(34) Analitzeu si les següents integrals impròpies són convergents.

(a) $I = \int_1^{+\infty} \frac{x^2 \arctan(x)}{2x^3 + \sin x}$

$f(x) = \frac{x^2 \arctan(x)}{2x^3 + \sin x} > 0$ és contínua si $x \in [1, +\infty)$, ja que $2x^3 + \sin x \geq 1$ i per tant el denominador és sempre $\neq 0$. Així, $f(x)$ és integrable en $[1, M]$, $\forall M \geq 1$. Com que $\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$, llavors

$f(x) \approx \frac{\pi x^2}{4x^3} = \frac{\pi}{4x}$ quan $x \to +\infty$. Concretament:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{1/x} = \frac{\pi}{4} \neq 0$. Llavors, $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ convergent $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ convergent.

com $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ divergent també ho és $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

(b) $I = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-1/\sqrt{x}})\, x^{\alpha} dx$.

$f(x) = (1 - e^{-1/\sqrt{x}})\, x^{\alpha}$ és contínua si $x \in (0, +\infty)$. A més, com que $e^{-1/\sqrt{x}} < 1$ si $x > 0$. També tenim $f(x) > 0$ si $x > 0$.

clarament $\lim_{x \to 0^+} e^{-1/\sqrt{x}} = e^{-\infty} = 0$ i $\lim_{x \to +\infty} e^{-0} = 1$.

Per tant, el comportament de $f(x)$ prop de $x = 0$ és fàcil de caracteritzar: $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^{\alpha}} = 1 \neq 0$. Així, $\int_0^1 f(x)dx$ convergent sii

$\int_0^1 x^{\alpha} dx$ convergent. Això és, si $\alpha > -1$.

Per veure que passa quan $x \to +\infty$, hem d'adonar-nos que per $x >> 1$, llavors $e^{-1/\sqrt{x}} \simeq 1 - 1/\sqrt{x}$. Així surt via o' desenvolupament de Taylor de $e^{z} = 1 + z + z^2/2! + \dots$ quan $|z|$ és petit. Així: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}/\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-1/\sqrt{x}}}{1/\sqrt{x}} = \lim_{z \to 0^+} \frac{1 - e^{-z}}{z} = 1 \neq 0$

on hem fet $z = 1/\sqrt{x} \to 0^+$ quan $x \to +\infty$.

Així, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ convergent $\iff \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{\sqrt{x}}dx = \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1/2}dx$ convergent $\iff \alpha - 1/2 < -1 \iff \alpha < -\frac{1}{2}$

La conclussió final és que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ és convergent $\iff -1 < \alpha < -\frac{1}{2}$

(c) $I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos^5(x)}{2+e^x+\sin x}\,dx$

$f(x) = \frac{1-\cos^5(x)}{2+e^x+\sin x} \geq 0$ és contínua si $x \in [0,+\infty)$, ja que

$2+e^x+\sin x \geq e^x > 0$, $\forall x \in [0,+\infty)$. A més:

$|f(x)| \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, $\forall x \geq 0$ i $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$ és convergent

Llavors, pel criteri de comparació, tenim $\int_0 f(x)\,dx$ convergent

(d) $I = \int_0^{+\infty} \frac{1-x\sin x}{1+x^3}\,dx$

$f(x) = \frac{1-x\sin x}{1+x^3}$ és contínua si $x \in [0,+\infty)$. El que no tenim és signe constant, ja que $1-x\sin x$ té ∞'s zeros en $[0,+\infty)$ (quan $\sin x = 1/x$). Però és clar que:

$|f(x)| \leq \frac{1+x}{1+x^3} \leq \frac{1+x}{x^3} = x^{-3}+x^{-2}$ si $x \geq 1$

Llavors, com $\int_1^{+\infty}(x^{-3}+x^{-2})\,dx = \frac{1}{2}+1$ és convergent, pel criteri de comparació també ho és $\int_1^{+\infty}|f(x)|dx$ i per tant $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

(tota integral impròpia absolutament convergent és convergent).

Aleshores, com $f(x)$ és contínua en $[0,1]$, $\int_0^1 f(x)\,dx$ està ben definida i per tant $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ és convergent.