Integració

Jordi Villanueva

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

14 de setembre de 2022

Primitivització

Definició (Primitiva d'una funció)

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *és una funció primitiva de* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *quan:*

$$\boxed{F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b]}$$

Comentari

- **Notació:** $\boxed{F(x) = \int f(x)\,dx}$ *o* $\boxed{F = \int f}$.
- *Totes les primitives de* f *difereixen entre elles en una constant.* *Per això escriurem* $\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c}$, *on* $c \in \mathbb{R}$ *és una costant lliure (la constant d'integració).*
- *Tota funció contínua admet funció primitiva.*

Taula de primitives elementals

- $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad \text{si } a \neq -1$
- $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
- $\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + c$
- $\int a^x\,dx = \int \mathrm{e}^{x\cdot\ln(a)}\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c, \quad \text{si } a > 0$
- $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan(x) + c$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotan}(x) + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + c$
- $\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + c$
- $\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsinh}(x) + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argcosh}(x) + c$
- $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{argtanh}(x) + c$

Observació (Primitives immediates)

Si sabem calcular una primitiva de f, $F(u) = \int f(u)\,du$, *llavors:*

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int [F(\varphi(x))]'\,dx = F(\varphi(x)) + c.$$

(Si substituïm $u = \varphi(x)$ *en* $f(u)$ *i multipliquem per* $\varphi'(x)$, *calcular la primitiva de* $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ *(respecte de* x*) és equivalent a calcular la primitiva de* $f(u)$ *(respecte de* u*) i substituïr la* u *per* $\varphi(x)$*.)*

Exemple (Primitiva immediata)

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx = \int (1 + \underbrace{\ln x}_{\varphi(x)})^{1/2} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{(\varphi(x))'}\,dx = \frac{2}{3}(1 + \underbrace{\ln x}_{\varphi(x)})^{3/2} + c,$$

on: $f(u) = (1+u)^{1/2}$ *i* $\int (1+u)^{1/2}\,du = \dfrac{(1+u)^{3/2}}{3/2} = \dfrac{2}{3}(1+u)^{3/2}$.

Exemple (Primitives immediates)

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx \underbrace{=}_{\varphi(x)=\cos x} -\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, dx = -\ln|\varphi(x)| + c$$

$$= -\ln|\cos x| + c$$

$$\int x^4 \sqrt[3]{x^5-1}\, dx \underbrace{=}_{\varphi(x)=x^5-1} \frac{1}{5}\int \varphi'(x)\sqrt[3]{\varphi(x)}\, dx = \frac{1}{5}\int \varphi'(x)(\varphi(x))^{1/3}\, dx$$

$$\underbrace{=}_{1/3+1=4/3} \frac{1}{5}\frac{(\varphi(x))^{4/3}}{4/3} + c = \frac{3}{20}(\sqrt[3]{x^5-1})^4 + c$$

$$\int \exp(\mathrm{e}^x + x)\, dx = \int \exp(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^x\, dx \underbrace{=}_{\varphi(x)=\mathrm{e}^x} \int \mathrm{e}^{\varphi(x)}\,\varphi'(x)\, dx = \mathrm{e}^{\varphi(x)} + c$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + c = \exp(\mathrm{e}^x) + c$$

Problema 1(a,b,e) Primitives immediates.

$$(\mathbf{a}) \int \frac{x+6}{\sqrt{x}}\,dx. \quad (\mathbf{b}) \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx. \quad (\mathbf{e}) \int (\cos^2 x - \sin x)\,dx.$$

(a)
$$\int \frac{x+6}{\sqrt{x}}\,dx \underbrace{=}_{\sqrt{x}=x^{1/2}} \int \left(x^{1/2} + 6\,x^{-1/2}\right) = \frac{x^{3/2}}{3/2} + 6\,\frac{x^{1/2}}{1/2} + c$$
$$= \frac{2}{3}\,x\,\sqrt{x} + 12\sqrt{x} + c.$$

(b)
$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int (\sin x)^{-2} \cdot (\sin x)'\,dx = \frac{(\sin x)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{\sin x} + c.$$

(e)
$$\int (\cos^2 x - \sin x)\,dx = \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2} - \sin x\right)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) + \cos x + c$$
$$= \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\,\sin(2x) + \cos x + c.$$

Proposició (Canvi de variables en una integral)

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \varphi(u) \\ dx = \varphi'(u)\,du \end{array} \right\} = \int f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\,du.$$

Observació

- *Aquest procés s'anomena canvi de variable perquè canviem la vella variable x per una nova variable u, esperant simplificar la integral.*
- *Els canvis de variable també es poden escriure al revés, això és:*

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \eta(x) \\ du = \eta'(x)\,dx \end{array} \right\}$$

- *És imprescindible desfer el canvi de variables després de calcular la primitiva: si calculem una primitiva respecte de x, no val deixar el resultat final en termes de la variable u!*

Exemple (Canvi de variables)

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 1+\ln x \\ du = \dfrac{dx}{x} \end{array} \right\} = \int \frac{\sqrt{u}}{x}\,\underbrace{x\,du}_{dx} = \int \sqrt{u}\,du$$

$$= \int u^{1/2}\,du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}(\underbrace{1+\ln x}_{u})^{3/2} + c,$$

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = u^2 \\ dx = 2u\,du \end{array} \right\} = \int \frac{1+u^2}{1+u} 2u\,du = 2\int \frac{u^3+u}{u+1}\,du$$

$$= 2\int \left(u^2 - u + 2 - \frac{2}{1+u} \right) du$$

$$= 2\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + 2u - 2\ln|1+u| \right) + c = \{u = \sqrt{x}\}$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln|1+\sqrt{x}| + c,$$

on usem el quocient de polinomis $u^3 + u = (u^2 - u + 2)(u+1) - 2\,.$

Detalls quocient de polinomis $u^3+u=(u^2-u+2)(u+1)-2$:

$$
\begin{array}{rl}
u^3+u & \multicolumn{1}{|l}{u+1} \\ \cline{2-2}
\underline{-u^3-u^2} & u^2-u+2 \\
-u^2+u & \\
\underline{u^2+u} & \\
2u & \\
\underline{-2u-2} & \\
-2 &
\end{array}
$$

Problema 2(f) Canvi variables trencant integral en dos parts:

$$\int \frac{x-\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx - \int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arctan x \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{u^{3/2}}{3/2} + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{2}{3}(\arctan(x))^{3/2} + c.$$

Proposició (Integració per parts)

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \implies \int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

Observació (Regla pràctica)

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

- u *"fàcil de derivar" i amb derivada el "més simple" possible.*
- dv *"fàcil d'integrar".*

Exemple (Integració per parts (I))

$$\begin{aligned} \int x\mathrm{e}^x\,dx &= \left\{ \begin{array}{c} u = x \;\; \rightarrow du = dx \\ dv = \mathrm{e}^x\,dx \rightarrow v = \mathrm{e}^x \end{array} \right\} = \underbrace{x\mathrm{e}^x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{\mathrm{e}^x\,dx}_{v \cdot du} \\ &= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c. \end{aligned}$$

Exemple (Integració per parts (II))

$$\int x^n \ln x\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \quad \to du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^n\, dx \to v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array} \right\} = \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{\frac{x^n}{n+1}\, dx}_{v \cdot du}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c,$$

$$\int \arcsin(x)\, dx = \left\{ \begin{array}{l} \quad u = \arcsin(x) \to du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \qquad\qquad \to v = x \end{array} \right\}$$

$$= \underbrace{x \cdot \arcsin(x)}_{u \cdot v} - \int \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx}_{v \cdot du}$$

$$= x \cdot \arcsin(x) + \frac{1}{2} \int (-2x)\, (1 - x^2)^{-1/2}\, dx$$

$$= x \cdot \arcsin(x) + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + c$$

$$= x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2} + c.$$

Problema 3(d,e). Integració per parts:

(d) $$\int x^2 \cos x dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2 & \to du = 2\,x\,dx \\ dv = \cos x dx & \to v = \sin x \end{matrix}\right\} = \underbrace{x^2 \sin x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{2\,x \sin x dx}_{v \cdot du}$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x & \to du = dx \\ dv = \sin x\,dx & \to v = -\cos x \end{matrix}\right\}$$

$$= x^2 \sin x - 2\left[\underbrace{-x\,\cos x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{-\cos x\,dx}_{v \cdot du}\right]$$

$$= x^2 \sin x + 2\,x \cos x - 2\,\sin x + c$$

(e) $$\int \arctan(x)\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \arctan(x) & \to du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & \to v = x \end{matrix}\right\}$$

$$= \underbrace{x \cdot \arctan(x)}_{u \cdot v} - \int \underbrace{\frac{x}{1+x^2}\,dx}_{v\,du}$$

$$= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

Problema 3(f). Integració per parts:

$$I = \int e^{2x} \sin x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^{2x} & \rightarrow du = 2\,e^{2x}\,dx \\ dv = \sin x\,dx & \rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\}$$

$$= \underbrace{-e^{2x} \cos x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{-2\,e^{2x} \cos x \, dx}_{v \cdot du}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = e^{2x} & \rightarrow du = 2\,e^{2x}\,dx \\ dv = \cos x\,dx & \rightarrow v = \sin x \end{array} \right\}$$

$$= -\,e^{2x} \cos x + 2 \left[\underbrace{e^{2x} \sin x}_{u \cdot v} - \int 2\,e^{2x} \sin x \, dx \right]$$

$$= -\,e^{2x} \cos x + 2\,e^{2x} \sin x - 4 \underbrace{\int e^{2x} \sin x \, dx}_{I} .$$

Per tant, I verifica:

$$I = -e^{2x} \cos x + 2\,e^{2x} \sin x - 4\,I \implies I = -\frac{1}{5}\,e^{2x} \cos x + \frac{2}{5}\,e^{2x} \sin x + c.$$

Problema 4(a,b). Fórmules recurrents per la integració per parts:

$$\mathcal{C}_n(x) = \int x^n \cos x \, dx, \qquad \mathcal{S}_n(x) = \int x^n \sin x \, dx,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_n(x) &= \int x^n \cos x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^n & \to du = n\, x^{n-1}\, dx \\ dv = \cos x \, dx & \to v = \sin x \end{array} \right\} \\
&= \underbrace{x^n \sin x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{n\, x^{n-1} \sin x \, dx}_{v \cdot du} \\
&= x^n \sin x - n\, \mathcal{S}_{n-1}(x), \\
\mathcal{S}_n(x) &= \int x^n \sin x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^n & \to du = n\, x^{n-1}\, dx \\ dv = \sin x \, dx & \to v = -\cos x \end{array} \right\} \\
&= \underbrace{-x^n \cos x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{n\, x^{n-1} (-\cos x) \, dx}_{v \cdot du} \\
&= -x^n \cos x + n\, \mathcal{C}_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

- Observem: $\mathcal{C}_0(x) = \sin x + c$, i $\mathcal{S}_0(x) = -\cos x + c$. Per tant:
  $\mathcal{C}_1(x) = x^1 \sin x - 1 \cdot \mathcal{S}_0(x) = x \sin x + \cos x + c$,
  $\mathcal{S}_1(x) = -x^1 \cos x + 1 \cdot \mathcal{C}_0(x) = -x \cos x + \sin x + c$.

Fórmules recurrents per la integració per parts:

$$\mathcal{I}_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int (1+x^2)^{-n}\, dx.$$

$$\mathcal{I}_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} u = (1+x^2)^{-n} & \rightarrow du = -2\,n\,x\,(1+x^2)^{-n-1} \\ dv = dx & \rightarrow v = x \end{array} \right\}$$

$$= \underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^n}}_{u\cdot v} - \int \underbrace{\frac{-2\,n\,x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx}_{v\cdot du}$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2\,n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2\,n \left(\int \frac{(1+x^2)-(1)}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx \right)$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2\,n \left(\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \right)$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2\,n\mathcal{I}_n(x) - 2\,n\mathcal{I}_{n+1}(x).$$

Per tant, hem vist:

$$\mathcal{I}_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2\,n\mathcal{I}_n(x) - 2\,n\mathcal{I}_{n+1}(x).$$

D'on:

$$2\,n\mathcal{I}_{n+1}(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2\,n-1)\,\mathcal{I}_n(x).$$

Finalment:

$$\mathcal{I}_{n+1}(x) = \frac{1}{2\,n}\,\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2\,n-1}{2\,n}\,\mathcal{I}_n(x).$$

Observem: $\mathcal{I}_0(x) = x + c$ i $\mathcal{I}_1(x) = \arctan x + c$. Per tant:

$$\mathcal{I}_2(x) \underbrace{=}_{n=1} \frac{1}{2\cdot 1}\,\frac{x}{(1+x^2)^1} + \frac{2\cdot 1 - 1}{2\cdot 1}\,\mathcal{I}_1(x) = \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\,\arctan(x) + c.$$

Integració fraccions racionals ("quocients polinomis")

$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$, $p(x)$ (numerador) i $q(x)$ (denominador) polinomis.

• **1er. pas:** Només cal fer-lo si $\mathrm{grau}\,(p(x)) \geq \mathrm{grau}\,(q(x))$. Fem la divisió polinomial de $p(x)$ per $q(x)$:

$$p(x) = q(x) \cdot \underbrace{m(x)}_{quocient} + \underbrace{r(x)}_{reste}$$

on $\mathrm{grau}\,(r(x)) < \mathrm{grau}\,(q(x))$. Llavors:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \underbrace{\int m(x)\,dx}_{\text{integral immediata}} + \underbrace{\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx}_{\substack{\text{grau numerador}\\ \text{més petit}\\ \text{grau denominador}}}$$

Conclusió: Sempre podem suposar que el grau del numerador és més petit que el del denominador.

• **2on. pas:** Suposem $\mathrm{grau}\,(p(x)) < \mathrm{grau}\,(q(x))$ i descomposem $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ en suma de **fraccions simples** de la forma:

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \frac{A+Bx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^n}.$$

La diferència entre els denominadors $(x-a)^n$ i $((x-\alpha)^2+\beta^2)^n$ és que el **1er.** té una arrel real a (de multiplicitat n) i el **2on.** arrels complexes $\alpha \pm \beta\mathrm{i}$ (de multiplicitat n).

Exemple (Algunes descomposicions en fracció simple (I))

1. $\dfrac{Ax+B}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{C}{x-a} + \dfrac{D}{x-b}$ *(on $a \neq b$).*
2. $\dfrac{Ax^2+Bx+C}{(x-a)(x-b)^2} = \dfrac{D}{x-a} + \dfrac{E}{x-b} + \dfrac{F}{(x-b)^2}$ *(on $a \neq b$).*
3. $\dfrac{Ax^2+Bx+C}{(x-a)(x^2+1)} = \dfrac{D}{x-a} + \dfrac{Ex+F}{x^2+1}$ *(x^2+1 té arrels $\pm\mathrm{i}$).*

Exemple (Algunes descomposicions en fracció simple (II))

4. $$\frac{r(x)}{(x-a)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \qquad (\text{grau } r(x) < 5)$$
5. $$\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-a)(x^2+2x+2)} = \frac{D}{x-a} + \frac{Ex+F}{x^2+2x+2},$$
   ja que x^2+2x+2 té arrels complexes $\alpha \pm \beta \cdot \mathrm{i} = -1 \pm 1 \cdot \mathrm{i}$:

$$x^2+2x+2 = (x-\alpha)^2+\beta^2 = (x+1)^2+1^2.$$

Comentari (Algunes integrals de fraccions simples)

- $$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a|+c, & \textit{si } n=1, \\ \dfrac{(x-a)^{1-n}}{1-n}+c, & \textit{si } n \geq 2, \end{cases}$$
- $$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)+c \qquad \left(\textit{Canvi: } u = \frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$
- $$\int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^2} = \frac{1}{2\beta^2}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)+\frac{1}{2\beta^2}\frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+c$$

Exemple (Integració fraccions racionals (I))

$$I = \int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1}\, dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx.$$

Grau de $p(x)$ *és més gran o igual que el de* $q(x)$ $\implies$ *fem la divisió polinomial de* $p(x)$ *per* $q(x)$*. Obtenim un quocient* $m(x)$ *i un reste* $r(x)$*:*

$$\underbrace{x^3 + x^2}_{p(x)} = \underbrace{(x^2 + 1)}_{q(x)} \cdot \underbrace{(x + 1)}_{m(x)} + \underbrace{(-x - 1)}_{r(x)}.$$

Obtenim:

$$\begin{aligned} I = \int \left(x + 1 - \frac{x + 1}{x^2 + 1}\right) dx &= \frac{x^2}{2} + x - \int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \arctan(x) + c \end{aligned}$$

Exemple (Integració fraccions racionals (II). Problemes 6(a,b))

$$\int \frac{dx}{x^2 - 25}, \qquad \int \frac{5\,x}{x^2 - 10\,x + 25}\,dx.$$

En els dos casos el grau numerador és menor que el del denominador. No cal fer cap divisió polinomial. Tenim:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2 - 25} &= \frac{1}{10} \int \frac{dx}{x - 5} - \frac{1}{10} \int \frac{dx}{x + 5} \\
&= \frac{1}{10} \ln|x - 5| - \frac{1}{10} \ln|x + 5| + c, \\
\int \frac{5\,x}{x^2 - 10\,x + 25}\,dx &= 5 \int \frac{dx}{x - 5} + 25 \int (x - 5)^{-2}\,dx \\
&= 5 \ln|x - 5| + 25 \left(\frac{(x - 5)^{-1}}{-1} \right) + c \\
&= 5 \ln|x - 5| - \frac{25}{x - 5} + c,
\end{aligned}$$

on usem les descomposicions en fracció simple següents.

Exemple (Integració fraccions racionals (II). (Continuació))

$$\frac{1}{x^2-25} = \frac{1}{(x-5)\,(x+5)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+5}.$$

- *Multipliquem per* $(x-5)\,(x+5)$: $1 = A\,(x+5) + B\,(x-5) \quad (*)$.
- *Fem* $x = 5$ *en* $(*)$ *:* $1 = A \cdot 10 \implies \boxed{A = \frac{1}{10}}$.
- *Fem* $x = -5$ *en* $(*)$ *:* $1 = B \cdot (-10) \implies \boxed{B = \frac{-1}{10}}$.

$$\frac{5\,x}{x^2 - 10\,x + 25} = \frac{5\,x}{(x-5)^2} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{(x-5)^2}.$$

- *Multipliquem per* $(x-5)^2$: $5\,x = A\,(x-5) + B \quad (*)$.
- *Fem* $x = 5$ *en* $(*)$ *:* $\boxed{25 = B}$.
- *Igualem coeficients de* x *en* $(*)$ *:* $\boxed{5 = A}$.

Exemple (Integració fraccions racionals (III))

$$\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x} = \int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx$$
$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c,$$

on usem:

- $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$ *té arrels* 0 *i* 1 *(doble).*
- *Fraccions simples:* $\dfrac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$.
- *Multipliquem per* $x(x-1)^2$*:* $1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx \quad (*)$
- *Fem* $x = 0$ *en* $(*)$: $\boxed{1 = A}$
- *Fem* $x = 1$ *en* $(*)$: $\boxed{1 = C}$
- *Igualem coeficients de* x^2 *en* $(*)$: $0 = A + B \iff \boxed{B = -1}$

Exemple (Integració fraccions racionals (IV))

$$I := \int \frac{-50x - 10}{x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2}\, dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx.$$

Aplicant reiteradament Ruffini, veiem que:

$$q(x) = (x-1)(x^4 + x^3 - x^3 + x - 2) = (x-1)^2(x^3 + 2x^2 + x + 2) =$$
$$= (x-1)^2(x+2)(x^2+1)\,.$$

Per tant, la seva descomposición com a suma de fraccions simples és:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D+Ex}{x^2+1}.$$

S'obté (veure pàg. següent): $A = 5$, $B = -10$, $C = 2$, $D = 9$ *i* $E = -7$.
Per tant:

$$I = 5\int \frac{dx}{x-1} - 10\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{x+2} + 9\int \frac{dx}{1+x^2} - 7\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$
$$= 5\ln|x-1| + \frac{10}{x-1} + 2\ln|x+2| + 9\arctan x - \frac{7}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

Exemple (Integració fraccions racionals (IV) (continuació))

• **Detalls càlcul** A, B, C, D, E **:** *Les constants es determinen millor multiplicant la identitat anterior per* $q(x)$ *:*

$$\left.\begin{aligned} -50x - 10 = A(x-1)(x+2)(x^2+1) + B(x+2)(x^2+1) \\ + C(x-1)^2(x^2+1) + (D+EX)(x-1)^2(x+2) \end{aligned}\right\} (*)$$

Llavors, la idea és obtenir un sistema de 5 equacions lineals que permeti determinar els coeficients. P.ex., podem fer el següent:

- *Fem* $x = 1$ *en* $(*)$ $\Longrightarrow$ $\boxed{-60 = 6B}$.
- *Fem* $x = -2$ *en* $(*)$ $\Longrightarrow$ $\boxed{90 = 45C}$.
- *Igualem teme independent en* $(*)$ */ Fem* $x = 0$ *en* $(*)$ $\Longrightarrow$ $\boxed{-10 = -2A + 2B + C + 2D}$.
- *Igualem potències* x^4 *(grau màx.) en* $(*)$ $\Longrightarrow$ $\boxed{0 = A + C + E}$.
- *Derivem* $(*)$ *i fem* $x = 1$ $\Longrightarrow$ $\boxed{-50 = 6A + 8B}$.

Resolent aquest sistema obtenim els valors de A, B, C, D, E *anteriors.*

Exemple (Integració fraccions racionals (V))

$$\int \frac{3x+2}{x(x^2+2x+2)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+2x+2}\right) dx$$
$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1) + c$$

on usem:

- $x^2+2x+2 = \underbrace{x^2+2x+1}_{\text{“quadrat”}} + 1 = (\underbrace{x+1}_{u})^2 + 1$ *no té arrels reals.*
- *Fraccions simples:* $\dfrac{3x+2}{x(x^2+2x+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2x+2}.$
- *Denominador comú i igualem coeficients:*

$$3x+2 = A(x^2+2x+2) + (Bx+C)x \implies \boxed{A=1,\ B=-1,\ C=1}$$

- *Fem el canvi* $u = x+1$ *per calcular* $\displaystyle\int \frac{-x+1}{x^2+2x+2}\,dx.$

Exemple (Integració fraccions racionals (V) (continuació))

$$
\begin{aligned}
\int \frac{-x+1}{x^2+2x+2}\,dx &= \int \frac{-x+1}{(x+1)^2+1}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 1+x \\ du = dx \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{-(u-1)+1}{u^2+1}\,du \\
&= \int \frac{-u+2}{u^2+1}\,du \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{2\,u}{u^2+1} + 2\int \frac{du}{u^2+1} \\
&= -\frac{1}{2}\ln(u^2+1) + 2\arctan(u) + c \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left((x+1)^2+1\right) + 2\arctan(x+1) + c \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) + 2\arctan(x+1) + c
\end{aligned}
$$

Exemple (Integració fraccions racionals (VI). Problema 6(c))

$$\int \frac{x+1}{(x^2+4\,x+5)^2}\,dx.$$

- $x^2+4\,x+5=0 \iff x=\dfrac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}=-2\pm\mathrm{i}=\alpha\pm\mathrm{i}\beta,$ *on:* $\alpha=-2$, $\beta=1$. *Per tant, no tenim arrels reals i podem escriure:* $x^2+4\,x+5=(x-\alpha)^2+\beta^2=(x+2)^2+1.$
- *La descomposició en fraccions simples és de la forma:*

$$\frac{x+1}{(x^2+4\,x+5)^2}=\frac{A\,x+B}{x^2+4\,x+5}+\frac{C\,x+D}{(x^2+4\,x+5)^2},$$

  on, en aquest cas, els coeficients $A=1$, $B=1$, $C=D=0$ *són directes. Això és com dir que la fracció racional de la integral* **ja està** *descomposada en fraccions simples.*
- *Per calcular la integral usarem la fórmula ja comentada:*

$$\int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^2}=\frac{1}{2\beta^2}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)+\frac{1}{2\beta^2}\frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+c.$$

Exemple (Integració fraccions racionals (VI). (Continuació))

$$\int \frac{x+1}{(x^2+4\,x+5)^2}\,dx = \int \frac{x+1}{\left((x+2)^2+1\right)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{x+2}{\left((x+2)^2+1\right)^2}\,dx - \int \frac{1}{\left((x+2)^2+1\right)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+2)^2+1} - \frac{1}{2}\arctan(x+2) - \frac{1}{2}\,\frac{x+2}{(x+2)^2+1} + c$$

$$= -\frac{1}{2}\arctan(x+2) - \frac{1}{2}\,\frac{x+3}{x^2+4\,x+5} + c,$$

on la primera de les dues integrals finals és immediata (si no ho veieu a vista, feu previament el canvi de variable $u = x+2$*):*

$$\int \frac{x+2}{\left((x+2)^2+1\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,(x+2)\left((x+2)^2+1\right)^{-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\left((x+2)^2+1\right)^{-1}}{-1} + c.$$

Exemple (Integració fraccions racionals (VI). (Fi))

Per calcular la segona, fem $\alpha = -2$, $\beta = 1$ *en els calculs següents:*

$$\int \frac{1}{\left((x+2)^2+1\right)^2}\,dx = \int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^2}$$
$$= \frac{1}{2\beta^2}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{2\beta^2}\frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + c$$
$$= \frac{1}{2}\arctan(x+2) + \frac{1}{2}\frac{x+2}{(x+2)^2+1} + c.$$

Integrals trigonomètriques racionals

Integrals de la forma $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ on $R(\sin x, \cos x)$ és una expressió racional ("quocient polinomis") en $\sin x$ i $\cos x$.

Comentari (Identitats trigonomètriques bàsiques)

Molts cops aquestes integrals poden calcular-se usant identitats com:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2},$$
$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

combinades amb canvis de variable de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \end{array} \right\} \quad \textit{o bé} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x\, dx \end{array} \right\}.$$

Exemple (Integral trigonomètrica via identitats elementals (I))

$$\begin{aligned}
\int \sin^3(x)\cos^2(x)\,dx &= \int \sin^2(x)\sin(x)\cos^2(x)\,dx \\
&= \int (1-\cos^2(x))\sin(x)\cos^2(x)\,dx \\
&= \int \sin(x)\cos^2(x)\,dx - \int \sin(x)\cos^4(x)\,dx \\
&= -\frac{\cos^3(x)}{3} + \frac{\cos^5(x)}{5} + c
\end{aligned}$$

Exemple (Integral trigonomètrica via identitats elementals (II))

$$\begin{aligned}
\int \sin^3(x)\cos^2(x)\,dx &= \left\{\begin{array}{l} u=\cos(x) \\ du=-\sin(x)\,dx \\ sin^2(x)=1-u^2 \end{array}\right\} = -\int (1-u^2)u^2\,du \\
&= -\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+c = -\frac{\cos^3(x)}{3}+\frac{\cos^5(x)}{5}+c
\end{aligned}$$

Exemple (Integral trigonomètrica via identitats elementals (III))

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4(x)\,dx &= \int (\sin^2(x))^2\,dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int [1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)]\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left[1-2\cos(2x)+\left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)\right]\,dx \\
&= \int \left[\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{8}\cos(4x)\right]\,dx \\
&= \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{32}\sin(4x)+c
\end{aligned}
$$

Regles generals pel càlcul de $I = \int R(\sin x, \cos x)\, dx$

Podem transformar I en una **integral racional** mitjançant el **canvi**:

(i) R **funció senar** en $\sin x$ si $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$:

$$u = \cos x \;\rightarrow\; du = -\sin x\, dx$$

(ii) R **funció senar** en $\cos x$ si $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$:

$$u = \sin x \;\rightarrow\; du = \cos x\, dx$$

(iii) R **funció parell** si $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$:

$$\begin{aligned} u &= \tan(x) \;\rightarrow\; dx = \frac{du}{1+u^2} \\ \sin(x) &= \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \end{aligned}$$

Exemple (Integrals trigonomètriques (I))

- $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ *senar en* $\sin x$ *:*

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} u = \cos x \\ du = -\sin x\,dx \end{array} \right\} = -\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= -\arctan u + c = -\arctan(\cos x) + c$$

(De fet és una integral immediata.)

- $R(\sin x, cosx) = \cos^3(x)\sin^{2n}(x)$ *senar en* $\cos x$ *:*

$$\int \cos^3(x)\sin^{2n}(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{c} u = \sin x \\ \cos^2 x = 1-u^2 \\ du = \cos x\,dx \end{array} \right\} = \int (1-u^2)u^{2n}\,du$$

$$= \int \left(u^{2n} - u^{2n+2}\right)\,du = \frac{u^{2n+1}}{2n+1} - \frac{u^{2n+3}}{2n+3} + c$$

$$= \frac{\sin^{2n+1}(x)}{2n+1} - \frac{\sin^{2n+3}(x)}{2n+3} + c.$$

Exemple (Integrals trigonomètriques (II))

$R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{1+\cos^2(x)}$ *parell en* $\cos x$ *i* $\sin x$ *:*

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2(x)} = \left\{ \begin{array}{c} u = \tan(x) \\ dx = \dfrac{du}{1+u^2} \\ \cos(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} \end{array} \right\} \overset{(*)}{\overbrace{=}} \int \frac{du}{2+u^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+(u^2/2)} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+(u/\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + c = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\tan(x)}{\sqrt{2}}\right) + c$$

Calculs $(*)$ *amb el canvi de variable:*

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2(x)} = \int \frac{1}{1+\underbrace{\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2}_{\cos^2(x)}} \cdot \underbrace{\frac{du}{1+u^2}}_{dx} = \int \frac{1}{(1+u^2)+1}\,du$$

Exemple (Integrals trigonomètriques (III))

$R(\cos x, \sin x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x}$ *parell* $\cos x$ *i* $\sin x$ *:*

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \tan x \\ dx = \dfrac{du}{1+u^2} \\ \sin x = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}} \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} \end{array} \right\} = \int \frac{\left(1/\sqrt{1+u^2}\right)^2}{\left(u/\sqrt{1+u^2}\right)^4} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \int \frac{du}{u^4} = \int u^{-4}\,du = -\frac{1}{3}u^{-3} + c$$

$$= -\frac{1}{3}(\tan x)^{-3} + c = -\frac{1}{3}\,(cotan\,(x))^3 + c.$$

Regles càlcul $I = \int R(\sin x, \cos x)\, dx$ (continuació)

(iv) **Cas** R **funció racional general** (usar si no valen els altres!)

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right) \;\rightarrow\; dx = \dfrac{2}{1+u^2}\, du \\ \sin(x) = \dfrac{2u}{1+u^2}, \quad \cos(x) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \end{array} \right\} \quad (*)$$

Exemple (Integrals trigonomètriques (IV))

Apliquem el canvi $(*)$*:*

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}\, du}{1+\frac{2\,u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}\, du}{\frac{(1+u^2)+2\,u+(1-u^2)}{1+u^2}}$$

$$= \int \frac{du}{1+u} = \ln|1+u| + c = \ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

Exemple (Integrals trigonomètriques (V))

Apliquem el canvi $(*)$*:*

$$\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x} = \left\{ \begin{array}{c} u=\tan\left(\frac{x}{2}\right), \;\; dx=\frac{2}{1+u^2}\,du \\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2}, \;\; \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2} \end{array} \right\}$$

$$= \int \frac{\frac{2}{1+u^2}\,du}{1+\frac{2u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{du}{u^2+u}$$

$$= \int \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right) du = \ln|u| - \ln|u+1| + c$$

$$= \ln\left|\frac{u}{1+u}\right| + c = \ln\left|\frac{\tan(x/2)}{1+\tan(x/2)}\right| + c,$$

on usem que $A=1$, $B=-1$ *en la descomposició en fraccions simples:*

$$\frac{1}{u^2+u} = \frac{1}{u\,(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} \iff 1 = A\,(u+1) + B\,u.$$

Exemple (Integrals trigonomètriques (VI). Problema 5(b).)

Per calcular la següent integral (que no és racional trigonomètrica) farem el canvi $u^2 = \sin x$ *:*

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \left\{\begin{array}{l} u^2 = \sin x \\ 2\,u\,du = \cos x\,dx \\ dx = \dfrac{2\,u}{\cos x}\,du \end{array}\right\} = \int \frac{\cos^5 x}{u}\,\frac{2\,u}{\cos x}\,du$$

$$=2\int \cos^4 x\,du = 2\int (\cos^2 x)^2\,du$$

$$=2\int (1-\sin^2 x)^2\,du = 2\int (1-u^4)^2\,du$$

$$=2\int (1-2\,u^4+u^8)\,du = 2\,u - 4\,\frac{u^5}{5} + 2\,\frac{u^9}{9} + c$$

$$=2\sqrt{\sin x} - \frac{4}{5}\,(\sqrt{\sin x})^5 + \frac{2}{9}\,(\sqrt{\sin x})^9 + c.$$

Integrals (irracionals) que contenen $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$

Les calculem fent el canvi:

$$x = \alpha \sin u, \quad \cos u = \frac{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}{\alpha}, \quad dx = \alpha \cos(u)\, du.$$

Exemple ($\alpha = 4$)

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16 - x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \sin u \\ dx = 4\cos(u)\, du \\ \cos u = \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{4} \end{array} \right\} = \int \frac{4\cos(u)\, du}{(4 \sin u)^2 \cdot (4\cos u)}$$

$$= \frac{1}{16} \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\frac{1}{16} \mathrm{cotan}\,(u) + c = -\frac{1}{16} \frac{\cos u}{\sin u} + c$$

$$= -\frac{1}{16} \frac{\overbrace{(\sqrt{16 - x^2}/4)}^{\cos u}}{\underbrace{(x/4)}_{\sin u}} + c = -\frac{\sqrt{16 - x^2}}{16x} + c.$$

Exemple (Substitucions trigonòmetriques. Problema 7(b))

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin u \\ dx = \cos u\,du \\ \sqrt{1-x^2} = \cos u \end{array} \right\} = \int \frac{\cos u}{\sin^4 u}\,\cos u\,du$$

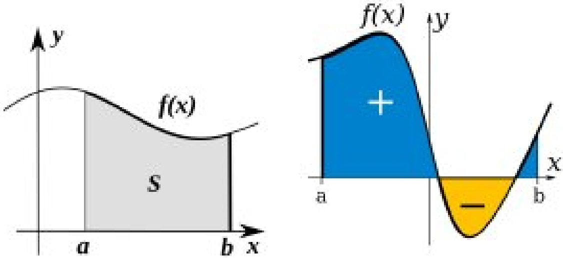
$$= \int \frac{\cos^2 u}{\sin^4 u}\,du = \int \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}\,\frac{1}{\sin^2 u}\,du$$

$$= -\int (cotan\,(u))^2 \cdot (cotan\,(u))'\,du$$

$$= -\frac{1}{3}\,(cotan\,(u))^3 + c = -\frac{1}{3}\,\frac{\cos^3 u}{\sin^3 u} + c$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{x^3} + c.$$

Si no es veu que la integral $\displaystyle\int \frac{\cos^2 u}{\sin^4 u}\,du$ *és immediata, vegeu l'exemple (III) d'integrals racionals trigonomètriques on hem usat que* $\displaystyle R(\cos u, \sin u) = \frac{(\cos u)^2}{(\sin u)^4}$ *és parell en* $\sin u$ *i* $\cos u$ *.*



Definició (Integral definida)

Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funció contínua que suposarem no negativa:* $f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a,b]$. *Denotarem mitjançant el simbol* $\int_a^b f(x)\,dx$ *el valor de l'àrea tancada per l'eix* x *i la gràfica de la funció* $y = f(x)$ *en l'interval* $[a,b]$ *i l'anomenarem* **integral definida de la funció** f **en l'interval** $[a,b]$. *Això és,* $\int_a^b f(x)\,dx = \grave{A}rea(S)$ *(figura esquerra).*

Comentari (Integral definida de funcions amb canvi de signe)

Si $f(x)$ *té canvis de signe en* $[a,b]$*, llavors* $\int_a^b f(x)\,dx$ *denota* **l'àrea amb signe de** f*: l'àrea la comptem positiva allà on* $f(x) \geq 0$ *i la comptem negativa allà on* $f(x) \leq 0$*. Això és,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Àrea}(+) - \text{Àrea}(-) \quad \textit{(figura dreta pàg. anterior)}$$

En el que segueix, de moment ens restringim al cas on $f(x) \geq 0$.

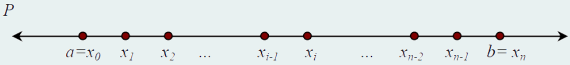
Qüestió (Com formalitzem el càlcul de $\int_a^b f(x)\,dx$?)

- *D'entrada, nosaltres només sabem calcular àreas de dominis geomètrics senzills com, p. ex., rectangles. Llavors,* **com formalitzem el càlcul de l'àrea sota la gràfica d'una funció arbitraria?**
- **Resposta:** *La idea de la* **integral de Riemann** *és aproximar la gràfica de* $y = f(x)$ *per una successió de rectangles que s'ajustin cada cop més a la funció.*

Particions d’un interval

Definició (Particions de l’interval $[a, b]$ de pas h)

Donat un enter $n \geq 1$, *definim* $h = \dfrac{b-a}{n}$ *i trenquem l’interval* $[a, b]$ *en* n *trossos de tamany* h *segons es veu en la figura:*



on $x_0 = a$ *i* $x_j = x_0 + j \cdot h, \ \forall j = 1, \ldots, n$. *Així, la separació entre* x_{j-1} *i* x_j *és constant i igual a* h. *En particular,* $x_n = x_0 + n \cdot h = b$. *Llavors, anomenarem al conjunt de punts*

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

una **partició de l’interval** $[a, b]$ **de pas** h.

Comentari (Particions de pas arbitrari)

De manera natural també podem introduir particions de l'interval $[a, b]$ $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ *on la* **distància entre punts** *consecutius,* $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, **no sigui constant**. *En aquest cas, denotem per* $\|\Delta\| = \max\limits_{j=1,\ldots,n} \{\Delta x_j\}$ *el màxim d'aquestes separacions i l'anomenarem el* **tamany de la partició**.
(Observeu que per una partició de pas constant h *llavors* $\|\Delta\| = h$*).*

Definició (Valors màxims i mínims de f associats a la partició P)

Donada una partició $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$, *denotem per* m_j *i* M_j *els punts del sub-interval* $[x_{j-1}, x_j]$ *on la funció* f *assoleix el seu valor mínim i màxim, respectivament:*

$$f(m_j) = \min_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x), \qquad f(M_j) = \max_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$$

Sumes de Riemann

Definició (Sumes superiors i inferiors de Riemann)

Donda $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funció contínua i positiva i una partició* $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ *de l'interval* $[a,b]$*, definim:*

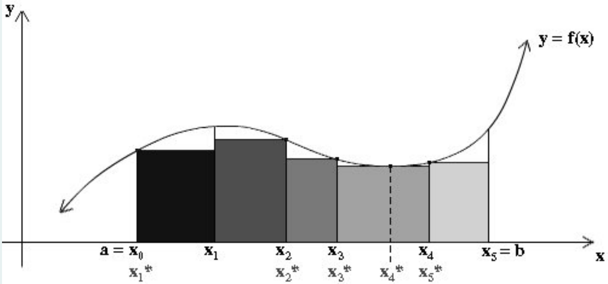
$$s(f,P) = \sum_{j=1}^{n} f(m_j) \cdot \Delta x_j, \qquad S(f,P) = \sum_{j=1}^{n} f(M_j) \cdot \Delta x_j.$$

$s(f,P)$ *és la* **suma inferior de Riemann de** f **en** $[a,b]$ **associada a la partició** P *i* $S(f,P)$ *és la corresponent* **suma superior de Riemann**.

Observació

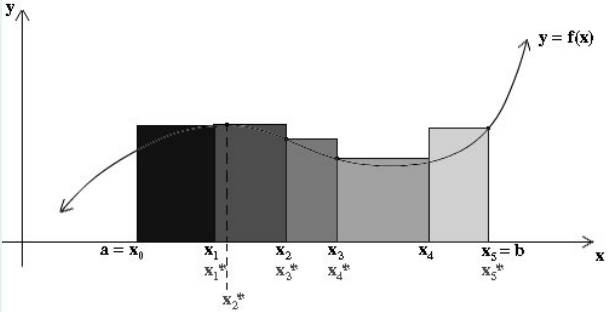
La idea de $s(f,P)$ *és aproximar l'àrea sota la gràfica de la funció* f *en* $[a,b]$ *per la* **suma de les àreas de** n **rectangles que ajusten per sota la gràfica** *de la funció en cada sub-interval* $[x_{j-1}, x_j]$.
Similarment, $S(f,P)$ *aproxima l'àrea ajustant-la per* n **rectangles que queden per sobre de la gràfica** *de la funció.*

Exemple (Suma inferior de Riemann de f **en** $[a, b]$)



Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *la funció de la figura i considerem la partició* $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = b\}$. *Ens fixem, p. ex., en el sub-interval* $[x_3, x_4]$. *El punt* $m_4 = x_4^*$ *és on f pren el seu mínim en* $[x_3, x_4]$. *Si calculem* $f(x_4^*) \cdot (x_4 - x_3) = f(x_4^*)\, \Delta x_4$, *això ens dóna l'àrea del quart dels rectangles de la figura. La suma de les àreas dels cinc rectangles ens dóna la corresponent suma inferior de Riemann i aproxima per sota el valor de la integral* $\int_a^b f(x)\, dx$.
(Observeu que, p. ex., si considerem $[x_0, x_1]$ *llavors* $m_1 = x_1^* = a$.*)*

Exemple (Suma superior de Riemann de f en $[a, b]$)



Observació (Comparació sumes superiors i inferiors i la integral)

És clar que per a qualsevol partició P tenim:

$$s(f,P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(f,P)$$

Teorema (Integral definida d'una funció contínua)

Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funció contínua i positiva i considerem totes les possibles particions* P *de* $[a,b]$.
Aleshores, existeixen i són coincidents els límits següents:

$$I = \lim_{\|\Delta\| \to 0} s(f,P) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} S(f,P).$$

Això és, quan el **tamany** $\|\Delta\|$ *de la partició* P *tendeix a zero, llavors les sumes inferiors i superiors de Riemann s'ajusten cada cop més a l'àrea sota la gràfica de la funció i donen lloc al mateix valor límit.*
Escriurem doncs, per definició,

$$\int_a^b f(x)\,dx = I.$$

Comentari

El càlcul dels valors de m_j i M_j involucrats en les sumes superiors i inferiors de Riemann és, en general, inabordable. Per sort, podem modificar la definció d'aquestes sumes i introduir noves sumes, més fàcils de calcular, però per a les que també val el teorema anterior.

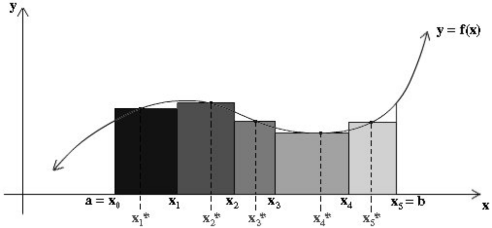
Definició (Sumes de Riemann)

Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció i $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una partició de l'interval $[a, b]$. Escollim n punts arbitraris, $\{c_j\}_{j=1,\ldots,n}$, de forma que $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Llavors, anomenem a l'expressió seguent **una suma de Riemann de f en $[a, b]$ associada a la partició P**

$$\sum_{j=1}^{n} f(c_j)\,\Delta x_j.$$

Això és, per definir una suma de Riemann, no cal que els valors de c_j triats siguin ni els m_j de les sumes inferiors ni els M_j de les superiors.

Exemple (Suma de Riemann de f **en** $[a, b]$)



Els valors $f(c_j) = f(x_j^*)$ determinen 5 rectangles que aproximen l'àrea sota la gràfica de f, però que no queden ni per sobre ni per sota de f.

Comentari

• $s(f, P) \leq \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\, \Delta x_j \leq S(f, P)$.

• *Les sumes de Riemann permeten extendre la noció d'integral definida a funcions que no tenen perquè ser contínues i amb independència dels seus canvis de signe en l'interval* $[a, b]$.

Definició (Funcions integrables Riemann / Integral definida)

Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funció* **acotada** *en* $[a, b]$. *Direm que* f *és* **integrable Riemman en** $[a, b]$ *síí. existeix el límit de les sumes de Riemann de* f *en* $[a, b]$ *quan* $\|\Delta\| \to 0$. *Llavors escriurem, per definició:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\,\Delta x_j,$$

essent $\int_a^b f(x)\,dx$ *el valor de la* **integral definida de** f **en** $[a, b]$.

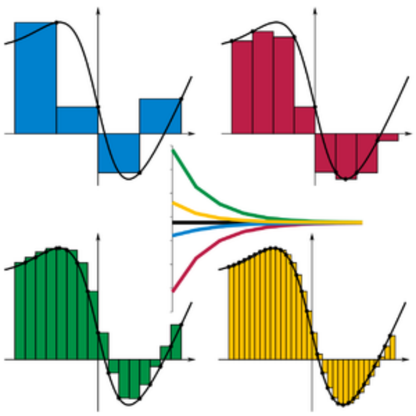
Comentari (Atenció: No totes les funcions són integrables!)

Hi ha funcions acotades en $[a, b]$ *que no són integrables Riemann. P. ex., la* **funció de Dirichlet**, *vista al tema de continuïtat, no és integrable Riemann en cap interval.*

Corol·lari (Integrabilitat de les funcions contínues)

f *contínua en* $[a, b] \implies f$ *és integrable Riemann en* $[a, b]$.

Exemple (Aproximació de la integral de f per sumes de Riemann cada cop més fines)



En les 4 figures s'observa com, si incrementem el nombre de rectangles amb els que calculem les sumes de Riemann, llavors cada cop ajustem millor l'àrea tancada per la gràfica de la funció.

Proposició (Propietats de la integral definida $(a < b)$)

1. **Notació:** $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ *i* $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$
2. **Additivitat:** $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ *si* $a < c < b.$
3. **Linealitat:** $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$
4. **Monotonia:**
   $f(x) \leq g(x),\ \ \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$

Teorema (fonamental del càlcul)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funció contínua i $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ primitiva de f. Llavors:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \textbf{(Regla de Barrow)}$$

Demostració (Teorema fonamental del càlcul)

$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ *partició de* $[a,b]$. *Escrivim:*

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \\ &\quad + \cdots + (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_1) - F(x_0)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (F(x_j) - F(x_{j-1})). \end{aligned}$$

Usant el **teorema del valor mig** *en cada sub-interval* $[x_{j-1}, x_j]$:

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = F'(c_j)(x_j - x_{j-1}) = f(c_j)\Delta x_j, \quad c_j \in (x_{j-1}, x_j)$$

Demostració (Teorema fonamental del càlcul (continuació))

Si juntem els dos calculs anterios obtenim:

$$F(b) - F(a) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j}_{\substack{\text{Suma de Riemann} \\ \text{de } f \text{ en } [a,b]}} \quad \underbrace{\longrightarrow}_{\|\Delta x\|\to 0} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

Quan el tamany de la partició P *tendeix a zero, veiem que la diferència* $F(b) - F(a)$ *tendeix a ser la integral de* f *en* $[a, b]$.

Observació

El Teorema fonamental del càlcul no és cert si f *no és contínua en* $[a, b]$ *. Si* f *no és contínua cal trencar l'interval en trossos de forma que la funció sigui contínua en cada tros i aplicar el Teorema fonamental del càlcul en cadascun d'ells.*

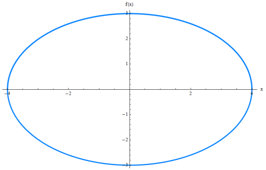


Figure : El·lipse d'equació $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$. En aquest cas, $f(x) = 3\sqrt{1 - x^2/16}$.

Càlcul de l'àrea delimitada per una el·lipse

Calculeu A valor de l'àrea de $\mathbb{R}^2$ delimitada per l'el·lipse E d'equació:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \text{ on } \; a, b > 0\,.$$

• E és simètrica respecte els eixos $x, y \implies A = 4\,I$, on I és l'àrea de la part de l'el·lipse continguda en el primer quadrant.

• Aïllant y en termes de x en l'equació de E, s'obté que I és el valor de l'àrea sota la gràfica $y = f(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $x \in [0, a]$, donada per $I = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \frac{\pi\, a\, b}{4}$ (detalls tot seguit) $\implies A = 4\,I = \pi\, a\, b$.

• Per calcular I usarem la substitució $x = a \sin t$ en la integral. És important notar que, en aquest cas, no només substituirem la x per la t en la integral, sinó que també modificarem els extrems d'integració d'acord amb el canvi. Això és, els extrems de la integral quan la calculem com a funció de x són $x = 0$ i $x = \pi$, però quan la calculem com a funció de t són els valors de $t = 0$ i $t = \dfrac{\pi}{2}$ corresponents via la transformació $x = a \sin t$. Això és:

$$\boxed{\begin{array}{rl} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \to [0, a] \\ t & \mapsto x = a\, sint \end{array}}$$

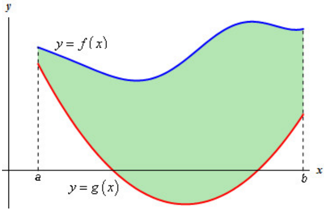
$$I = \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

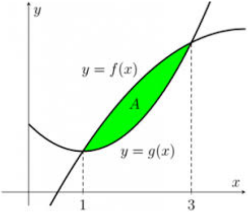
$$= \left\{ \begin{array}{l} x = a \sin t \to dx = a \cos t\,dt \\ x = 0 \to t = 0;\ x = a \to t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} = a\,b \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{a\,b}{2}\int_0^{\pi/2} \big(1 + \cos(2t)\big)\,dt = \frac{a\,b}{2}\Big[t + \frac{\sin(2t)}{2}\Big]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{\pi\,a\,b}{4},$$

on usem: $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2\,(1 - \cos^2 t)} = a\sqrt{\sin^2 t} = a \cos t.$

Àrea de la regió entre dues corbes



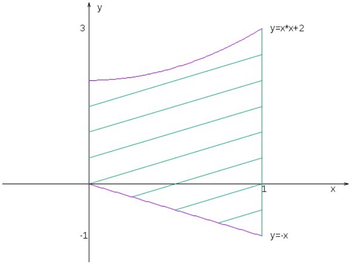


- L'Àrea A entre les gràfiques de les funcions $y = f(x)$ i $y = g(x)$ en l'interval $x \in [a, b]$ de la figura de l'esquerra es calcula fent:

$$A = \int_a^b \Big(\underbrace{f(x)}_{\text{funció superior}} - \underbrace{g(x)}_{\text{funció inferior}} \Big)\, dx.$$

- L'Àrea A tancada per les gràfiques $y = f(x)$ i $y = g(x)$ es calcula trobant els punts de tall de les dues funcions, en la figura de la dreta $x = 1$ i $x = 3$, i calculant l'Àrea de lòbul tancat entre elles:

$$A = \int_1^3 (f(x) - g(x))\, dx.$$

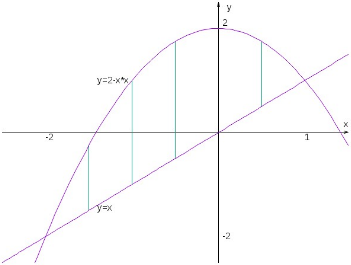


Exemple 1

Àrea A entre $y = f(x) = x^2 + 2$ i $y = g(x) = -x$ en $I = [0, 1]$.

En la figura es veu que $f(x) > g(x)$ en $I \implies A = \int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx$:

$$A = \int_0^1 (x^2 + 2 - (-x))\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2\,x\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{17}{3}.$$



Exemple 2

Àrea A tancada entre $y = f(x) = x$ i $y = g(x) = 2 - x^2$.

Els punts de tall de les gràfiques són quan:

$$x = f(x) = g(x) = 2 - x^2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies x \in \{-2, 1\}.$$

En la figura veiem $g(x) \geq f(x)$ en $[-2, 1] \implies A = \int_{-2}^{1} (g(x) - f(x))\, dx$:

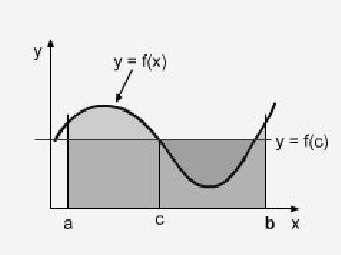
$$A = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx = \left[2\,x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) = \frac{9}{2}.$$

Teorema (del valor mig per a integrals)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funció contínua. Aleshores* $\exists c \in [a, b]$ *tal que:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \iff \underbrace{\bar{f} := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{\bar{f} \text{ valor promig de } f \text{ en } [a,b]} = f(c)$$



El valor $f(c)$ coincideix amb el **promig** de f en $[a, b]$ o, el que és el mateix, l'àrea sota la gràfica de f en $[a, b]$ coincideix amb l'àrea del rectangle de base $[a, b]$ i alçada $f(c)$.

Demostració (Teorema del valor mig per a integrals)

f contínua en $[a, b] \implies \exists m, M \in [a, b]$ tals que:

$$f(m) = \min_{x \in [a,b]} f(x), \qquad f(M) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

Equivalentment: $f(m) \leq f(x) \leq f(M), \ \forall x \in [a, b]$.
Per la propietat de monotonia de la integral, si integrem ontenim:

$$f(m)(b-a) = \int_a^b f(m)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f(M)\,dx = f(M)(b-a)$$

Dividim per $b - a$ i denotem per $\bar{f} := \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Llavors:

$$f(m) \leq \bar{f} \leq f(M).$$

$\bar{f}$ és un nombre que està entre el valor màxim i el mínim de f en $[a, b]$.
Com que f és contínua en $[a, b]$, pel **teorema del valor intermig per a funcions contínues** *existeix (almenys) un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \bar{f}$.*

Exemple (Teorema del valor mig per a integrals **(TVMI)**)

- *Considerem* $f(x) = 3x^2 - 2x$ *en* $[a,b] = [1,4]$.
- *El promig de* f *en* $[1,4]$ *és* $\bar{f} = 16$ *:*

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_1^4 (3x^2 - 2x)\,dx = \frac{1}{3}\left[x^3 - x^2\right]_{x=1}^{x=4} = 16.$$

- *Pel* **TVMI** $\exists c \in [1,4]$ *tal que* $f(c) = \bar{f} = 16$. *Qui és* c *?*

$$f(c) = 16 \iff 3c^2 - 2c = 16 \iff 3c^2 - 2c - 16 = 0$$

$$\iff c_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 3\cdot(-16)}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{2 \pm 14}{6}.$$

  - *La solució* $c_- = \dfrac{2-14}{6} = -2 \notin [1,4]$. **No val!**
  - *La solució* $c_+ = \dfrac{2+14}{6} = \dfrac{8}{3} \in [1,4]$ **és la bona!**

Funcions definides per integrals

Definició (Funció integral)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funció contínua. La seva funció integral és $F : [a,b] \to \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Observació

En la definció $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ el paper de t és de **variable muda** *que desapareix en integrar. Es recomanable* **usar un nom diferent de x per la variable muda** *(li podem dir s, u, etc.) i procurar no escriure mai $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ per evitar confucions.*

Teorema (fonamental del càlcul (versió 2))

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua i $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ la seva funció integral. Llavors, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ és derivable i $F'(x) = f(x)$. (Per tant, F és una funció primitiva de f.)

Demostració (Segon teorema fonamental del càlcul)

Usem la definció de $F'(x)$ *(per fixar idees triem* $h > 0$ *):*

$$F(x+h)-F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \underbrace{=}_{(A)} \int_x^{x+h} f(t)\,dt \underbrace{=}_{(B)} hf(c_{x,h})$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c_{x,h}) \underbrace{=}_{(D)} f\left(\lim_{h\to 0} c_{x,h}\right) \underbrace{=}_{(C)} f(x)$$

(A) *Additivitat de la integral:* $\int_a^{x+h} = \int_a^x + \int_x^{x+h}$.

(B) **TVMI**: f *contínua* $\Longrightarrow \exists c = c_{x,h} \in [x, x+h]$ *tal que:*

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c_{x,h}) \cdot [(x+h)-x] = hf(c_{x,h}).$$

(C) $c_{x,h} \to x$ *quan* $h \to 0$.

(D) f *contínua* $\Longrightarrow$ *podem permutar límit i funció.*

Exemple

Donada la funció definida per una integral $F(x) = \int_1^x \sin(\sin(t))\,dt$, calculeu ($F^{-1}$ denota inversa local e F):

(a) Calculeu la recta tangent a $y = F(x)$ en $x = 1$.

(b) Calculeu la recta tangent a $y = F^{-1}(x)$ en $x = 0$.

La recta tangent a $y = f(x)$ en $x = x_0$ és $y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$. Usant la segona versió del teorema fonamental del càlcul que acabem de veure tenim $F'(x) = \sin(\sin(x)) \implies F'(1) = \sin(\sin(1))$. A més, és té: $F(1) = \int_1^1 \sin(\sin(x))\,dx = 0 \implies F(1) = 0 \implies F^{-1}(0) = 1 \implies$

$$(F^{-1})'(0) = \frac{1}{F'(1)} = \frac{1}{\sin(\sin(1))}.$$

Per tant:

(a) $y = F(1) + F'(1)\cdot(x-1) = \sin(\sin(1))\cdot(x-1)$.

(b) $y = F^{-1}(0) + (F^{-1})'(0)\cdot(x-0) = 1 + \dfrac{x}{\sin(\sin(1))}$.

Teorema (Regla de Leibniz)

$f(x)$ funció contínua i $\alpha(x)$, $\beta(x)$ funcions derivables. La funció

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$$

és derivable i

$$G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x).$$

Demostració (Regla de Leibniz)

Sigui $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ $\Longleftrightarrow$ $F'(x) = f(x)$.
*Pel teorema fonamental del càlcul (“**regla de Barrow**”) tenim:*

$$G(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x)).$$

Deriveu $G(x)$ i useu la regla de la cadena.

Exercici (Regla de Leibniz)

Consideu la funció $F(x)$ definida per la integral:

$$F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt, \qquad x \in [-\pi/2, \pi/2],$$

i denotem per F^{-1} la inversa local de F.

1. *Calculeu la recta tangent a $y = F^{-1}(x)$ en $x = 0$.*
2. *Calculeu $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{F(x)}{\cos(2\,x)}$.*

1. Com que $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} > 0$ sempre, llavors:

$$(F^{-1})(0) = x \iff F(x) = 0 \iff \alpha(x) = \beta(x) \iff \sin x = \cos x.$$

Usant que $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, llavors: $\sin x = \cos x \iff x = \pi/4$.
Usant $\alpha'(x) = \cos x$ i $\beta'(x) = -\sin x$, la regla de Leibniz ens diu:

$$F'(x) = f(\beta(x))\cdot\beta'(x) - f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x) = \mathrm{e}^{-\cos^2 x}(-\sin x) - \mathrm{e}^{-\sin^2 x}\cos x.$$

Per tant:

$$F'(\pi/4) = \mathrm{e}^{-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \mathrm{e}^{-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{-1/2}.$$

1. (Continuació.) Així doncs, usant $F(\pi/4) = 0 \iff F^{-1}(0) = \pi/4$:

$$(F^{-1})'(0) = \frac{1}{F'(\pi/4)} = \frac{1}{-\sqrt{2}\mathrm{e}^{-1/2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{1/2}.$$

   En particular, la recta tangent a $y = F^{-1}(x)$ en $x = 0$ és:

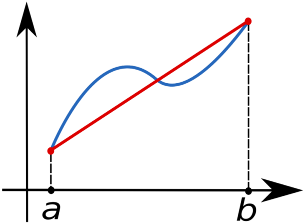
$$y = F^{-1}(0) + (F^{-1})'(0) \cdot (x - 0) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{1/2}\, x.$$

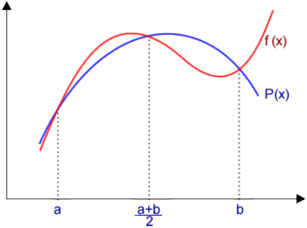
2.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{F(x)}{\cos(2\,x)} = \frac{F(\pi/4)}{\cos(\pi/2)} = \frac{0}{0} \underbrace{=}_{\text{L'Hôp.}} \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{F'(x)}{-2\,\sin(2\,x)}$$

$$= \frac{F'(\pi/4)}{-2\,\sin(\pi/2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-1/2}.$$

- **Objectiu:** Donar un valor numèric ("aproximat") per a la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ quan no sabem calcular cap primitiva de $f(x)$.
- **Idea:** Aproximar $f(x)$ per un polinomi $p(x)$ i integrar $p(x)$ enlloc de $f(x)$.





- **Figura esquerra:** Aproximem $f(x)$ (en blau) per un polinomi de grau 1 (la recta en vermell). **Mètode dels trapezis.**
- **Figura dreta:** Aproximem $f(x)$ (en vermell) per un polinomi de grau 2 (la parabola $p(x)$ en blau). **Mètode de Simpson.**

Mètode dels trapezis

Aproximem $f(x)$ en $[a,b]$ pel polinomi $p(x)$ de grau 1 que **interpola** $f(x)$ en els extrems de l'interval:

- $f(x) \simeq p(x) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b p(x)\,dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$

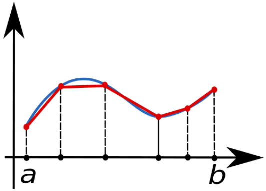
Mètode de Simpson

Aproximem $f(x)$ en $[a,b]$ pel polinomi $p(x)$ de grau 2 que **interpola** $f(x)$ en els extrems de l'interval i en el punt mig $c = \dfrac{a+b}{2}$.

- $f(x) \simeq p(x) = f(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b p(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

Comentari

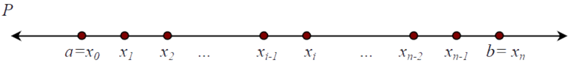
- **Trapezis** *i* **Simpson** *donen aproximacions "raonables" de la integral si l'interval* $[a, b]$ *és "***petit***".* *(Molt millor Simpson!)*
- *Si* $[a, b]$ *és "***gran***" el trenquem en* **subintervals** *més petits i, en cadascun d'ells, apliquem trapezis o Simpson per aproximar l'integral. Si sumem les integrals aproximades obtingudes en cada sub-interval, obtenim les anomenades "***fórmules compostes***".*



Trapezis compost: Trenquem $[a, b]$ en 5 sub-intervals i en cadascun d'ells aproximem la gràfica de la funció (en blau) per la recta que la interpola en els extrems del sub-interval. Obtenim una poligonal (en vermell) i la seva integral aproxima l'integral de la funció.

Mètodes compostos

- Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (funció i intervals **donats**).
- Triem $n \geq 1$ i definim $h = \dfrac{b-a}{n}$ (h és el **pas d'integració**).
- Dividim l'interval $[a,b]$ en n trossos de tamany h.
- Obtenim $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ una **partició uniforme** de $[a,b]$, on $x_j = a + j \cdot h$, $j = 0, \ldots, n$.



- $T(h) = T_n(f;[a,b]) \equiv$ **Mètode dels trapezis compost de pas** h:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq T(h) = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

- $S(h) = S_n(f;[a,b]) \equiv$ **Mètode de Simpson compost de pas** h:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq S(h) = \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n))$$

Important: En el mètode de Simpson compost cal que n sigui sempre un **nombre parell**, de la forma $n = 2\cdot m$.

- **Relació entre Simpson i trapezis:**

$$S(H) = \frac{4\cdot T(H) - T(2H)}{3}$$

  - $S(H) \equiv$ Simpson compost amb $n = 2\cdot m$ i $h = H = \dfrac{b-a}{n}$
  - $T(H) \equiv$ trapezis compost amb $n = 2\cdot m$ i $h = H = \dfrac{b-a}{n}$
  - $T(2H) \equiv$ trapezis compost amb $n = m$ i $h = \dfrac{b-a}{m} = 2H$

Error que cometem en usar els mètodes compostos

- Si usem un mètode d'integracio numèrica per aproximar la integral cometem un **error.**
- No coneixem exactament aquest error però sí podem **acotar-lo**.
- Si f és dos cops derivable en $[a, b]$ i f'' és contínua en $[a, b]$, denotem per $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$. Aleshores:

$$\underbrace{\left| \int_a^b f(x)\, dx - T(h) \right|}_{\text{error trapezis compost pas } h} \leq \underbrace{\frac{(b-a)M_2}{12}\, h^2}_{\text{cota superior de l'error}}$$

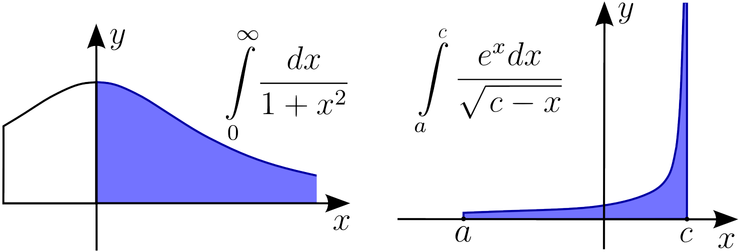
- Si f és quatre cops derivable en $[a, b]$ i $f^{(4)}$ és contínua en $[a, b]$, denotem per $M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$. Aleshores:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - S(h) \right| \leq \frac{(b-a)M_4}{180}\, h^4$$

Les integrals impròpies són “integrals definides” (integrals d’una funció en un interval donat) que compleixen una de les propietats següents:

1. L’interval d’integració té longitud infinita (integrals impròpies de primera espècie).
2. La funció que integrem esdevé infinita en un (o més d’un) punt (integrals impròpies de segona espècie).
3. Les dues coses a la vegada (tercera espècie).

Una integral impròpia pot ser convergent i donar un valor finit, o bé ser divergent si dóna $\pm\infty$ o bé no té cap valor definit. En la figura teniu una integral impròpia de primera espècie i una de segona.



$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \qquad \int_a^c \frac{e^x\,dx}{\sqrt{c-x}}$$

Definició (Integral de primera espècie)

$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funció que és integrable en tot interval compacte de la forma $[a, M]$, per a tot $M > a$. Direm que la integral impròpia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ és convergent si existeix (i és finit) el límit:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

Direm que la integral impòpia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ és divergent si el límit no existeix (inclou el cas en que val $\pm\infty$). Anàlogmanet, podem definir:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{M\to-\infty} \int_M^b f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{(on } c \in \mathbb{R} \text{ és arbitrari).}$$

(Per tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ sigui convergent, cal que ho siguin les dues integrals de la suma separadament. Només que una d'elles sigui divergent, també ho és $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.)

Definició (Integral de segona espècie)

$f : (a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $\nexists \lim_{x \to a^+} f(x)$. La integral impròpia $\int_a^b f(x)\, dx$ és convergent si existeix el límit:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\delta \to a^+} \int_\delta^b f(x)\, dx.$$

Anàlogmanet, si $\nexists \lim_{x \to b^-} f(x)$, també podem definir:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\delta \to b^-} \int_a^\delta f(x)\, dx,$$

o bé, en el cas en que $\nexists \lim_{x \to a^+} f(x)$ i a més $\nexists \lim_{x \to b^-} f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx, \quad on\ c \in (a, b).$$

Aquesta darrera definició d'integral impròpia, vàlida també en el cas en $\nexists \lim_{x \to c} f(x)$, per algun $c \in (a, b)$, requereix que les dues integrals de la suma siguin convergents separadament.

Exemple (Integrals impròpies bàsiques)

$$\int_0^1 x^\alpha \, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1}, & \textit{si } \alpha > -1 \textit{ (convergent)} \\ +\infty, & \textit{si } \alpha \leq -1 \textit{ (divergent)} \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \, dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{\alpha+1}, & \textit{si } \alpha < -1 \textit{ (convergent)} \\ +\infty, & \textit{si } \alpha \geq -1 \textit{ (divergent)} \end{cases}$$

• **Observació:** No existeix cal $\alpha \in \mathbb{R}$ pel qual $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \, dx$ sigui una integral impròpia convergent. La trenquem com:

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \, dx = \underbrace{\int_0^1 x^\alpha \, dx}_{\text{conv.} \iff \alpha > -1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} x^\alpha \, dx}_{\text{conv.} \iff \alpha < -1} .$$

Per tant, $\nexists \alpha \in \mathbb{R}$ pel qual les dues integrals de la suma siguin simultàniament convergents.

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 x^\alpha\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=\delta}^{x=1}$$

$$= \lim_{\delta\to 0^+}\frac{1-\delta^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1}, & \text{si } \alpha > -1 \\ +\infty, & \text{si } \alpha < -1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^{-1}\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\big[\ln x\big]_{x=\delta}^{x=1} = -\lim_{\delta\to 0^+}\ln\delta = +\infty,$$

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M x^\alpha\,dx = \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=1}^{x=M}$$

$$= \lim_{M\to+\infty}\frac{M^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} = \begin{cases} \dfrac{-1}{\alpha+1}, & \text{si } \alpha < -1 \\ +\infty, & \text{si } \alpha > -1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} x^{-1}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\big[\ln x\big]_{x=1}^{x=M} = \lim_{M\to+\infty}\ln M = +\infty.$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \mathrm{e}^{-x}\, dx = \lim_{M\to+\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{x=0}^{x=M}$$
$$= \lim_{M\to+\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-M}\right) = 1,$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to+\infty} [\arctan(x)]_{x=0}^{x=M}$$
$$= \lim_{M\to+\infty} \arctan(M) = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{\delta\to0^+} \int_\delta^1 \ln x\, dx = \lim_{\delta\to0^+} \left[x\ln x - x\right]_{x=\delta}^{x=1}$$
$$= \lim_{\delta\to0^+} (-1 - \delta\ln\delta + \delta) = -1,$$

on usem integració per parts, prenent $u = \ln x$ i $dv = dx$, per calcular $\int \ln x$ i fórmula L'Hôpital per calcular $\lim_{\delta\to0^+} \delta \ln\delta = \lim_{\delta\to0^+} \frac{\ln\delta}{1/\delta} = 0$.

Problema 21(c,d)

Digueu si les següents integrals impròpies són convergents i, si ho són, calculeu el seu valor:

$$(\mathbf{c})\ \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}}, \qquad (\mathbf{d})\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\, dx.$$

$$(\mathbf{c})\ \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}} = \lim_{\delta\to 8^-} \int_0^{\delta} (8-x)^{-1/3}\, dx = \lim_{\delta\to 8^-} \left[\frac{(8-x)^{2/3}}{-2/3} \right]_{x=0}^{x=\delta}$$

$$= \lim_{\delta\to 8^-} \frac{3}{2} \left(8^{2/3} - (8-\delta)^{2/3} \right) = 6.$$

$$(\mathbf{d})\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\, dx = \lim_{\delta\to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^{\delta} \tan x\, dx = \lim_{\delta\to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^{\delta} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

$$= \lim_{\delta\to \frac{\pi}{2}^-} \left[-\ln|\cos x| \right]_{x=0}^{x=\delta} = -\lim_{\delta\to \frac{\pi}{2}^-} \ln|\cos \delta|$$

$$= -\ln(0^+) = +\infty.$$

Què fem per estudiar la convergència o divergència d'una integral impròpia de $f(x)$ si no sabem calcular cap primitiva de $f(x)$?

- El cas en que $f(x) \geq 0, \forall x$, és més senzill de discutir que no pas quan $f(x)$ té canvis de signe en l'interval d'integració (és clar que si $f(x) \leq 0, \forall x$, tot és anàleg a quan $f(x) \geq 0$)

Començarem doncs suposant $f(x) \geq 0, \forall x$.

- Si $f(x) \geq 0, \forall x$, pero no en sabem calcular la primitiva, aleshores usarem criteris de **comparació**: deduïrem la convergència o divergència de la integral impròpia de $f(x)$ a partir de la convergència o divegència de la integral impròpia d'una altre funció $g(x) \geq 0$, més senzilla que no pas $f(x)$, de la qual sí en sabem dir si la integral impròpia convergeix o divergeix.
- Un criteri de comparació aplicat a la integral impròpia de $f(x)$ ens diu si aquesta integral és convergent o divergent, però **NO** ens permet calcular el valor de la integral.

Teorema (Criteri de comparació)

1. *$f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ dues funcions contínues verificant:*
$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x > M \quad (x \text{ prou gran.})$$
Aleshores:
   - $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *convergent* $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *convergent.*
   - $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *divergent* $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *divergent.*

   (Tot és anàleg per una integral impròpia de la forma $\int_{-\infty}^{b}$ canviant $\forall x > M$ (x prou gran) per $\forall x < M$ (x prou petit/prou negatiu).)
2. *$f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ dues funcions contínues verificant:*
$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \text{si } x \to b^- \quad (x \text{ prou proper a “b”.})$$
Aleshores:
   - $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\,dx$ *convergent* $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$ *convergent.*
   - $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$ *divergent* $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{b} g(x)\,dx$ *divergent.*

   (Tot és anàleg per una integral impròpia en $x = a$ canviant $x \to b^-$ (x prou proper a “b”) per $x \to a^+$ (x prou proper a “a”).)

Exemple (Convergència integral impròpia via criteri comparació)

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx.$$

- *Per* $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ *no en coneixem cap primitiva explícita.*
- *Podem aplicar el criteri de comparació per discutir la convergència de la integral impròpia* I *usant que* $f(x) \geq 0$ *compleix:*

$$x \geq 1 \implies x^2 \geq x \implies -x^2 \leq -x \implies f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-x} = g(x).$$

Per tant: $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \geq 1$ *"prou gran".*

- *La integral impròpia de* $g(x)$ *en* $[0, +\infty)$ *és convergent:*

$$\int_0^{+\infty} g(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty} = \underbrace{-\mathrm{e}^{-\infty}}_{=0} + \mathrm{e}^0 = 1.$$

- $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \forall x \geq 1 \\ \int_0^{+\infty} g(x)\, dx \text{ convergent} \end{array} \right\} \implies \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ *convergent.*

Teorema (Criteri del quocient)

$f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *dues funcions contínues verificant:*

$$f(x) \geq 0,\ g(x) > 0 \quad \& \quad \exists L = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Aleshores:

- **Si $L = 0$:** $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *convergent* $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *convergent.*
- **Si $L = +\infty$:** $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *divergent* $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *divergent.*
- **Si $L \in (0, +\infty)$:**

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ convergent} \iff \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergent}\,.$$

El mateix teorema val per una integral impròpia en $-\infty$, a, b, canviant $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ per $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$, $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}$, segons el cas.

Problema 22(a,b,c)

Analitzeu si les següents integrals impròpies són convergents:

(**a**) $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2 \arctan x}{2\,x^3 + \sin x}\,dx.$

- $f(x) = \dfrac{x^2 \arctan x}{2\,x^3 + \sin x} > 0$ i contínua si $x \in [1, +\infty)$, ja que, $\forall x \geq 1$, el denominador compleix $2\,x^3 + \sin x \geq 1$.
- Usant $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, és natural comparar:

$$f(x) = \frac{x^2 \arctan x}{2\,x^3 + \sin x} \approx \frac{\frac{\pi}{2}\,x^2}{2\,x^3} = \frac{\pi}{4\,x} \quad \text{quan } x \to +\infty.$$

- Si definim $g(x) = \dfrac{1}{x} \implies \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pi}{4} = L \neq 0.$
- Pel criteri del quocient per integrals impròpies:

$$J = \int_1^{+\infty} g(x)\,dx \text{ convergent} \iff I = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergent}\,.$$

- $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$ divergent $\implies$ I també és divergent.

(c) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^5(x)}{2+\mathrm{e}^x+\sin x}\, dx.$

- $f(x) = \dfrac{1-\cos^5(x)}{2+\mathrm{e}^x+\sin x} \geq 0$ i contínua si $x \in [0,+\infty)$, ja que el denominador compleix $2+\mathrm{e}^x+\sin x \geq \mathrm{e}^x \geq 1$, $\forall x \geq 0$.
- Com a conseqüència, obtenim les següents desigualtats per $f(x)$:

$$0 \leq f(x) = \frac{1-\cos^5(x)}{2+\mathrm{e}^x+\sin x} \leq \frac{2}{\mathrm{e}^x} = 2\,\mathrm{e}^{-x} = g(x), \quad \forall x \in [0,+\infty).$$

- Pel criteri de comparació per integrals impròpies tenim: $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\, dx$ convergent $\Longrightarrow$ $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ convergent.
- $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} 2\,\mathrm{e}^{-x}\, dx = 2$ convergent $\Longrightarrow$ I també és convergent.

(**b**) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}})\, x^\alpha\, dx$, on $\alpha \in \mathbb{R}$ és un paràmetre.

- $f(x) = (1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}})\, x^\alpha$ és contínua si $x \in (0, +\infty)$.
- $f(x) > 0$ si $x \in (0, +\infty)$, ja que:

$$x > 0 \implies \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}} < 1 \implies 1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}} > 0.$$

- I integral impròpia en $x = 0$ i quan $x \to +\infty$. La trenquem com:

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)\, dx}_{J} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x)\, dx}_{K}.$$

- I és convergent per aquells $\alpha \in \mathbb{R}$ per als quals J i K són totes dues (simultàniament) convergents.
- Si per algún valor de α una de les dues integrals, J o K, és divergent, llavors I també és divergent.

Estudi de la convergència / divergència de: $J = \int_0^1 f(x)\,dx$ **.**

- Quan $x \to 0^+$ és té: $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{-1/0^+} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0$.
- Per tant, comparem:

$$f(x) = (1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}})\,x^\alpha \approx x^\alpha, \quad \text{quan } x \to 0^+.$$

- Si definim $g(x) = x^\alpha \implies \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 = L \neq 0.$
- Pel criteri del quocient per integrals impròpies:

$$J = \int_0^1 f(x)\,dx \text{ convergent } \iff \widetilde{J} = \int_0^1 g(x)\,dx \text{ convergent }.$$

- Per altre banda, sabem:

$$\widetilde{J} = \int_0^1 x^\alpha\,dx \text{ convergent } \iff \alpha > -1\,.$$

- Finalment:

$$\boxed{J \text{ convergent } \iff \alpha > -1\,.}$$

Estudi de la convergència / divergència de: $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ **.**

- Quan $x \to +\infty$ és té:

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{-1/+\infty} = \mathrm{e}^0 = 1 \implies \lim_{x\to+\infty} (1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}}) = 0.$$

- Aquest límit zero no ens dóna cap indicació de com comparar $1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}}$ amb una funció més senzilla quan $x \to +\infty$.
- Per trobar amb què comparar, considerem el polinomi de Maclaurin de grau 1 de l'exponencial: $\mathrm{e}^z \approx 1 + z$, quan $z \to 0$.
- Quan $x \to +\infty \implies z = -1/\sqrt{x} \to 0$.
- Per tant, substituïnt $z = -1/\sqrt{x}$ en el polinomi de Maclaurin de e^z i fent $x \to +\infty$:

$$\mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}} \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \implies f(x) = (1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}})\, x^\alpha \approx \frac{x^\alpha}{\sqrt{x}} = x^{\alpha - 1/2}.$$

- Si definim $g(x) = x^{\alpha-1/2} \implies \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 = L \neq 0$.

- Com com que hem vist $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 = L \neq 0$, usant el criteri del quocient per integrals impròpies tenim:

$$K = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergent } \iff \widetilde{K} = \int_1^{+\infty} g(x)\,dx \text{ convergent }.$$

- Sabem que:

$$\widetilde{K} = \int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} x^{\alpha - 1/2}\,dx \text{ convergent } \iff \alpha - 1/2 < -1\,.$$

- Observem: $\alpha - 1/2 < -1 \iff \alpha < -1/2$.
- Finalment:

$$\boxed{K \text{ convergent } \iff \alpha < -1/2\,.}$$

Estudi de la convergència / divergència de: $I = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ **.**

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{J} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}_{K}.$$

Hem vist:

- J convergent $\iff \alpha > -1$.
- K convergent $\iff \alpha < -1/2$.

Per tant:

$$\boxed{I \text{ convergent } \iff -1 < \alpha < -1/2 \iff \alpha \in (-1, -1/2).}$$

Què fem per estudiar convergència/divergència d'una integral impròpia de $f(x)$ si no en sabem calcular cap primitiva i té canvis de signe en l'interval d'integració?

- Els criteris de comparació per discutir convergència/divergència d'una integral impròpia de $f(x)$ requereixen funció positiva (o de signe constant) en l'interval d'integració.
- Si $f(x)$ té canvis de signe en l'interval d'integració, cal estudiar la convergència de la integral impròpia de la funció definida pel seu valor absolut.
- La funció $|f(x)|$ **sí** que és ≥ 0 i a ella **sí** que li podem aplicar els criteris de comparació anteriors per funcions positives.
- El resultat bàsic és que si la integral impròpia de $|f(x)|$ (amb valor absolut) és convergent, llavors també ho és la integral impròpia de $f(x)$ (sense valor absolut). Evidentment, els resultats de les dues integrals són diferents.
- Malauradament, si la integrla impòpia de $|f(x)|$ és divergent, això no sempre implica que la integral impròpia de $f(x)$ també sigui divergent.

Definició (Convergència absoluta)

Direm que una integral impròpia d'una funció $f(x)$ *és* **absolutament convergent** *si la corresponent integral impròpia de la funció positiva* $|f(x)|$ *és* **convergent**. *Això és:*

$$\int |f(x)|\, dx \text{ convergent} \Longrightarrow \int f(x)\, dx \text{ absolutament convergent.}$$

Teorema

Tota integral impròpia absolutament convergent és convergent.

Observació

El recíproc del teorema anterior no és cert. Hi ha integrals impròpies que són convergents però que no són absolutament convergents.

Com a exemple, veurem que la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ *és convergent, però que no és absolutament convergent.*

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ **integral impròpia absolutament convergent.**

- $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$ té infinits canvis de signe quan $x \to +\infty$.
- $|f(x)| = \left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| = \dfrac{|\cos x|}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2} = g(x)$, $\forall x \geq 1$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} x^{\alpha}\,dx$ és convergent ja que $\alpha = -2 < -1$.
- $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq |f(x)| \leq g(x), \ \ \forall x \geq 1 \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx \text{ convergent} \end{array} \right\} \Longrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$ convergent

$\Longrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ absolutament convergent

$\Longrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ convergent

$\Longrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ convergent.

$I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ és una **integral impròpia convergent que no és absolutament convergent**.

• **Part I. I és convergent.** Per veure-ho integrem per parts:

$$\begin{aligned}\int_1^M \frac{\sin x}{x}\,dx &= \left\{\begin{array}{lll} u=1/x & \Longrightarrow & du=-1/x^2 \\ dv=\sin x\,dx & \Longrightarrow & v=-\cos x \end{array}\right\} \\ &= \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{x=1}^{x=M} - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx \\ &= \cos(1) - \frac{\cos M}{M} - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Fent $M\to+\infty$ obtenim:

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\lim_{M\to+\infty}\int_1^M\frac{\sin x}{x}\,dx=\cos(1)-\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx\,.$$

En l'exemple anterior hem vist que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$ és una integral impròpia convergent. Per tant, I **és una integral convergent.**

• **Part II. I no és absolutament convergent.** Això vol dir que hem de veure que la integral impròpia $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ és divergent.

El punt clau per veure-ho és la desigualtat $0 \leq a \leq 1 \implies a \geq a^2$ **.**
Fent $a = |\sin x| \in [0, 1]$ obtenim:

$$|\sin x| \geq |\sin x|^2 = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \implies \left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}.$$

D'aquí podem concloure que $J = +\infty$ és integral impròpia divergent:

$$J = \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{1}{2} \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}}_{+\infty} - \frac{1}{2} \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx}_{\text{finit}} = +\infty - \frac{L}{2} = +\infty,$$

ja que:

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \int_1^{+\infty} x^{\alpha} dx = +\infty$ és divergent per $\alpha = -1$ **.**
- $L = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2} dx$ és una integral impròpia convergent (es veu anàlogament al cas $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ vist en un exemple anterior).

Observació

La integral impròpia $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ *també és convergent (però no és absolutament convergent). De fet, se sap que* $K = \pi/2$.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies$ si definim $f(0) = 1$, la funció $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ esdevé contínua en $x = 0$.
- Per tant, la integral K només és impròpia quan $x \to +\infty$, però no pas quan $x \to 0$.
- Per "esquivar" el punt $x = 0$ descomposem K com:

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

  - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx$ dóna un valor finit, ja que és la integral d'una funció contínua en $[0, 1]$ (no és una integral impròpia).
  - $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ hem vist que és una integral impròpia convergent (però no absolutament convergent).

Definició (La funció Gamma d'Euler)

Definim la **funció Gamma d'Euler** *mitjançant la integral impròpia:*

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}\, \mathrm{e}^{-x}\, dx\,, \qquad \forall p > 0\,,$$

Verificant les següents propietats:

1. $\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$
2. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\,.$
3. $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p), \quad \forall p > 0$
4. $\Gamma(p)$ *és* C^∞ *si* $p > 0\,.$ *A més:*

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} (\ln(u))^k\, u^{p-1}\, \mathrm{e}^{-u}\, du\,, \quad \forall k \geq 1.$$

Així doncs, per exemple:

$$\Gamma(1) = 0! = 1\,, \quad \Gamma(2) = 1! = 1\,, \quad \Gamma(3) = 2! = 2\,, \quad \Gamma(4) = 3! = 6\,,$$

$$\Gamma(3/2) = \Gamma(1/2+1) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Per veure que $\Gamma(p)$ convergeix si $p > 0$, considerem d'entrada un valor de $p \in \mathbb{R}$ fixat i denotem per $f(x) = x^{p-1}\,\mathrm{e}^{-x}$. Descomposem:

$$\Gamma(p) = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{I} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}_{J}\ .$$

Tot seguit, veurem que I és convergent $\forall p > 0$ i que J ho és $\forall p \in \mathbb{R}$.

- Fent $g(x) = x^{p-1} \implies \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Pel criteri del quocient per integrals impròpies:

  $$I = \int_0^1 f(x)\,dx \text{ convergent } \iff \widetilde{I} = \int_0^1 g(x)\,dx \text{ convergent}\ .$$

  Per altre banda, sabem:

  $$\widetilde{I} = \int_0^1 x^{p-1}\,dx \text{ convergent } \iff p-1 > -1 \iff p > 0\,.$$

  Per tant:

  $$\boxed{I \text{ és convergent } \iff p > 0\,.}$$

- Fent ara $g(x) = \mathrm{e}^{-x/2}$ i usant (si cal) el lemma de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p-1}\,\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p-1}}{\mathrm{e}^{x/2}} = 0\,, \quad \forall p \in \mathbb{R}.$$

Pel criteri del quocient per integrals impròpies:

$$\widetilde{J} = \int_1^{+\infty} g(x)\,dx \text{ convergent } \implies J = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergent }.$$

Per altre banda:

$$\widetilde{J} = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x/2}\,dx = \left[-2\,\mathrm{e}^{-x/2}\right]_{x=1}^{x=+\infty} = \frac{2}{\sqrt{e}} \text{ és convergent.}$$

Per tant:

$$\boxed{J \text{ és convergent } \forall p \in \mathbb{R}.}$$