitable:**

$$\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \in \mathbb{R} \text{ però } f(c) \neq L$$

- Existeix el límit L però no coincideix amb el valor de f en c .
- Si re-definim el valor de f en el punt c per $f(c) := L$ **la nova funció f sí que és contínua** en c .

(ii) **Discontinuitat de salt:**

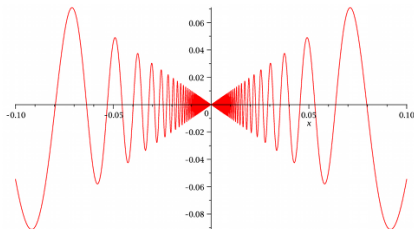
$$\exists \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L^+ \quad \text{i} \quad \exists \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L^- \quad \text{però } L^+ \neq L^-$$

Existeixen (i són finits!) els límits laterals de f però difereixen.

(iii) **Discontinuitat asimptòtica:**

$$\nexists \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \quad \text{o bé} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

Quan no existeix almenys un dels dos límits laterals. (Inclou els casos en que **algún** dels dos límits és $\pm\infty$. Llavors direm que f té una **asímtota vertical** en $x = c$, que pot ser per la dreta, l'esquerra o pels dos costats.)



Exemple (Discontinuitat evitable)

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{array} \right\} \quad \text{Escrivim } f(x) = \underbrace{x}_{k(x)} \underbrace{\sin(1/x)}_{m(x)} \text{ on:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \quad |m(x)| = |\sin(1/x)| \leq 1, \quad \forall x \neq 0.$$

$f(x)$ és el producte d'una funció acotada $m(x)$ per una $k(x)$ que tendeix a zero quan $x \rightarrow 0$. Pel corol·lari del teorema de l'encaix:

$\exists L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Com que $f(0) = 1 \neq 0 = L \implies f$ té una singularitat evitable en $c = 0$.

Exemple (Discontinuitat de evitable/salt)

- ① $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ està definida per a tot $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ i, per generació, és contínua en tot el seu domini. Aplicant Ruffini/cancel·lacions, hem vist que $\exists L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3 \implies f(x)$ té singularitat evitable en $x = 1 \implies$ Si definim $f(1) = L = 3$, la funció resultant esdevé contínua també en $x = 1$.

- ② $f(x) = \begin{cases} x + c, & \text{si } x > 1 \\ e^x, & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ contínua, per generació, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

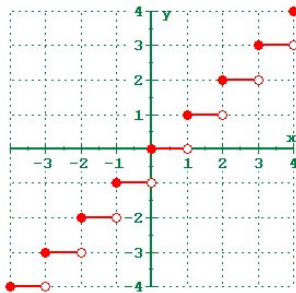
$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + c = 1 + c,$$

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^x = e.$$

És té $L^+ = L^- \iff 1 + c = e \iff c = e - 1$. Llavors:

$c = e - 1 \implies L^+ = L^- \implies x = 1$ punt de continuïtat de $f(x)$,

$c \neq e - 1 \implies L^+ \neq L^- \implies x = 1$ discontinuïtat de salt de $f(x)$.



Exemple (Discontinuitat de salt: La funció part entera $E(x)$)

$E(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ (La part entera de x és l'enter més proper a x entre tots els enters n més petits o iguals que x .)

P.ex. $E(0) = 0$, $E(3) = 3$, $E(-2) = -2$, $E(2.3) = 2$, $E(-2.5) = -3$.

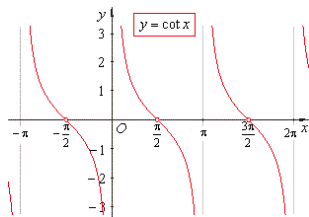
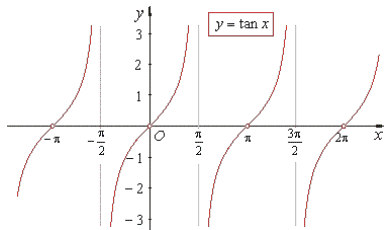
- Si triem, p. ex., $c = 2$:

$$\exists L^+ = \lim_{x \rightarrow 2^+} E(x) = 2, \quad \exists L^- = \lim_{x \rightarrow 2^-} E(x) = 1.$$

Per tant $L^+ \neq L^- \implies E(x)$ té una discontinuïtat de salt en $c = 2$.
(És clar que $E(x)$ té una discontinuïtat de salt en $c = n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.)

Exemple (Discontinuitats asimptòtiques)

- $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x) \implies \sin(1/x)$ té singularitat asimptòtica en $c = 0$.
- $L^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$, $L^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \implies \frac{1}{x^3}$ té una singularitat asimptòtica en $c = 0$.
- $L^- = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan(x) = +\infty$, $L^+ = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan(x) = -\infty \implies \tan(x)$ té una singularitat asimptòtica en $c = \frac{\pi}{2}$.
(De fet té singularitat asimptòtica en $c = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
Vegeu figura pàgina següent.)
- $L^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$, $L^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty \implies e^{1/x}$ té una singularitat asimptòtica en $c = 0$.



Problema 13

Trobeu les discontinuïtats de $f(x)$ i classifiqueu-les.

$$(e) f(x) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right), & \text{si } |x| < 1, \\ x, & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$ és té: $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} \tan(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^+} \tan(x) = -\infty$.

$f(x)$ contínua per generació tret si $x = \pm 1$ o per algun $k \in \mathbb{Z}$ és té:

$$\{|x| < 1 \iff x \in (-1, 1)\} \quad \& \quad \frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Com $\frac{\pi x}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\forall x \in (-1, 1)$, només cal mirar $x = \pm 1$.

(e) (Cont.) $f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$, $x \in (-1, 1)$; $f(x) = x$, $x \leq -1$ ó $x \geq 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} x = -1, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) = -1.$$

Per tant $f(x)$ contínua si $x = \pm 1 \implies f(x)$ contínua $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$(g) f(x) = \frac{e^{\cot(x)} - 1}{e^{\cot(x)} + 1} \implies f(x) = \frac{1 - e^{-\cot(x)}}{1 + e^{-\cot(x)}}.$$

$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ és contínua $\forall x \in \mathbb{R}$ tret si $x = k\pi$, per algun $k \in \mathbb{Z}$ (ja que $\tan(k\pi) = 0$). Com que $e^{\cot(x)} + 1 > 0$, aquests valors de x són les úniques possibles discontinuïtats de $f(x)$. És té:

$$\lim_{x \rightarrow (k\pi)^-} \cot(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow (k\pi)^-} f(x) = \frac{e^{-\infty} - 1}{e^{-\infty} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow (k\pi)^+} \cot(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow (k\pi)^+} f(x) = \frac{1 - e^{-\infty}}{1 + e^{-\infty}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1,$$

on hem usat arreu que $e^{-\infty} = 0$. Per tant, $f(x)$ té discontinuïtats de salt si $x = k\pi$ per algun $k \in \mathbb{Z}$.

(j) $f(x) = E(x) + E(-x)$ ($E(x)$ és la funció part entera de x).

① Si és el cas que $x = k \in \mathbb{Z}$ és un nombre enter, llavors:

$$E(k) = k, E(-k) = -k \implies f(x) = k + (-k) = 0.$$

② Si x no és un enter, sempre és cert que $k < x < k + 1$, per un únic $k \in \mathbb{Z}$. Llavors, canviant de signe, és té $-(k + 1) < -x < -k$. Com que el valor de $E(x)$ és el nombre enter que millor aproxima x **per sota**, llavors és té:

$$E(x) = k \text{ i } E(-x) = -(k + 1) \implies f(x) = -k + (-(k + 1)) = -1.$$

$f(x) = -1$ si x no és enter i $f(x) = 1$ si x és enter $\implies f(x)$ és contínua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ i té discontinuïtats evitables en tots els enters.

Problema 15(c)

Valors de $a, b \in \mathbb{R}$ que fan que $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1 - \cos(bx)}{x^2}, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(1 + ax)}{x}, & \text{si } x > 0 \end{array} \right\}$

sigui contínua en $x = 0$.

Calculem el límit en $x = 0$ per la dreta i l'esquerra.

Si $a > 0$, és té:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + ax)}{x} = a \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + ax)}{ax} = a \cdot 1 = a,$$

on hem usat que, si $g(x)$ és qualsevol funció tal que $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow c} \frac{\ln(1 + g(x))}{g(x)} = 1.$$

En aquest cas, $g(x) = ax$. Si $a = 0 \implies f(x) = \frac{\ln(1)}{x} = 0$, si $x > 0$.
Per tant, si $a = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = a$. A més, si $b \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos(bx)}{x^2} = b^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos(bx)}{(bx)^2} = \frac{b^2}{2},$$

on hem usat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. El resultat també val per $b = 0$.

Si volem $f(x)$ contínua en $x = 0$ cal:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \iff a = \frac{b^2}{2} = 1 \iff a = 1, b = \pm\sqrt{2}.$$

Teoremes valor intermedi i de Bolzano

Teorema (del valor intermedi)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua i tal que $f(a) \neq f(b)$.

Llavors, per a qualsevol valor $k \in \mathbb{R}$ que estigui entre $f(a)$ i $f(b)$ existeix almenys un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Comentari

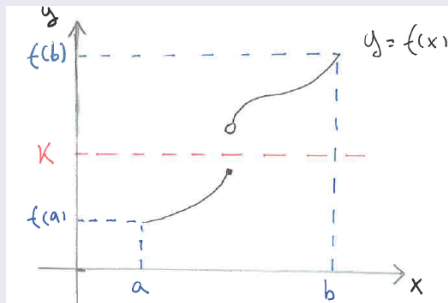
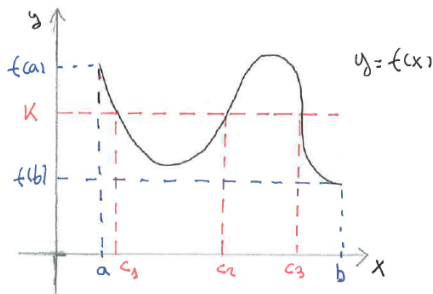
- c “existeix” però el més probable és que no sapiguem dir qui és.
- c no té perquè ser únic. Si volem garantir que c és únic hem d'estudiar la gràfica de f . Per exemple, si f és estrictament creixent o decreixen llavors segur que c és únic.

Corol·lari (Teorema de Bolzano)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua i tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ (això és, f té almenys un canvi de signe en l'interval $[a, b]$).

Llavors, existeix almenys un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Exemple (Teorema valor intermedi)



- En la figura de l'esquerra veiem que hi ha tres possibles valors per c que en aplicar f van a parar al mateix k .
- En la figura de la dreta veiem que si f no és contínua llavors el resultat no té perque ser cert: no existeix cap valor per $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Exemple (Tot polinomi de grau tres té almenys un zero real)

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

(Normalitzem $p(x)$ perquè el seu coeficient dominant sigui 1.)

- $p(x)$ és una funció contínua en tot $\mathbb{R}$
- $p(x) = x^3 \cdot \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty \implies$ si $x > 0$ és prou gran $p(x) > 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty \implies$ si $x < 0$ és prou “negatiu” $p(x) < 0$
- $p(x)$ té almenys un canvi de signe en $\mathbb{R}$
- Per Bolzano $p(x)$ té almenys un zero en $\mathbb{R}$

Observació

Si $p(x)$ és un polinomi de grau senar qualsevol, llavors el mateix resultat també és cert.

Problema 21(b)

Sigui $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funció contínua. Proveu que existeixen $c, d \in [0, 1]$ (potser no únics) tals que $f(c) = c$ i $f(d) = 1 - d$.

Obseveu que $x = c$ és solució de l'equació $f(x) = x \iff x = c$ és un zero de la funció contínua $g(x) := f(x) - x$. El truc és avaluar $g(x)$ en $x = 0$ i $x = 1$ i aplicar el teorema "clàssic" de Bolzano. Noteu que, per hipòtesis, $f(x) \in [0, 1] \iff 0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0, 1]$:

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0,$$

$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0, \quad \text{ja que } f(1) \leq 1.$$

Per tant, és dóna un dels tres casos següents:

$$1) g(0) = 0, \quad 2) g(1) = 0, \quad 3) g(0) > 0 \text{ i } g(1) < 0.$$

Cas 1) $\implies c = 0$; Cas 2) $\implies c = 1$; Cas 3) $\implies$ podem aplicar el teorema de Bolzano a $g(x)$ en $[0, 1] \implies \exists c \in (0, 1)$ tal que $g(c) = 0$.

Per provar existència de d cal repetir el procés per $h(x) = f(x) + x - 1$: $x = d$ és solució de l'equació $f(x) = 1 - x \iff x = d$ és un zero de la funció contínua $h(x)$.

Problema 20(b)

Proveu que $x^{1313} + \frac{169}{13 + x^2 + \sin^2(x)} = 247$ té almenys una arrel real.

$f(x) = x^{1313} + \frac{169}{13 + x^2 + \sin^2(x)}$ és una funció contínua $\forall x \in \mathbb{R}$. (Raó: el denominador $13 + x^2 + \sin^2(x) \geq 13$ no és fa mai zero en cap punt.) Per garantir que existeix $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 247$, hem de veure que hi ha una parella de punts en $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $f(a) < 247$ i $f(b) > 247$.

- $f(0) = \frac{169}{13} = 13 < 247 \implies$ triem $a = 0$;
- $f(10) = 10^{1313} + \frac{169}{13+10^2+\sin^2(10)} > 10^{1313} > 247 \implies$ triem $b = 10$.

Per tant, l'equació $f(x) = 247$ té almenys una solució $c \in (0, 10)$.

- Qüestió: És la solució per c única? En general la resposta és no. Una forma de veure que sí que és única és provar que $f(x)$ és o bé estrictament creixent o bé estrictament decreixent. (En aquest exemple és complicat verificar-ho.)

Problema 20(b) “ampliat”

Si $f(x) = x^{1313} + \frac{169}{13 + x^2 + \sin^2(x)}$, per a quins valors $d \in \mathbb{R}$ podem garantir que té almenys una solució l'equació $f(x) = d$?

El punt clau és calcular els següents límits:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

que són òbvis ja que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1313} = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{1313} = -\infty$, en ser 1313 senar, mentre que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{169}{13 + x^2 + \sin^2(x)} = 0$. Per tant, sigui quin sigui el valor de $d \in \mathbb{R}$:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \implies$ podem triar un $a \ll 0$ tal que $f(a) < d$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \implies$ podem triar un $b \gg 0$ tal que $f(b) > d$.

En conseqüència, $f(x)$ és una funció contínua tal que $\exists a < b$ verificant $f(a) < d < f(b) \implies \exists c \in (a, b)$ (potser no únic) tal que $f(c) = d$.

Mètode de la bisecció per aproximar zeros de funcions

- **Configuració inicial del mètode de la bisecció:**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funció contínua verificant $f(a) \cdot f(b) < 0$
(per Bolzano f té **almenys** un zero α en l'interval (a, b))

- **Un pas del mètode de la bisecció:**

Calculem $c = \frac{a+b}{2}$ punt mig de l'interval $[a, b]$ i avaluem $f(c)$

- **Cas 1:** $f(c) = 0$ llavors $\alpha = c$ és un zero de f Fi!!!!
- **Cas 2:** $\text{sgn}(f(c)) = \text{sgn}(f(a)) \implies f$ canvia de signe en $[c, b]$

Nova **configuració inicial:** $f : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ amb $f(c) \cdot f(b) < 0$

- **Cas 3:** $\text{sgn}(f(c)) = \text{sgn}(f(b)) \implies f$ canvia de signe en $[a, c]$

Nova **configuració inicial:** $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ amb $f(a) \cdot f(c) < 0$

- **Apliquem un altre pas del mètode a la nova configuració inicial:**

Pel T^a de Bolzano, $f(x)$ té almenys un zero en el nou interval ($[c, b]$ en el **Cas 2**; $[a, c]$ en el **Cas 3**). Calculem ara el punt mig d'aquest nou interval i repetim el procés anterior. Etcètera.

- Després de cada pas del mètode de la bisecció, és **dividideix per dos** el tamany de l'interval que conté el zero α .

Després de n passos el tamany de l'interval és $\frac{b-a}{2^n}$.

- **Avantatge:** El mètode de la bisecció **funciona sempre**.
- **Inconvenient:** És un mètode **molt lent!** Si volem calcular α amb un error més petit que ε hem de fer n passos per tal que:

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \iff 2^n > \frac{b-a}{\varepsilon} \iff n > \frac{\ln((b-a)/\varepsilon)}{\ln(2)}$$

- Si volem p xifres decimals correctes, arrodonint a la xifra decimal p , cal triar $\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-p}$. Per tant, cal fer n passos del mètode amb:

$$n > \frac{\ln(2 \cdot 10^p \times (b-a))}{\ln(2)}$$

- Si volem p xifres decimals correctes **per truncament** (sense arrodonir la xifra decimal p), llavors cal triar $\varepsilon = 10^{-(p+1)}$.

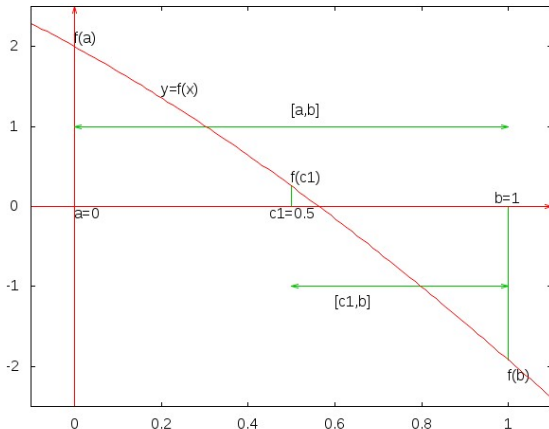
Exemple ($f(x) = 2 \cos(x) - 3x$)

Useu el mètode de la bisecció per calcular una aproximació numèrica del zero de $f(x)$ en l'interval $[a, b] = [0, 1]$ amb una precisió de dues xifres decimals exactes (per arrodoniment).

- f és contínua en tot $\mathbb{R}$.
- $f(0) = 2 > 0$ & $f(1) = 2 \cos(1) - 3 \simeq -1.92 < 0$
- f té almenys un canvi de signe en $[0, 1]$ i per Bolzano té almenys un zero en $[0, 1]$.
(De fet, $f'(x) = -2 \sin(x) - 3 \leq -1 < 0$ i f és decreixent en tot $\mathbb{R}$ i per tant com a molt f pot tenir un zero.)
- Si volem calcular el zero amb el mètode de la bisecció amb $p = 2$ xifres decimals correctes per arrodoniment cal fer n passos de manera que l'interval final tingui tamany menor que $\varepsilon = \frac{1}{2} 10^{-p}$:

$$n > \frac{\ln(2 \cdot 10^p \times (b - a))}{\ln(2)} = \frac{\ln(2 \cdot 10^2 \times (1 - 0))}{\ln(2)} \simeq 7.64$$

Cal fer almenys $n = 8$ passos. Fem en detall els dos primers.

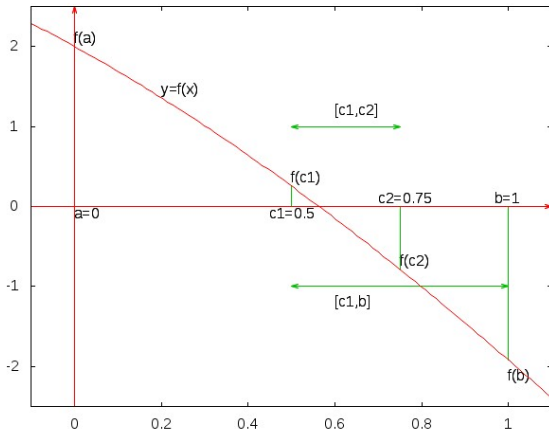


• **Pas 1 mètode bisecció:** L'interval inicial és $[a, b] = [0, 1]$

• $a = 0 \implies f(a) = 2 > 0, \quad b = 1 \implies f(1) \simeq -1.92 < 0$

• $c_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5 \implies f(c_1) \simeq 0.26 > 0$

• $\text{sgn}(f(c_1)) = \text{sgn}(f(a)) \implies$ el nou interval és $[c_1, b] = [0.5, 1]$



• **Pas 2 mètode bisecció:** Ara l'interval és $[c_1, b] = [0.5, 1]$

• $c_1 = 0.5 \implies f(c_1) \simeq 0.26 > 0, \quad b = 1 \implies f(1) \simeq -1.92 < 0$

• $c_2 = \frac{c_1 + b}{2} = \frac{0.5 + 1}{2} = 0.75 \implies f(c_2) \simeq -0.79 < 0$

• $\text{sgn}(f(c_2)) = \text{sgn}(f(b)) \implies$ nou interval $[c_1, c_2] = [0.5, 0.75]$

Mostrem l'aplicació iterativa del mètode de la bisecció a la funció $f(x) = 2 \cos(x) - 3x$ en $[0, 1]$, fins un total de $n = 8$ iteracions. En cada fila, $c = \frac{a+b}{2}$ indica el valor mig dels dos extrems de l'interval $[a, b]$ que estem considerant en el pas n .

n	a	$f(a)$	b	$f(b)$	c	$f(c)$
0	0	2	1	-1.9194	0.5	0.2552
1	0.5	0.2552	1	-1.9194	0.75	-0.7866
2	0.5	0.2552	0.75	-0.7866	0.625	-0.2531
3	0.5	0.2552	0.625	-0.2531	0.5625	0.0043
4	0.5625	0.0043	0.625	-0.2531	0.5938	-0.1236
5	0.5625	0.0043	0.5938	-0.1236	0.5781	-0.0594
6	0.5625	0.0043	0.5781	-0.0594	0.5703	-0.0275
7	0.5625	0.0043	0.5703	-0.0275	0.5664	-0.0275
8	0.5625	0.0043	0.5664	-0.0275		

La diferència entre els dos darrers valors de $a = 0.5625$ i $b = 0.5664$ calculats és $b - a \approx 0.0039 < \frac{1}{2} 10^{-2} = 0.005$.

Mètode de la secant per aproximar zeros de funcions

- **Configuració inicial del mètode de la secant:**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funció contínua que suposem té un zero $\alpha \in [a, b]$.

Siguin $x_0, x_1 \in [a, b]$ dos punts donats que suposem són propers a α .

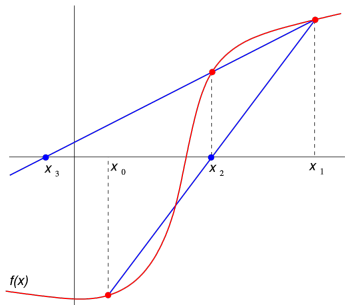
- No cal que siguin $x_0 = a$ ni $x_1 = b$. Tampoc cal que es verifiqui $x_0 < x_1$ ni que $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$ (no cal doncs que $f(x)$ tingui cap canvi de signe entre x_0 i x_1).
- “Entenem” que x_1 és “més proper” a α que no pas x_0 .

- **Primer pas del mètode de la secant:** $(x_0, x_1) \mapsto (x_1, x_2)$.

Calculem la recta r que connecta els punts $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$ i busquem el punt de tall de r amb l'eix x . El valor de la coordenada x d'aquest tall defineix el nou valor x_2 del mètode. La nova configuració del mètode de la secant és la donada per la parella x_1, x_2 .

- **Segon pas del mètode de la secant:** $(x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_3)$.

x_3 donat pel tall de la recta que uneix $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$. Etcètera.



- **Pas general del mètode de la secant:** $(x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n+1})$.
La recta r que connecta els punts $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ i $(x_n, f(x_n))$ és:

$$y = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (x - x_n).$$

(r és la recta que interpola la funció $f(x)$ en els punts x_{n-1} i x_n).
Tallem r amb l'eix x fent $y = 0$ i definim x_{n+1} com el valor x del tall:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

- Si la parella x_0, x_1 és “prou propera” a un zero α de $f(x)$, i aquest zero és simple, en general el mètode de la secant aproxima força ràpidament α . Molt més ràpidament que el mètode de la bisecció.
- És difícil dir quin error fem si aproximem α per x_n . Usualment, “s’estima” aquest error a partir de la diferència $|x_n - x_{n-1}|$.
- Si inicialment triem x_0, x_1 tals que $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$, res garanteix que la nova parella x_1, x_2 compleixi $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. Si ho compleix, res garanteix que això sigui sempre cert quan iterem el mètode. (P. ex., en el dibuix de la pàgina anterior, $f(x)$ té un canvi de signe entre x_0 i x_1 , però $f(x_1) > 0$ i $f(x_2) > 0$.)
- Hi ha una versió modificada del mètode de la secant, anomenada **Regula Falsi**, en que triem la parella x_0, x_1 tal que $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$ i, un cop calculat x_2 , triem x_1, x_2 només si $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, però triem x_0, x_2 si $f(x_0) \cdot f(x_2) < 0$ (p. ex., en el dibuix de la pàgina anterior, el primer pas del mètode de la Regula Falsi és $(x_0, x_1) \mapsto (x_0, x_2)$).
 - Part bona Regula Falsi: Sempre controlem l’interval on està α .
 - Part dolenta Regula Falsi: Hi ha molts exemples on un dels punts esdevé “estàtic” en iterar el mètode (no canvia mai). En aquests casos, el mètode és tant lent com el de la bisecció.

Exemple ($f(x) = 2 \cos(x) - 3x$)

$f(x)$ té un únic zero $\alpha \in [0, 1]$. Useu mètode de la secant per calcular una aproximació numèrica de α . Itereu fins saturar l'aritmètica de doble pressió (aproximadament 16 xifres decimals correctes).

- **Pas 1 mètode secant triant** $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$:

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) \approx 1 - \frac{1 - 0}{-1.91939539 - 2} \approx 0.51028279.$$

- **Aplicació iterativa del mètode:**

n	x_n	$f(x_n)$
0	0.0000000000000000	2.0000000000000000
1	1.0000000000000000	-1.919395388263720
2	0.510282786469776	0.214364486253517
3	0.559481377249191	0.016616832863047
4	0.563615559101983	-0.000188592629508
5	0.563569164785646	0.000000160457705
6	0.563569204225136	0.000000000001545
7	0.56356920422516	0.000000000000000
8	0.56356920422516	0.000000000000000