(10) Estudieu la convergència de les sèries següents:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \text{sèrie divergent.}$$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln(n)}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(x)} = \frac{\infty}{\infty} \underset{\text{L'Hôpital}}{\uparrow}= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\to\infty} x = +\infty \Rightarrow \text{Sèrie divergent.}$$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2+1}$

· $f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}\left(1-2x\arctan(x)\right) < 0$ si x és prou gran, ja que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\arctan(x) = +\infty$. Per tant, $f(x)$ és decreixent si x prou gran: la convergència de la sèrie és equivalent a la de la integral impròpia:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2+1}\,dx = \left.\frac{(\arctan(x))^2}{2}\right|_{x=1}^{x=+\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Per tant, la sèrie és convergent.

· Més fàcil, per comparació directa de sèries de termes positius:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2+1} \leq \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{convergent.}$$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^p} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2(\ln(x))^p}\left(1+\frac{p}{\ln x}\right) < 0 \text{ si}$$

$1+\dfrac{p}{\ln x} > 0$, cert si x és prou gran. Per tant, la convergència de la sèrie és equivalent a la de la integral impròpia $I(p) = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^p}$. Així:

- Cas $p=1$: $I(1) = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln(x)} = \ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty} = +\infty$ divergent.
- Cas $p \neq 1$: $I(p) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot (\ln(x))^{-p} dx = \frac{(\ln(x))^{-p+1}}{-p+1}\Big|_2^{+\infty}$

Llavors: $I(p) = +\infty$ si $-p+1>0 \Leftrightarrow p<1$ divergent

$I(p) = \frac{\ln(2)}{p-1}$ convergent, si $p>1$.

Finalment, la sèrie és convergent si $p>1$ i divergent si $p \leq 1$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{(n+1)^2}$

Si fem, p. ex., n senar, llavors $(-1)^{n+1} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[\substack{n \to +\infty \\ \text{senar}}]{} 1$

En tot cas, el límit del terme general no és zero i la sèrie és divergent.

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^2}$

$a_n = \frac{\cos(\pi n)}{n^2} = \frac{(-1)^n}{n^2}$ compleix $|a_n| \leq \frac{1}{n^2}$ $(n \neq 0)$. Com la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ és convergent, llavors $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ també. En ésser donces la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^2}$ absolutament convergent, llavors és convergent.

també: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ és una sèrie alternada i de terme general que ~~de~~creix a zero en valor absolut, $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \downarrow 0$.

Per tant és convergent.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n\, 3^n}$

$a_n = \frac{n!}{n \cdot 3^n}$; $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}{\frac{n!}{n \cdot 3^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot 3^n \cdot (n+1)!}{(n+1) \cdot 3^{n+1} \cdot n!} =$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{3} = +\infty > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és divergent pel criteri del quocient.

(h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 2^{4n}}{(2n+1)!}$

$a_n = \frac{(-1)^n \cdot 2^{4n}}{(2n+1)!}$; $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2^{4n+4}}{(2n+3)!}}{\frac{2^{4n}}{(2n+1)!}} =$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{2^{4n+4} \cdot (2n+1)!}{2^{4n} \cdot (2n+3)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^4}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1$

Per tant $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és absolutament convergent pel criteri del quocient $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és convergent.

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln(n))^n}$

. sèrie alternada $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$, on $a_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$ és decreixent i té límit zero (ja que $\ln(x)$ és una funció creixent i té límit infinit quan $x \to +\infty$). Per tant $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ convergent.

. També: $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{(\ln(n))^n} \right|} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln(n))^n}$ és absolutament convergent pel criteri de l'arrel i per tant convergent.

(j) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=0<1 \Rightarrow$ La sèrie és absolutament convergent pel criteri de l'arrel, i per tant convergent.

(k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{n!}$

$a_n=\frac{3^{n-1}}{n!}$; $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{(n+1)!}}{\frac{3^{n-1}}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot n!}{3^{n-1}\cdot(n+1)!}=$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0<1 \Rightarrow$ La sèrie és absolutament convergent pel criteri del quocient i per tant convergent.

(l) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, on $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{\sin(n)+1}{\sqrt{n}}a_n$.

Tenim una successió definida recurrentment on el que resulta fàcil és estudiar el quocient a_{n+1}/a_n. (observar que $a_n\neq 0$, ja que $\sin(n)+1\neq 0, \forall n$. Raó?)

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin(n)+1}{\sqrt{n}}\right|=0<1$, ja que el numerador $|\sin(n)+1|\leq 2$ i el $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$.

Per tant $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ és absolutament convergent pel criteri del quocient, i per tant convergent.