⑥ Em els exercicis següents utilitzeu la definició ε-δ de límit per demostrar que el límit és el donat.

(a) $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2.$

$$\boxed{\text{En general: } \lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ t.q. si } 0 < |x-a| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon}$$

- Aplicar la definició de límit vol dir donar donar una fórmula per $\delta(\varepsilon)$ en termes de ε verificant la propietat requadrada.
- Només cal donar la fórmula per valors de ε petits (propers a $\varepsilon = 0^+$).
- Com que totes les funcions $f(x)$ que considerem són de fet contínues en $x = a$, no ens hem de fixar en la restricció "$0 < |x-a|$", ja que "$|f(x) - L| \leq \varepsilon$" val també en $x = a$

En aquest apartat (a) tenim $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$, $L = 2$.

$$|f(x) - L| = |\sqrt{x} - 2| = \left| (\sqrt{x} - 2) \times \frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)} \right| = \left| \frac{(\sqrt{x})^2 - (2)^2}{\sqrt{x}+2} \right|$$

$$= \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{\delta(\varepsilon)}{2} = \varepsilon . \quad \boxed{\text{triem } \delta(\varepsilon) = 2\varepsilon}$$

volem $\delta(\varepsilon)$ t.q. així doni $= \varepsilon$

Suposem: $|x-a| = |x-4| \leq \delta(\varepsilon)$

Usem: $\sqrt{x} + 2 \geq 2$, si $x > 0$

(b) $\lim\limits_{x\to -5} |x-5| = 10 \quad (f(x)=|x-5|,\ a=-5,\ L=10)$

Recordem: $|A-B| \geq \big||A|-|B|\big| \iff \big||A|-|B|\big| \overset{(*)}{\leq} |A-B|$

Així: (Fem $A=5-x$, $B=10$)

$$|f(x)-L| = \big||x-5|-10\big| = \big||5-x|-10\big| \overset{(*)}{\leq} \big|(5-x)-10\big| =$$

$$= |-x-5| = |x+5| = |x-(-5)| \underset{(**)}{\leq} \delta(\varepsilon) = \varepsilon$$

Volem $\delta(\varepsilon)$ tal que així doni $=\varepsilon$

Per tant, triem $\boxed{\delta(\varepsilon)=\varepsilon}$

En $(**)$ observem que x ha de complir:

$|x-a| = |x-(-5)| \leq \delta(\varepsilon)$.

(c) $\lim\limits_{x\to -3} (x^2+3x) = 0 \quad (f(x)=x^2+3x,\ a=-3,\ L=0)$

$$f(x) = x^2+3x \underset{\uparrow}{=} [x-(-3)-3]^2 + 3(x-(-3)-3) =$$

restem i sumem (-3) a x

$$= \left[(x-(-3))^2 - 6(x-(-3)) + (-3)^2\right] + \left[3(x-(-3)) - 9\right] =$$

$$= (x-(-3))^2 - 3(x-(-3)).$$ Així:

$$|f(x)-L| = \left|(x-(-3))^2 - 3(x-(-3))\right| \underset{\uparrow}{\leq} |x-(-3)|^2 + 3|x-(-3)| \leq$$

usem $|A\pm B| \leq |A|+|B|$

$$\underset{\uparrow}{\leq} |x-(-3)| \cdot \underbrace{|x-(-3)|}_{\leq 1\ (*)} + 3|x-(-3)| \leq 4|x-(-3)| \underset{(*)}{\leq} 4\,\delta(\varepsilon) = \varepsilon$$

Volem

triem $\delta(\varepsilon) \leq 1$, de forma que podem garantir que $|x-(-3)| \leq 1$

En $(*)$ hem usat $|x-a| = |x-(-3)| \leq \delta(\varepsilon)$ on $\delta(\varepsilon) \leq 1$ en el primer cas. Per tant, triant $\delta(\varepsilon) = \min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, 1\right\}$, aconseguim que $|f(x)-L| \leq \varepsilon$.