Funcions

Jordi Villanueva

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

20 de juliol de 2022

Definició (Notacions fonamental funcions reals d'una variable)

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f : D_f \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}}$$

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ està ben definida en el punt } x\}$ **domini de** f.
- $y = f(x)$ *és la* **imatge de** $x \in D_f$ **per la funció** f.
- $X \subset D_f \implies f(X) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in X \text{ t.q. } y = f(x)\}$
  Si X *és un subconjunt del domini de* f, *llavors* $f(X)$ *és el* **conjunt imatge de** X **per** f *(conjunt format per les imatges de* **TOTS** *els punts que pertanyen al conjunt* X *).*
- $R_f = rang(f) = f(D_f)$ *és el* **rang o recorregut de** f *(conjunt de tots els valors que assoleix la funció* f *per punts del seu domini).*
- $Y \subset \mathbb{R} \implies f^{-1}(Y) = \{x \in D_f : f(x) \in Y\}$ *Si* Y *és un subconjunt (qualsevol) de* $\mathbb{R}$, *llavors* $f^{-1}(Y)$ *es el* **conjunt anti-imatge de** Y **per** f *(conjunt format pels punts del domini de* f *tals que quan calculem la seva imatge aquesta pertany a* Y *).*

Exemple ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$)

- **Domini de** f *: Si volem* $f(x)$ *ben definit cal que* x *compleixi:*

$$x \geq 0 \quad \text{i a més} \quad 1 - x \geq 0 \iff 1 \geq x \iff x \leq 1.$$

$D_f = [0,1]$ *i, de fet,* $f(x)$ *és contínua en* $[0,1]$ *(per generació).*

- *La funció* f *és* **simètrica** *respecte del punt* $\frac{1}{2}$ *: Si agafem els punts* $x_1 = a$ *i* $x_2 = 1 - a$ *amb* $a \in [0,1]$ *, un és a l'equerra i l'altre a la dreta de* $\frac{1}{2}$ *i el punt mig entre ambdós és* $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1}{2}$ *. Llavors és té que* $f(x_1) = f(x_2)$ *:*

$$f(x_2) = f(1-a) = \sqrt{1-a} + \sqrt{1-(1-a)} = \sqrt{1-a} + \sqrt{a} = f(x_1)$$

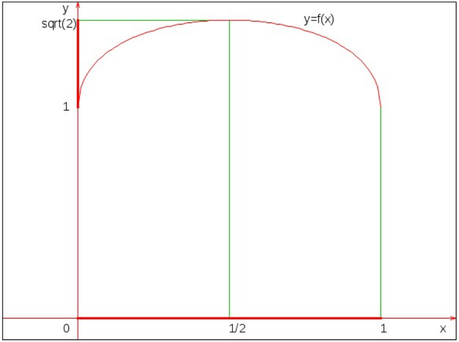
- *En particular* $f(0) = f(1) = 1$ *i* $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$ *.*
- *Tot seguit veiem:*
  - $f'(x) > 0$ *, si* $x \in (0, 1/2) \implies f$ *estrictament creixent en* $[0, 1/2]$ *.*
  - $f'(x) < 0$ *, si* $x \in (1/2, 1) \implies f$ *estrict. decreixent en* $[1/2, 1]$ *.*
  - $f'(x) = 0 \iff x = 1/2$ *, on* f *hi té el seu màxim absolut en* $[0,1]$ *.*
  - $x = 0$ *i* $x = 1$ *són els mínims absoluts de* f *en* $[0,1]$ *.*

Exemple ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ (continuació))

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}} \\
&= \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{(\sqrt{1-x})^2-(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}\,(\sqrt{1-x}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{(1-x)-(x)}{2\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}\,(\sqrt{1-x}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{1-2x}{2\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}\,(\sqrt{1-x}+\sqrt{x})}
\end{aligned}$$

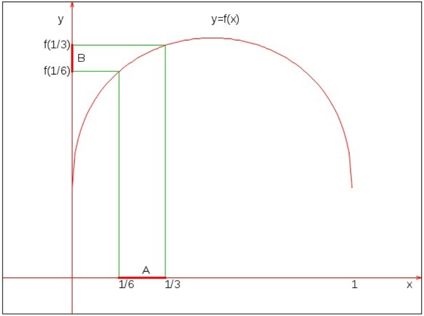
on usem: $(A-B)\times(A+B) = A^2 - B^2$ *amb* $A = \sqrt{1-x}$ *i* $B = \sqrt{x}$ *.*

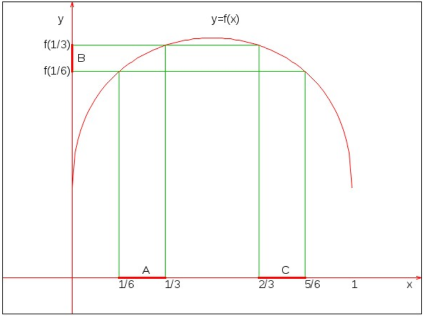
- $f'(0^+) = +\infty \implies f(x)$ *té pendent més infinit quan* x *tendeix a zero per la dreta* $(x \to 0^+)$*. En particular, direm que* $\nexists f'(0^+)$.
- $f'(1^-) = -\infty \implies f(x)$ *té pendent menys infinit quan* x *tendeix a ú per l'esquerra* $(x \to 1^-)$*. En particular, direm que* $\nexists f'(1^-)$.



Exemple ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ (continuació))

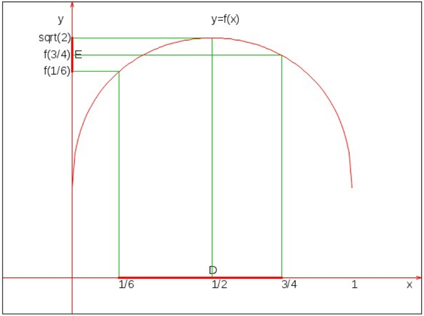
- *El rang o recorregut de* f *és* $rang(f) = f(D_f) = f([0,1]) = [1, \sqrt{2}]$ *.*
- *En paraules: Si movem els valors de* x *en l'interval* $[0,1]$ *llavors* $f(x)$ *és mou en l'interval* $[1, \sqrt{2}]$ *.*
- *En general: Si* f *és una funció contínua en l'interval* $[a,b]$ *llavors* $f([a,b]) = [m, M]$ *on* $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ *i* $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ *.*

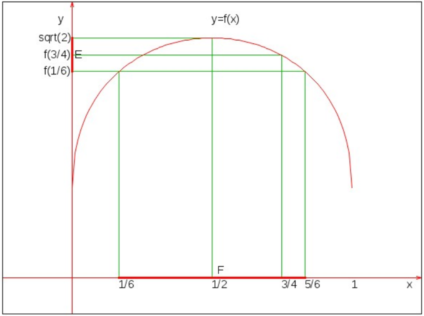




Exemple ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ (continuació))

- *Si* $A = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$ *llavors* $B = f(A) = \left[f(\frac{1}{6}), f(\frac{1}{3})\right] = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right]$ *és la imatge de l'interval* $A = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$ *per la funció* f *.*
- *En cavi,* $f^{-1}(B) = A \cup C$ *on* $C = \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]$ *: L'anti-imatge de l'interval* B *és unió de dos intervals. Els punts* x *tal que quan apliquem* f *van a parar dins de* B *són els que estan en* A *o bé en* C *.*





Exemple ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ (continuació i fi))

- *Si* $D = \left[\frac{1}{6}, \frac{3}{4}\right]$ *llavors* $E = f(D) = \left[f(\frac{1}{6}), f(\frac{1}{2})\right] = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \sqrt{2}\right]$ *és la imatge de* D *per la funció* f *. (El valor mínim de* f *en* D *és en el punt* $\frac{1}{6}$ *però el seu valor màxim és en* $\frac{1}{2}$ *i no en* $\frac{3}{4}$ *.)*
- *L'anti-imatge per* f *de l'interval* E *és* $F = f^{-1}(E) = \left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right]$.

Definició (Composició de funcions)

Siguin $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *i* $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dues duncions donades.*
Definim la seva **composició** $g \circ f$ *(* g **composta amb** f *) per:*

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))} \qquad \textit{(1er. actua } f \textit{ i després } g\textit{)}$$

El domini de $g \circ f$ *és* $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \ \text{i} \ f(x) \in D_g\}$ *.*

Podem visualitzar $g \circ f$ com **superposició de dos processos** f, g en que donada la **materia prima** x, llavors $(g \circ f)(x)$ dóna el **producte final**, però no veiem els passos intermitjos del procés de producció:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \\ & \xrightarrow[(g \circ f)(x)]{\hspace{3cm}} & & & \end{array}}$$

- Si volem que el procés f pugui actuar sobre x cal que x sigui del domini de f ($x \in D_f$).
- Per tal que el procés g pugui actuar sobre $f(x)$ cal que $f(x)$ sigui del domini de g ($f(x) \in D_g$).

Exemple (Composició de funcions)

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad g(x) = \frac{x-3}{x+5}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$$

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\underbrace{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}_{\text{cal } x\neq 1} = \frac{\frac{x+1}{x-1} - 3}{\frac{x+1}{x-1} + 5} = \underbrace{\frac{-x+2}{3x-2}}_{\text{cal } x\neq \frac{2}{3}}$

  $D_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{2}{3}\}$. Treiem $x = 1$ ja que $1 \notin D_f$. Treiem $x = \frac{2}{3}$ ja que si bé $\frac{2}{3} \in D_f$ llavors $f\left(\frac{2}{3}\right) = -5$ i per tant $f\left(\frac{2}{3}\right) \notin D_g$.

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\underbrace{\left(\frac{x-3}{x+5}\right)}_{\text{cal } x\neq -5} = \frac{\frac{x-3}{x+5} + 1}{\frac{x-3}{x+5} - 1} = \underbrace{\frac{-x-1}{4}}_{\text{sempre O.K.}}$

  $D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. Treiem $x = -5$ ja que $-5 \notin D_g$. En canvi, si $x \neq -5$ llavors $g(x) = \frac{x-3}{x+5}$ està ben definida i $g(x) \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (ho veiem perquè la fórmula $(f \circ g)(x)$ sempre està ben definida) i, per tant, $g(x) \in D_f$.

- *Observeu, en particular, que $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$.*

Definició (Funció injectiva / exhaustiva / bijectiva)

Sigui $f : A \to B$ *una funció / transformació qualsevol que envia elements* $x \in A$ *del conjunt* A *a elements* $f(x) \in B$ *del conjunt* B*.*

- f *injectiva en* A *síí.* $\forall x_1, x_2 \in A$ *t.q.* $x_1 \neq x_2$ *llavors* $f(x_1) \neq f(x_2)$*.*
- f *exhaustiva entre* A *i* B *síí.* $\forall y \in B$*,* $\exists x \in A$ *t.q.* $y = f(x)$*.*
- f *bijectiva entre* A *i* B *síí.* f *és injectiva i exhaustiva.*

• f és injectiva en A si f envia parelles de punts diferents de A a parelles de punts diferents de B o, equivalentment, si no existeixen dos punts diferents de A amb la mateixa imatge quan els apliquem f.
• f és exhaustiva entre A i B si tot punt de B és imatge d'almenys un punt de A (pot ser imatge de més d'un punt de A) $\iff B = f(A)$.
• f és bijectiva entre A i B si tot punt de B és imatge d'exactament un punt de A (això és, f és 1 a 1 entre els conjunts A i B).
• Si f és injectiva en A i denotem $C = f(A) \subset B$, aleshores $f : A \to C$ és bijectiva (només en el cas que f sigui exhaustiva és té $C = B$).
• Sigui $f(x)$ funció real de variable real: f és injectiva en un interval $A \subset \mathbb{R}$ síí. f és estrictament creixent o estrictament decreixent en A.

Exemple

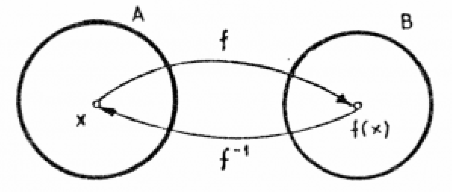
Considerem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida per* $f(x) = x^2$ *.*

- $f(x)$ **no** *és injectiva si triem* $A = \mathbb{R}$*, ja que* $f(x) = f(-x)$ *,* $\forall x \in \mathbb{R}$ *(les parelles de punts de signe oposat tenen la mateixa imatge).*
- $f(x)$ **sí** *és injectiva en* $A = [0, +\infty)$ *ja que* $f(x)$ *és estrictament creixent en* $[0, +\infty)$ *.*
- $f(x)$ **sí** *és injectiva en* $A = (-\infty, 0]$ *ja que* $f(x)$ *és estrictament decreixent en* $(-\infty, 0]$ *.*
- $f(x)$ *és injectiva en tot interval* $A \subset \mathbb{R}$ *tal que* $A \subset [0, +\infty)$ *o bé* $A \subset (-\infty, 0]$ *.*
- $f(x)$ **no** *és exhautiva entre* $A = \mathbb{R}$ *i* $B = \mathbb{R}$ *ja que* $f(x) \geq 0$ *,* $\forall x \in \mathbb{R}$ *(si* $y < 0$ *, llavors* y *no és imatge per* f *de cap* $x \in \mathbb{R}$ *).*
- $f(x)$ **sí** *és exhautiva (però no injectiva) entre* $A = \mathbb{R}$ *i* $B = [0, +\infty)$*.*
- $f(x)$ **sí** *és bijectiva entre* $A = [0, +\infty)$ *i* $B = [0, +\infty)$ *, ja que* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *és una funció 1 a 1.*
- $f(x)$ *també és bijectiva entre* $f : (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$ *.*
- $f(x)$ *també és bijectiva entre* $f : [0, 2] \to [0, 4]$*.* $(f([0, 2]) = [0, 4].)$

Definició (Funció inversa)

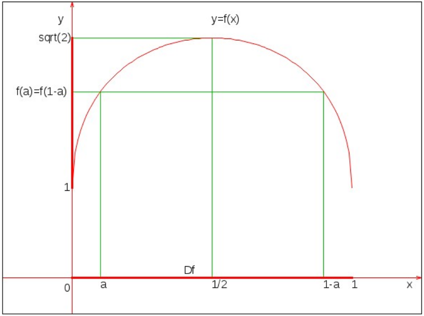
Si $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció injectiva en $A \subset D_f$ i denotem per $B = f(A)$, llavors $f : A \to B$ és **1 a 1 / bijectiva** *i existeix $f^{-1} : B \to A$* **funció inversa de f** *(inversa respecte de la composició) verificant:*

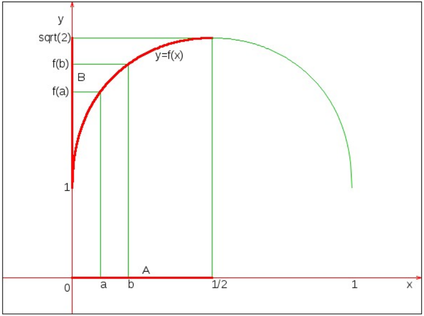
$$\boxed{f^{-1}(\,f(x)\,) = x, \quad \forall x \in A \qquad f(\,f^{-1}(y)\,) = y, \quad \forall y \in B}$$



En general no és possible calcular explícitament la inversa f^{-1} d'una funció f donada. En els casos en que sí que és possible, ho fem així: Considerem la relació $f(x) = y$. Si som capaços d'aïllar x en funció de y a partir d'aquesta relació obtenim la inversa de f: $x = f^{-1}(y)$.

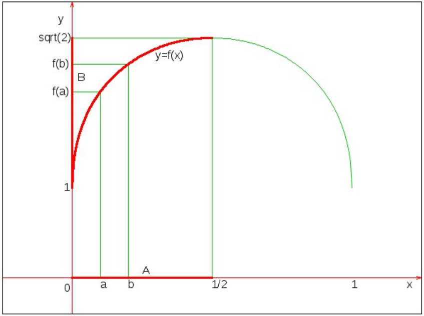
• P. ex.: $f(x) = x^2$ entre $f : [0,2] \to [0,4]$ té inversa $f^{-1} : [0,4] \to [0,2]$ donada per $f^{-1}(y) = +\sqrt{y}$ que surt d'aïllar x de $f(x) = x^2 = y$.

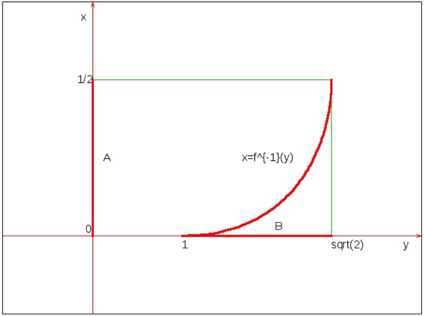




Exemple ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$)

- *$f(x)$ no és invertible en tot el seu domini, $D_f = [0,1]$, degut a la seva simetria respecte del punt $\frac{1}{2}$: $f(a) = f(1-a)$, $\forall a \in [0,1]$.*
- *$f(x)$ sí que és invertible en l'interval $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ja que és una funció estrictament creixen en A .*
- *$B = f(A) = [1, \sqrt{2}] \implies f : A \to B$ és bijectiva i la inversa f^{-1} està definida entre els conjunts $f^{-1} : B \to A$.*





Exemple ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ (continuació))

Calculem explícitament $f^{-1} : [1, \sqrt{2}] \to \left[0, \frac{1}{2}\right]$ *aïllant* x *en* $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\iff \quad \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = y \iff \sqrt{1-x} = y - \sqrt{x} \\ &\iff \quad 1 - x = (y - \sqrt{x})^2 = y^2 - 2y\sqrt{x} + x \\ &\iff \quad 2x - 2y\sqrt{x} + y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Per tant l'expressió $X = \sqrt{x}$ *és solució d'una equació de 2on grau.*

Exemple ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ (continuació i fi))

Concretament $X = \sqrt{x}$ *verifica:*

$$2X^2 - 2yX + y^2 - 1 = 0 \implies X = \frac{2y \pm \sqrt{(2y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (y^2 - 1)}}{2 \cdot 2}$$

D'aquí obtenim:

$$\sqrt{x} = X = \frac{y \pm \sqrt{2 - y^2}}{2} \implies x = f^{-1}(y) = \left(\frac{1}{2}\left(y - \sqrt{2 - y^2}\right)\right)^2 .$$

Per definir f^{-1} *triem* $-$ *en* $\pm$ *perquè* $y = 1 \implies x = f^{-1}(y) = 0$ *.*
(Si triem $+$ *en* $\pm$ *obtenim* $f^{-1} : [1, \sqrt{2}] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *.)*

Exercici ($f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$)

Considereu l'interval $I = [a, b] \subset [1, \sqrt{2}]$ *. La seva anti-imatge per* f *és*

$$f^{-1}(I) = [f^{-1}(a), f^{-1}(b)] \cup [1 - f^{-1}(b), 1 - f^{-1}(a)]$$

on $f^{-1} : [1, \sqrt{2}] \to [0, 1/2]$ *és la inversa que hem calculat.*

Exemple (Inversa i composició de funcions)

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad g(x) = \frac{x-3}{x+5}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$$

- *Calculem* g^{-1} *trobant* x *en termes de* y *solució de* $g(x) = y$

  $$g(x) = \frac{x-3}{x+5} = y \iff x - 3 = (x+5)y \iff (1-y)x = 3 + 5y$$

  Obtenim $x = \dfrac{3+5y}{1-y}$. *Per tant,* $g^{-1}(y) = \dfrac{3+5y}{1-y}$ *i* $D_{g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- *Calculem* $g^{-1} \circ f$ *i el seu domini:*

  $$(g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}(f(x)) = g^{-1} \underbrace{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}_{\text{cal } x \neq 1} = \frac{3 + 5\frac{x+1}{x-1}}{1 - \frac{x+1}{x-1}} = -4x - 1$$

  Per tant, $D_{g^{-1} \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Funcions elementals

Les **funcions elementals simples** són:

- Polinomis.
- Exponencials i logarítmes: e^x i $\ln x$.
  També $\mathrm{a}^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ i $\log_a x = \ln x / \ln a$, si $a > 0$.
- Trigonomètriques: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$.
- Trigonomètriques inverses: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$.
- Hiperbòliques i hiperbòliques inverses:
  $$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \ \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \ \tanh x = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$
  i les seves inverses $\operatorname{argsinh} x$, $\operatorname{argcosh} x$, $\operatorname{argtanh} x$.

• Usarem la terminologia **funcions elementals** per referir-nos a les **combinacions** de funcions elementals simples definides mitjançant **operacions elementals** $(+, -, *, /)$ i **composicions de funcions.**

• També considerarem d'altres funcions **no elementals simples** que juguem un paper destacat en el càlcul. P. ex.: $|x| = +\sqrt{x^2}$ (valor absolut), $\operatorname{sign}(x)$ (signe), $E(x)$ (part entera), $\mathcal{D}(x)$ (funció de Dirichlet).

Exemple (Funcions elementals)

- *Els polinomis.*
- *Les funcions*

$$cosec\,(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad sec\,(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad cotan\,(x) = \frac{1}{\tan\,(x)}.$$

- *Potències com:*

$$(\tan(x))^{\sin(x)} = \left(e^{\ln(\tan(x))}\right)^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\cdot\ln(\tan x)},$$

per aquells $x \in \mathbb{R}$ *tals que* $\tan(x) > 0$.

- *Composicions com la següent:*

$$f(x) = \exp\left(\sqrt{1+\cos x} + \frac{\sinh x}{\ln x}\right),$$

també ho són dins del seu domini de definició.

Problema 3

Trobeu el domini de les funcions següents.

1. $f(x) = \ln(\sin x)$. Solució: $D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2\pi k, 2\pi k + \pi)$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. Solució: $D_f = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\dfrac{2-x}{\sqrt{2+x}}}$. Solució: $D_f = (-2,-1)\cup[1,2]$.

   Resolució: $D_f = \left\{x\in\mathbb{R} : \dfrac{x-1}{x+1} \geq 0,\ 2+x>0,\ 2-x\geq 0\right\}$.
   1. $2+x>0 \iff x>-2 \iff x\in(-2,+\infty)$.
   2. $2-x\geq 0 \iff x\leq 2 \iff x\in(-\infty,2]$.
   3. $\dfrac{x-1}{x+1}\geq 0$ és cert en $x=1$, no ho és en $x=-1$, i sí ho és quan el signe de $x-1$ és igual al signe de $x+1$.
      - Signe de $x-1$ i de $x+1$ són positius si $x>1 \iff x\in(1,+\infty)$.
      - Signe de $x-1$ i de $x+1$ són negatius si $x<-1 \iff x\in(-\infty,-1)$.

   D_f surt d'intersecar els tres conjunts dels apartats (a), (b), (c).
4. $f(x) = \sqrt{|x+2|-|x+1|}$. Solució: $D_f = [-3/2,+\infty)$.

5. $f(x) = \ln(3 - |2x - |x-1||)$. Solució: $D_f = [-3/2, +\infty)$.
Resolució: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3 - |2x - |x-1|| > 0\}$ i l'estudi detallat d'aquest conjunt els teniu més endavant en el problema 2.

6. $f(x) = \sqrt{\cos(5x)}$. Solució: $D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{-\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}\right]$.
Resolució: $D_f = \{x \in \mathbb{R} :\ \cos(5x) \geq 0\}$.
D'entrada, tenim que el $\cos(y) \geq 0$ si $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i, degut al càracter 2π periòdic del cosinus, també en tot interval de la forma $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, per a tot $k \in \mathbb{Z}$. Per tant:
$y \in \mathbb{R}$ és tal que $\cos(y) \geq 0 \iff y \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$.
Ara toca substituïr y per $5x$. Tenim doncs:
$$5x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right] \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}\right].$$

7. $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$. Solució: $D_f = (-2, 0]$.

8. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$. Solució: $D_f = [-1/2, +\infty)$.
Resolució: Com que $\arcsin(y)$ està definit síí $-1 \leq y \leq 1$, llavors:
$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} :\ -1 \leq \frac{x}{1+x} \leq 1\right\} = [-1/2, +\infty).$$

La funció valor absolut

$$|x| = \left\{ \begin{array}{ll} +x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0 \end{array} \right\} \quad (\,|0| = 0\,,\ |x| > 0 \text{ si } x \neq 0\,.)$$

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$ es compleix: $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ i $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$.
- La **distància** entre dos punts $x, y \in \mathbb{R}$ ve donada per $|x - y|$.
  Exemple: $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < |x - 3|\}$ són els punts x que disten menys de 1 que de 3. Com que el punt mig és $\frac{1+3}{2} = 2$ la solució és $A = (-\infty, 2)$.
- Si $f(x)$ és una funció qualsevol i calculem 1er $(f(x))^2$ i després fem l'arrel quadrada, el resultat és:

$$+\sqrt{(f(x))^2} \neq f(x), \qquad +\sqrt{(f(x))^2} = |f(x)|.$$

- Aquesta fórmula permet calcular $\frac{d\,|f(x)|}{dx}$ si $f(x) \neq 0$ i $\exists f'(x)$. P. ex.:

$$f(x) = x^2 - 1 \implies |f(x)| = \sqrt{(x^2-1)^2} \implies \frac{d\,|f(x)|}{dx} = \frac{2x(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2}}$$

Problema 2

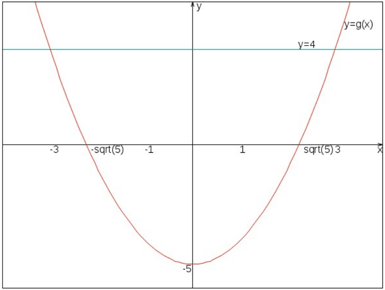
Determineu els $x \in \mathbb{R}$ definits per les expressions següents.

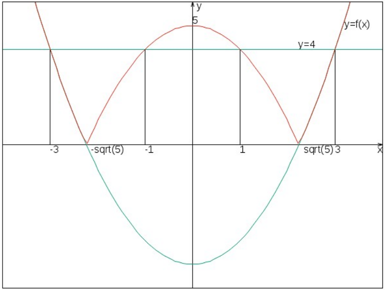
1. $3 - |2x - |x-1|| \geq 0$. Solució: $[-2/3, 2]$.
2. $||2x+1| - (3x+3)| > 0$. Sol.: $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{4}{5}\} = (-\infty, -\frac{4}{5}) \cup (-\frac{4}{5}, +\infty)$.
3. $|x| = -x$. Solució: $x \leq 0 \iff x \in (-\infty, 0]$.
4. $|x^2 - 1| < \dfrac{1}{2}$. Solució: $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$.

Resolem primer una versió modificada de l'apartat 4 per simplificar-ne la visualització gràfica i després l'apartat 1. La clau en els dos casos és la identificació gràfica de la funció involucrada.

4. (Modificat) $|x^2 - 5| < 4$. Solució: $(-3, -1) \cup (1, 3)$.
Volem trobar el conjunt $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 4\}$ on $f(x) = |x^2 - 5|$.
La clau és pintar la gràfica de la funció $y = f(x)$ i veure per a quins x queda estrictament per sota de la de $y = 4$. Per fer-ho, definim $g(x) = x^2 - 5$. És clar que

$$f(x) = g(x), \quad \text{si} \quad g(x) \geq 0; \qquad f(x) = -g(x), \quad \text{si} \quad g(x) \leq 0.$$





4. (Continuació) Les gràfiques de $g(x) = x^2 - 5$ i de $f(x) = |g(x)|$ són a la la part superior. Per pintar la de $f(x)$ a partir de la de $g(x)$ només cal canviar de signe la part negativa de la gràfica de $g(x)$. Per tant, si volem identificar el conjunt $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 4\}$, cal trobar els punts on $f(x) = 4 \iff x \in \{-3, -1, 1, 3\}$:

$$f(x) = 4 \iff \begin{cases} x^2 - 5 = 4 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3 \\ x^2 - 5 = -4 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1 \end{cases}$$

Finalment gràficament veiem que $A = (-3, -1) \cup (1, 3)$.

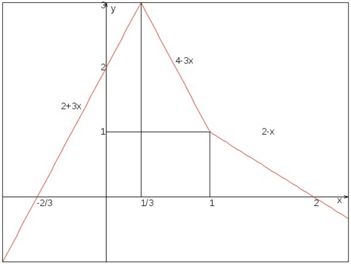
1. $A = \{f(x) \geq 0\}$ on $f(x) = 3 - |2x - |x-1||$. Cal treure els valors absoluts de la definició de $f(x)$, començant pel més interior. Quan treiem el valor absolut en alguna expressió el normal (no sempre) és que cada cas considerat trenqui en dos sub-casos diferents.

Observem: $|x-1| = \left\{ \begin{array}{l} x-1, \text{ si } x \geq 1 \\ 1-x, \text{ si } x \leq 1 \end{array} \right\}$. Llavors:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 3 - |2x - (x-1)|, \text{ si } x \geq 1 \\ 3 - |2x - (1-x)|, \text{ si } x \leq 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 3 - |x+1|, & \text{si } x \geq 1 \\ 3 - |3x-1|, & \text{si } x \leq 1 \end{array} \right\}$$

Notem: $|3x-1| = \left\{ \begin{array}{l} 3x-1, \text{ si } x \geq 1/3 \\ 1-3x, \text{ si } x \leq 1/3 \end{array} \right\} \implies$ el cas $x \leq 1$ de $f(x)$ trenca en dos sub-casos: $1/3 \leq x \leq 1$ i $x \leq 1/3$. En canvi: $|x+1| = \left\{ \begin{array}{ll} x+1, & \text{si } x \geq -1 \\ -(x+1), & \text{si } x \leq -1 \end{array} \right\} \implies$ el cas $x \geq 1$ de $f(x)$ **NO** trenca en dos sub-casos, ja que $x \geq 1 \implies x \geq -1$. Tenim:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 3 - (x+1), \text{ si } x \geq 1 \\ 3 - (3x-1), \text{ si } 1/3 \leq x \leq 1 \\ 3 - (1-3x), \text{ si } x \leq 1/3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2 - x, \text{ si } x \geq 1 \\ 4 - 3x, \text{ si } 1/3 \leq x \leq 1 \\ 2 + 3x, \text{ si } x \leq 1/3 \end{array} \right.$$



1. (Continuació) A dalt tenim la gràfica de $f(x)$ (lineal a trossos):

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2 - x, & \text{si } x \geq 1 \\ 4 - 3x, & \text{si } 1/3 \leq x \leq 1 \\ 2 + 3x, & \text{si } x \leq 1/3 \end{array} \right\}.$$

Com $A = \{f(x) \geq 0\}$, conjunt de punts x on $f(x)$ és positiva o zero, ens cal trobar els punts on $f(x)$ s'anul·la. Gràficament són:

$$2 - x = 0 \iff x = 2, \qquad 2 + 3x = 0 \iff x = -2/3.$$

Finalment, $A = [-2/3, 2]$.

Límits de funcions

Definició (Límit d'una funció en un punt)

Sigui $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funció definida en un interval obert* $A = (a, b)$ *i* $c \in (a, b)$ *un punt de l'interval i* $L \in \mathbb{R}$*. Direm que:*

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \textit{t.q., si}\ 0 < |x - c| < \delta, |f(x) - L| < \varepsilon}$$

Comentari (Interpretació definició límit)

- *Sintèticament, la definició diu: "*$x \to c,\ x \neq c \implies f(x) \to L$*". Quan* x *s'apropa o tendeix a* c *llavors* $f(x)$ *s'apropa a* L*, però ho fa independentment del valor de* $f(c)$*. (*$\lim_{x \to c} f(x)$ *no depèn del valor de* $f(c)$*. De fet no cal que* $f(x)$ *estigui definida en* $x = c$*)*
- *En la definició de límit tant el punt c com el límit L han de ser finits (no pas* $\pm\infty$*). Si el límit* L *"dóna"* $\pm\infty$ *hem de concloure que no existeix. Podem definir el concepte de* **límit infinit o a l'infinit***, però llavors cal adaptar la definició (veure més endavant).*

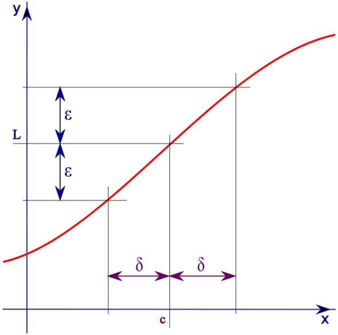
Comentari (Interpretació definició límit (continuació))

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ \textit{t.q., si} \ 0 < |x-c| < \delta, |f(x)-L| < \varepsilon}$$

- ε *és un nombre tant petit com volguem i que mesura quant gran pot ser, com a molt, la distància entre* $f(x)$ *i el límit* L *:*

  $$dist(f(x), L) = |f(x) - L| \,.$$

- $\delta = \delta(\varepsilon)$ *és un nombre petit que depèn del valor de* ε *triat i que ens diu quan proper ha de ser* x *de* c *per tal que* $f(x)$ *sigui a distància menor que* ε *de* L *.*
- $\delta = \delta(\varepsilon)$ *compleix* $\delta(\varepsilon) \to 0^+$ *quan* $\varepsilon \to 0^+$ *.*
- *Trobar la fórmula concreta de la funció* $\delta(\varepsilon)$ *és el que cal fer si en un exemple ens demanen que* **apliquem la definició de límit***.*



Comentari (Interpretació definició límit (continuació))

- $\varepsilon > 0$ *defineix un interval de radi* ε *centrat en el punt* L *de l'eix* y *.*
- *Si calculem l'anti-imatge de l'interval* $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$ *per la funció* f *(gràfica en vermell) obtenim un interval entorn del punt* c *(però que en general no està centrat en* c *com el de la figura).*
- *El valor de* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *de la definicio és tal que l'interval* $[c-\delta, c+\delta]$ *estigui contingut en l'anti-imatge* $f^{-1}([L-\varepsilon, L+\varepsilon])$ *.*

Exemple

Apliqueu la definició de límit i vegeu que $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0$.

- *En aquest cas* $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $c = 0$ *i* $L = 0$.
- *Hem de respondre a la següent qüestió: Qui és* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *tal que:*

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- *Com que* $|x - c| = |x|$ *el punt de partida és la condició* $|x| < \delta$.
- *Calculem* $|f(x) - L|$ *i el relacionem amb* δ *via la condició* $|x| < \delta$:

$$|f(x) - L| = |\sqrt[3]{x} - 0| = |x|^{1/3} < \delta^{1/3}.$$

- *Si ens fixem en l'expressió final,* $\delta^{1/3}$, *volem que sigui* ε. *És clar que això ho aconseguim triant* $\delta^{1/3} = \varepsilon$.
- *Si aïllem* δ *d'aquesta relació, obtenim* $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^3$ *que és la fórmula que buscavem.*

Comentari

Si volem provar que $\nexists \lim_{x \to c} f(x)$, *llavors hem de trobar valors de* x *arbitrariament propers a* c *tals que ...*

... *o bé* $f(x)$ *tendeix a dos valors diferents de* L *quan* $x \to c$.

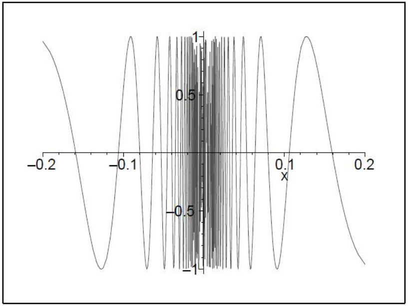
... *o bé* $f(x)$ *tendeix a* $\pm\infty$ *quan* $x \to c$.

Exemple (La funció de Dirichlet)

$$f(x) = \mathcal{D}(x) = \left\{ \begin{array}{lr} 0, \ \textit{si } x \in \mathbb{Q} & \textit{(nombres racionals)} \\ 1, \ \textit{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & \textit{(nombres irracionals)} \end{array} \right\}.$$

$\nexists \lim_{x \to c} f(x)$ *per a cap* $c \in \mathbb{R}$. *La raó és que podem aproximar tant com volguem* c *per nombres racionals i irracionals.*

- *Tant a prop com volguem de* c *hi ha infints valors de* x *racionals. Si tendim a* c *per valors de* $x \in \mathbb{Q}$ *llavors* $f(x) = 0$. *Per tant,* $\mathbb{Q} \ni x \to c \implies f(x) \to 0$ *i el límit hauria de ser* $L = 0$.
- *Tant a prop com volguem de c hi ha infints valors de x irracionals. Si tendim a* c *per valors de* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *llavors* $f(x) = 1$. *Per tant,* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ni x \to c \implies f(x) \to 1$ *i el límit hauria de ser* $L = 1$.



Exemple ($\nexists \lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ (Ídem $\nexists \lim_{x\to 0} \cos(1/x)$))

- $f(x) = \sin(1/x)$ *és una funció (no definida en* $x = 0$ *) que quan* $x \to 0$ **oscil·la infinit cops** *entre* $y = -1$ *i* $y = 1$ *. Aquest caràcter oscil·latori fa que el seu límit en* $c = 0$ *no existeixi.*
- *Interpretació gràfica: calcular* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *vol dir que ens posem sobre la gràfica* $y = f(x)$ *, fem* $x \to 0$ *i mirem si quan arribem a zero ho fem amb una alçada* $y = L$ *determinada. Llavors* L *és el valor del límit. Si la funció oscil·la com en la figura, quan tendim a zero aquesta alçada límit no esta definida i el límit no existeix.*

Exemple ($\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin(1/x)$ (continuació i fi))

- *Fem* $x_n = \frac{1}{n\pi}$ *. Els valors de la successió* x_n *compleixien* $x_n \to 0$ *quan* $n \to \infty$ *. Per aquests valors de* $x_n \to 0$ *tenim:*

$$f(x_n) = \sin(1/x_n) = \sin(n\pi) = 0 \to 0 = L \quad \textit{si } n \to \infty.$$

  Si triem els valors de $x = x_n$ *tendint a zero ens estem aproximant a* $x = 0$ *sobre punts de la gràfica* $y = f(x)$ *a alçada* $L = 0$ *. Per tant, si el límit existeix ha de ser* $L = 0$ *.*

- *Fem* $\tilde{x}_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ *. Els valors de la successió* $\tilde{x}_n$ *compleixien* $\tilde{x}_n \to 0$ *quan* $n \to \infty$ *. Per aquests valors de* $\tilde{x}_n \to 0$ *tenim:*

$$f(\tilde{x}_n) = \sin(1/\tilde{x}_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1 = \tilde{L} \quad \textit{si } n \to \infty.$$

  Si triem els valors de $x = \tilde{x}_n$ *tendint a zero ens estem aproximant a* $x = 0$ *sobre punts de la gràfica* $y = f(x)$ *a alçada* $\tilde{L} = 0$ *. Per tant, si el límit existeix ha de ser* $\tilde{L} = 0$ *.*

Definició (Límits laterals d'una funció en un punt)

- $\lim_{x\to c^+} f(x) = L^+$ *és el* **límit de** $f(x)$ **en** $x = c$ **per la dreta***:*

  $f(x) \to L^+$ *quan* $x \to c$ *però considerant valors de* $x > c$.
- $\lim_{x\to c^-} f(x) = L^-$ *és el* **límit de** $f(x)$ **en** $x = c$ **per l'esquerra***:*

  $f(x) \to L^-$ *quan* $x \to c$ *però considerant valors de* $x < c$.

Proposició (Relació límit / límits laterals)

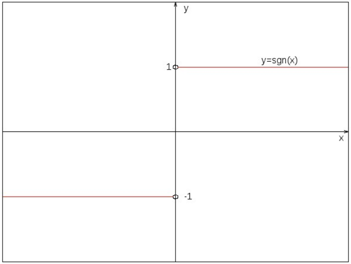
$$\exists L = \lim_{x\to c} f(x) \iff \exists L^+ = \lim_{x\to c^+} f(x),\ \exists L^- = \lim_{x\to c^-} f(x),\ L = L^+ = L^-$$

(El límit existeix sií. els límits laterals existeixen i coincideixen.)

Corol·lari (Criteris no existència del límit)

Podem concloure que $\nexists \lim_{x\to c} f(x)$ *si és dóna un dels casos:*

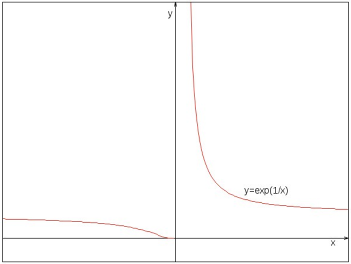
- $\nexists \lim_{x\to c^+} f(x)$ *o bé* $\nexists \lim_{x\to c^-} f(x)$. *(Inclou si un límit és* $\pm\infty$*.)*
- $\exists L^+ = \lim_{x\to c^+} f(x)$, $\exists L^- = \lim_{x\to c^-} f(x)$ *però* $L^+ \neq L^-$.



Exemple (La funció signe)

$$sgn(x) = \frac{x}{|x|} = \left\{ \begin{array}{l} +1, \ \ si \ \ x > 0 \\ -1, \ \ si \ \ x < 0 \end{array} \right\} \qquad (\, sgn(0) \ \ no \ està \ definit.)$$

$$\left. \begin{array}{l} L^{+} = \lim\limits_{x \to 0^{+}} sgn(x) = \lim\limits_{x \to 0^{+}} 1 = 1 \\ L^{-} = \lim\limits_{x \to 0^{-}} sgn(x) = \lim\limits_{x \to 0^{-}} -1 = -1 \end{array} \right\} \underset{L^{+} \neq L^{-}}{\Longrightarrow} \nexists \lim_{x \to 0} sgn(x).$$



Exemple ($f(x) = \mathrm{e}^{1/x}$)

- $L^- = \lim\limits_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{1/x} = \mathrm{e}^{1/0^-} = \mathrm{e}^{-\infty} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{+\infty}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0.$
- $L^+ = \lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{1/x} = \mathrm{e}^{1/0^+} = \mathrm{e}^{+\infty} = +\infty.$

$$L^+ = +\infty \implies \nexists \lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{1/x} \implies \nexists \lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{1/x}.$$

Extensions del concepte de límit. Quadre resum.

- Segons la posició de c respecte l'interval (a,b):

Normal	Lateral esquerre	Lateral dret
$\lim_{x\to c} f(x) = \star$	$\lim_{x\to c^-} f(x) = \star$	$\lim_{x\to c^+} f(x) = \star$
$(a,b) \ni c$	(a,c)	(c,b)
$0 < \lvert x-c\rvert < \delta$	$c-\delta < x < c$	$c < x < c+\delta$

- Segons si c és $+\infty$ o $-\infty$:

Normal	en $-\infty$	en $+\infty$
$\lim_{x\to c} f(x) = \star$	$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \star$	$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \star$
$(a,b) \ni c$	$(-\infty, b)$	(a, ∞)
$0 < \lvert x-c\rvert < \delta$	$x < -N$	$x > N$

- Segons els possibles valors que pot tenir L:

Finit	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to\star} f(x) = L \in \mathbb{R}$	$\lim_{x\to\star} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to\star} f(x) = +\infty$
$\lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon$	$f(x) < -M$	$f(x) > M$

Extensions del concepte de límit. Comentaris.

- El quadre anterior permet escriure les 15 definicions de límit. P. ex.:
  - $\lim_{x \to c^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si i només si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.
  - $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$ si i només si $\forall M > 0, \exists \delta = \delta(M) > 0$ tal que $c < x < c + \delta \Rightarrow f(x) < -M$.
    (Què el límit sigui $-\infty$ vol dir que $f(x)$ es fa "tant negatiu" com volguem quan x tendeix a c per la dreta. Per tant, aqui entenem que $M > 0$ el podem agafar tant gran com volguem i $\delta(M) > 0$ eś petit i tendeix a zero quan M tendeix a $+\infty$).
  - $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ si i només si $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) > 0$ tal que $x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.
    (Calcular límit quan $x \to +\infty$ vol dir que ara és el valor de x el que podem agafar tant gran com volguem i per tant $N(\varepsilon) > 0$ tendeix a $+\infty$ quan ε tendeix a zero.)
  - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si i només si $\forall M > 0, \exists N = N(M) > 0$ tal que $x < -N \Rightarrow f(x) > M$.

Càlcul de límits

• **Recepta bàsica**: El càlcul del límit en un punt d'una **funció elemental** (combinacions de funcions elementals simples via operacions bàsiques i composicions de funcions) el fem **avaluant les funcions involucrades en el punt corresponent**, sempre que aquesta avaluació es faci dins del domini de definicio d'aquestes funcions i que no doni lloc a cap **indeterminació.**
(De fet, en tots aquests casos estem dient que la funció $f(x)$ és contínua i que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.)

• **Indeterminacions típiques:**

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad +\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad 1^{\infty} \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

• **No són indeterminacions:**

$$\frac{a}{\infty} = 0 \qquad 0^{+\infty} = 0 \qquad \frac{1}{0} = \infty \qquad a^{+\infty} = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < a < 1 \\ +\infty, & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Proposició (Operacions elementals amb límits)

Suposem: $\lim_{x \to c} f(x) = L \in \mathbb{R}$ *i* $\lim_{x \to c} g(x) = K \in \mathbb{R}$

Llavors:

1. $\lim_{x \to c} b \cdot f(x) = b \cdot L \qquad \forall b \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x \to c} (f(x) \pm g(x)) = L \pm K$
3. $\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot K$
4. $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K} \qquad si\ K \neq 0$
5. $\lim_{x \to c} f(x)^n = L^n \qquad si\ n \in \mathbb{N}$

Exemple

Si $p(x)$ *i* $q(x)$ *són dos polinomis i* $q(c) \neq 0$, *llavors* $\lim_{x \to c} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(c)}{q(c)}$ *el calculem doncs per simple substitució.*

Proposició (Límit de la composició de funcions)

Suposem: $\lim_{x\to c} \mathbf{g}(x) = \mathbf{L}$ *i* $\lim_{x\to \mathbf{L}} f(x) = f(\mathbf{L})$

Llavors: $\lim_{x\to c} f(\mathbf{g}(x)) = f(\mathbf{L})$

Comentari

- *De fet,* $\lim_{x\to \mathbf{L}} f(x) = f(\mathbf{L})$ *vol dir que* f *és contínua en el punt* $\mathbf{L}$.
- *El resultat diu que* **podem permutar funcions contínues i límits***:*

Si $\lim_{x\to c} \mathbf{g}(x) = \mathbf{L}$ *i* f *és contínua en el punt* $\mathbf{L}$ *llavors*

$$\lim_{x\to c} f(\mathbf{g}(x)) = f\left(\lim_{x\to c} \mathbf{g}(x)\right) = f(\mathbf{L})$$

- *El resultat* **NO** *és cert si* f *no és contínua en el punt* $\mathbf{L}$*:*

$$\lim_{x\to c} \mathbf{g}(x) = \mathbf{L} \quad i \quad \lim_{x\to \mathbf{L}} f(x) = K \;\not\Longrightarrow\; \lim_{x\to c} f(\mathbf{g}(x)) = K$$

Vegeu l'exemple que segueix.

Exemple ($\lim_{x \to c} \mathbf{g}(x) = \mathbf{L}$ i $\lim_{x \to \mathbf{L}} f(x) = K \not\Longrightarrow \lim_{x \to c} f(\mathbf{g}(x)) = K$)

- *Fem* $\mathbf{g}(x) \equiv \mathbf{0}$ *i* $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & si\ x = 0 \\ 1, & si\ x \neq 0 \end{array} \right\}$
- $\lim_{x \to c} \mathbf{g}(x) = \lim_{x \to c} \mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathbf{L}$
- $\lim_{x \to \mathbf{L}} f(x) = \lim_{x \to \mathbf{0}} f(x) = \lim_{x \to \mathbf{0}} 1 = 1 = K \neq 0 = f(0) = f(\mathbf{L})$
  (f no contínua en $\mathbf{L} = \mathbf{0}$*)*
- $(f \circ \mathbf{g})(x) = f(\mathbf{g}(x)) = f(0) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f \circ g \equiv 0$
- $\lim_{x \to c} f(\mathbf{g}(x)) = \lim_{x \to c} 0 = 0 \neq 1 = K$

Proposició (Teorema de l'encaix o de l'entrepà)

- *$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x$ prou proper a $\; x = c$*
  (no cal que sigui cert per a $\; x = c$.)
- $\lim\limits_{x \to c} h(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = L$.

Llavors: $\quad \lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

Corol·lari (del teorema de l'encaix)

Suposem $\quad f(x) = m(x) \cdot k(x) \quad$ *on:*

- $\lim\limits_{x \to c} k(x) = 0 \quad$ *té límit zero.*
- $|m(x)| \leq M \quad$ *està acotada quan $\; x \;$ és prou proper a $\; x = c$*
  (però no té perque existir $\; \lim\limits_{x \to c} m(x)$.)

Llavors: $\quad \lim\limits_{x \to \mathbf{c}} f(x) = 0$

El corol·lari surt de: $\quad \underbrace{-M \cdot |k(x)|}_{h(x)} \leq f(x) \leq \underbrace{M \cdot |k(x)|}_{g(x)}$.

Exemple ($\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

- *Usant trigonometria elemental no costa pas gaire veure que (detalls a la pàgina següent):*

$$\boxed{\cos(x)\sin(x) \leq x \leq \tan(x)} \quad \textit{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}.$$

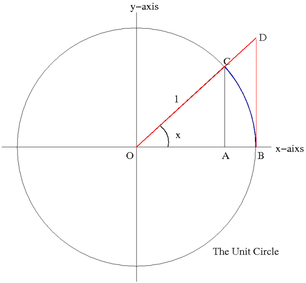
- $\cos(x)\sin(x) \leq x \implies \boxed{\frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}} \quad \textit{si } 0 < x < \frac{\pi}{2}$

- $x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \implies \boxed{\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x}} \quad \textit{si } 0 < x < \frac{\pi}{2}$

- *Per les simetries del sinus i del cosinus les dues desigualtats també valen si* $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

- $\boxed{\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}} \quad \textit{si} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$

- $\lim_{x\to 0} \cos(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1 \implies \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$



Demostració ($\cos(x)\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$)

- *Si* x *és l'angle de la figura (en radiants) l'àrea del tros de cercle de radi* $R = 1$ *determinat per* OBC *és* $\Delta_1 = \dfrac{x}{2\pi} \times \pi R^2 = \dfrac{x}{2}$. *(Si* $x = 2\pi$ *ha de donar* $\pi R^2 = \pi$. *)*
- *Àrea triangle vèrtexs* OAC*:* $\Delta_2 = \dfrac{\overline{OA} \times \overline{AC}}{2} = \dfrac{\cos(x) \times \sin(x)}{2}$
- *Àrea triangle vèrtexs* OBD*:* $\Delta_3 = \dfrac{\overline{OB} \times \overline{BD}}{2} = \dfrac{1 \times \tan(x)}{2}$
- *És clar que* $\Delta_2 \leq \Delta_1 \leq \Delta_3$

Comentari: També podem abordar aquests exemples via la fórmula de L'Hôpital, però molts cops aplicar L'Hôpital genera expressions "monstre" que podem evitar usant raonaments com els que segueixen.

Exemple (Tractament d'indeterminacions)

- $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ *usant el lema de l'entrepà (vegeu-lo més endavant com exemple discontinuïtat evitable).*
- *Usant que* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ *tenim (multipliquem numerador i denominador per* $1+\cos x$ *i usem* $1-\cos^2 x = \sin^2 x$ *):*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

- *Aplicant Ruffini tenim* $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ *i ho podem usar per cancel·lar el zero del denominador:*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3.$$

Exemple (Tractament d'indeterminacions (continuació))

- *Podem racionalitzar l'expressió següent multiplicant numerador i denominador per* $\sqrt{x+1}+1$ *per tal d'eliminar l'arrel (aquest truc,* $(A-B)\times(A+B)=A^2-B^2$*, ja l'hem usat anteriorment):*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1})^2-(1)^2}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

- *La definció del nombre* e *via successions és* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ *(o, més en general* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{A}{n}\right)^n=\mathrm{e}^A$*). La versió en "variable contínua" (per funcions) d'aquest límit és:*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

El segon surt del primer prenent logarítme neperià i usant que en ser el logarítme funció contínua podem permutar límit i funció.

Problema 9(n,q)

Calculeu els límits següents usant, si us cal:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e},\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

(n) $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos x-1}+\dfrac{2}{\sin^2 x}\right)=-\infty+\infty$ (indeterminació).

- $\cos x-1<0$ si $x\approx 0$ però $x\neq 0 \implies \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty.$
- $\sin^2 x>0$ si $x\approx 0$ però $x\neq 0 \implies \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty.$

Posem denominador comú:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+2(\cos x-1)}{(\cos x-1)\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^2 x)+2(\cos x-1)}{(\cos x-1)\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(\cos x-1)^2}{(\cos x-1)\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}.$$

(q) $L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\operatorname{cosec}(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{\sin(x)}} = 1^{\infty}$ (indetermin.).

La idea és usar que si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, on $g(x)$ funció qualsevol:

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u} = \mathrm{e} \underbrace{\Longrightarrow}_{u=g(x)} \lim_{x\to a}(1+g(x))^{1/g(x)} = \mathrm{e}.$$

Fent $g(x) = \dfrac{-2x}{2+x}$ i usant $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, és té:

$$\frac{2-x}{2+x} = \frac{(2+x)-2x}{2+x} = 1 + \frac{-2x}{2+x} \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2x}} = \mathrm{e}.$$

Finalment:

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2x}}\right)^{\frac{-2x}{2+x}\cdot\frac{1}{\sin(x)}} = \left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2x}}\right)^{L'} = \mathrm{e}^{-1},$$

on, usant que $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$:

$$L' = \lim_{x\to 0}\frac{-2x}{2+x}\cdot\frac{1}{\sin(x)} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{-2}{2+x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right) = -1\cdot 1 = -1,$$

Continuïtat

Definició (Funció contínua en un punt)

Direm que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *és* **contínua** *en el punt* $c \in (a, b)$ *síí.*

$$\boxed{\exists L = \lim_{x \to c} f(x) \quad i \quad L = f(c)}$$

Comentari

1. *Si* f *no és contínua en* c *direm que* f *és discontínua en* c*.*
2. *Si volem definir* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funció contínua en els extrems de l'interval cal modificar la definició usant límits laterals:*

$$f \text{ és contínua en } a \text{ síí. } \exists L = \lim_{x \to a^+} f(x) \quad i \quad L = f(a)$$

$$f \text{ és contínua en } b \text{ síí. } \exists L = \lim_{x \to b^-} f(x) \quad i \quad L = f(b)$$

3. f *és contínua en un conjunt si es contínua en tots els seus punts.*

Proposició (Propietats bàsiques de la continuïtat)

1. **Operacions elementals:** *f i g contínues en c. Llavors $b \cdot f$ ($\forall b \in \mathbb{R}$), $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (si $g(c) \neq 0$) són contínues en c.*
2. **Composició de funcions:** *f contínua en c, g contínua en $f(c)$. Llavors $g \circ f$ és contínua en c.*
3. **Funció inversa:** *f contínua en c i suposem que existeix f^{-1} funcio inversa de f. Llavors f^{-1} és contínua en $f(c)$.*

Corol·lari (Continuïtat per generació)

Totes les funcions elementals simples (polinomis, trigonomètriques, exponencials,. . .) i les seves combinacions (sumes, productes, composicions,. . .) són contínues dins del seu domini de definició.

Exemple (Continuïtat per generació)

$$f(x) = \frac{e^x \sin x + \sqrt{\ln(3+x) - 1}}{x^4 + \sin^2 x}$$

f és contínua si x compleix les següents condicions:

1. $\ln(3+x) \geq 1 \iff 3 + x \geq e \iff x \geq e - 3$ *per tal que estigui ben definida l'arrel quadrada.*
2. $x \neq 0$ *per tal que no s'anul·li el denominador.*

Per tant, f és contínua en el seu domini:

$$x \in D_f = [e - 3, +\infty) \setminus \{0\}$$

(En $x = 0$ tenim $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\sqrt{\ln(3) - 1}}{0^+} = +\infty$ i per tant $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ i f té doncs una singularitat essencial en $x = 0$.)

Tipus de discontinuïtats

Suposem que c és un punt de discontinuitat de $f:(a,b)\to\mathbb{R}$.
Llavors c ha de ser d'un dels següents tres tipus:

(i) **Discontinuïtat evitable:** $\boxed{\exists \lim_{x\to c} f(x) = L \in \mathbb{R} \text{ però } f(c) \neq L}$

- Existeix el límit L però no coincideix amb el valor de f en c.
- Si re-definim el valor de f en el punt c per $f(c) := L$ **la nova funció** f **sí que és contínua** en c.

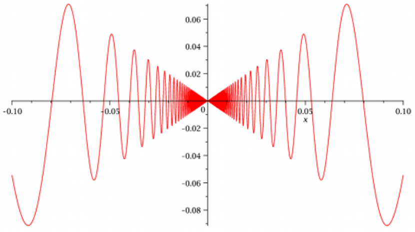
(ii) **Discontinuïtat de salt:**

$$\boxed{\exists \lim_{x\to c^+} f(x) = L^+ \quad \text{i} \quad \exists \lim_{x\to c^-} f(x) = L^- \quad \text{però } L^+ \neq L^-}$$

Existeixen (i són finits!) els límits laterals de f però difereixen.

(iii) **Discontinuïtat asimptòtica:** $\boxed{\nexists \lim_{x\to c^+} f(x) \quad \text{o bé} \quad \nexists \lim_{x\to c^-} f(x)}$

Quan no existeix almenys un dels dos límits laterals. (Inclou els casos en que **algún** dels dos límits és $\pm\infty$. Llavors direm que f té una **asímptota vertical** en $x = c$, que pot ser per la dreta, l'esquerra o pels dos costats.)



Exemple (Discontinuïtat evitable)

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & si \;\; x \neq 0 \\ 1, & si \;\; x = 0 \end{array} \right\} \quad \textit{Escrivim } f(x) = \underbrace{x}_{k(x)} \underbrace{\sin(1/x)}_{m(x)} \textit{ on:}$$

$$\lim_{x \to 0} k(x) = \lim_{x \to 0} x = 0, \qquad |m(x)| = |\sin(1/x)| \leq 1, \;\; \forall x \neq 0.$$

$f(x)$ és el producte d'una funció acotada $m(x)$ per una $k(x)$ que tendeix a zero quan $x \to 0$. Pel corol·lari del teorema de l'encaix: $\exists L = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Com que $f(0) = 1 \neq 0 = L \implies f$ té una singuaritat evitable en $c = 0$.

Exemple (Discontinuïtat de evitable/salt)

1. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ *està definida per a tot* $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ *i, per generació, és contínua en tot el seu domini. Aplicant Ruffini/cancel·lacions, hem vist que* $\exists L = \lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3 \implies f(x)$ *té singularitat evitable en* $x = 1 \implies$ *Si definim* $f(1) = L = 3$*, la funció resultant esdevé contínua també en* $x = 1$*.*
2. $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x + c, & \text{si } x > 1 \\ e^x, & \text{si } x \leq 1 \end{array} \right\}$ *contínua, per generació,* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$*.*

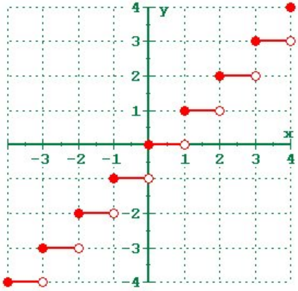
   $L^+ = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x + c = 1 + c,$

   $L^- = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} e^x = e.$

   És té $L^+ = L^- \iff 1 + c = e \iff c = e - 1$*. Llavors:*

   $c = e - 1 \implies L^+ = L^- \implies x = 1$ *punt de continuïtat de* $f(x)$,

   $c \neq e - 1 \implies L^+ \neq L^- \implies x = 1$ *discontinuïtat de salt de* $f(x)$.



Exemple (Discontinuïtat de salt: La funció part entera $E(x)$)

$E(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ *(La part entera de x és l'enter més proper a x entre tots els enters n més petits o iguals que x .)*

P.ex. $E(0) = 0$, $E(3) = 3$, $E(-2) = -2$, $E(2.3) = 2$, $E(-2.5) = -3$.

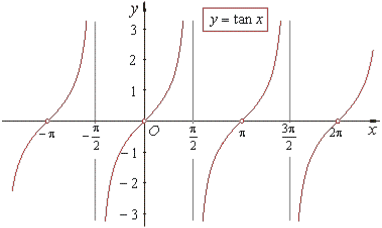
- *Si triem, p. ex.,* $c = 2$ *:*

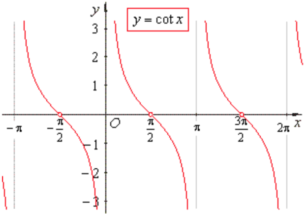
$$\exists L^{+} = \lim_{x \to 2^{+}} E(x) = 2, \qquad \exists L^{-} = \lim_{x \to 2^{-}} E(x) = 1.$$

Per tant $L^{+} \neq L^{-} \implies E(x)$ *té una discontinuïtat de salt en* $c = 2$.
(És clar que $E(x)$ *té una discontinuïtat de salt en* $c = n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. *)*

Exemple (Discontinuïtats asimptòtiques)

- $\nexists \lim_{x \to 0} \sin(1/x) \implies \sin(1/x)$ *té singularitat asimptòtica en* $c = 0$.
- $L^- = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^3} = -\infty, \quad L^+ = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty \implies \dfrac{1}{x^3}$ *té una singularitat asimptòtica en* $c = 0$.
- $L^- = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \tan(x) = +\infty, \quad L^+ = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} \tan(x) = -\infty \implies$ $\tan(x)$ *té una singularitat asimptòtica en* $c = \frac{\pi}{2}$.
  (De fet té singularitat asimptòtica en $c = \frac{\pi}{2} + n\pi$ *,* $\forall n \in \mathbb{Z}$ *.*
  Vegeu figura pàgina següent.)
- $L^- = \lim_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{1/x} = 0, \quad L^+ = \lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{1/x} = +\infty \implies \mathrm{e}^{1/x}$ *té una singularitat asimptòtica en* $c = 0$.





Problema 11

Trobeu les discontinuïtats de $f(x)$ i classifiqueu-les.

(e) $f(x) = \begin{cases} \tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right), & \text{si } |x| < 1, \\ x, & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$

$\forall k \in \mathbb{Z}$ és té: $\displaystyle\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^-} \tan(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^+} \tan(x) = -\infty.$

$f(x)$ contínua per generació tret si $x = \pm 1$ o per algún $k \in \mathbb{Z}$ és té:

$$\{\, |x| < 1 \iff x \in (-1, 1)\,\} \quad \& \quad \frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Com $\dfrac{\pi x}{4} \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\forall x \in (-1, 1)$, només cal mirar $x = \pm 1$.

(e) (Cont.) $f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$, $x \in (-1,1)$; $f(x) = x$, $x \le -1$ ó $x \ge 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x = 1, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to (-1)^-} f(x) = \lim_{x\to (-1)^-} x = -1, \quad \lim_{x\to (-1)^+} f(x) = \lim_{x\to (-1)^+} \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) = -1.$$

Per tant $f(x)$ contínua si $x = \pm 1 \implies f(x)$ contínua $\forall x \in \mathbb{R}$.

(g) $f(x) = \dfrac{e^{\cot(x)} - 1}{e^{\cot(x)} + 1} \implies f(x) = \dfrac{1 - e^{-\cot(x)}}{1 + e^{-\cot(x)}}$.

$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ és contínua $\forall x \in \mathbb{R}$ tret si $x = k\pi$, per algún $k \in \mathbb{Z}$ (ja que $\tan(k\pi) = 0$). Com que $e^{\cot(x)} + 1 > 0$, aquests valors de x són les úniques possibles discontinuïtats de $f(x)$. És té:

$$\lim_{x\to (k\pi)^-} \cot(x) = -\infty \implies \lim_{x\to (k\pi)^-} f(x) = \frac{e^{-\infty} - 1}{e^{-\infty} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1,$$

$$\lim_{x\to (k\pi)^+} \cot(x) = +\infty \implies \lim_{x\to (k\pi)^+} f(x) = \frac{1 - e^{-\infty}}{1 + e^{-\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1,$$

on hem usat arreu que $e^{-\infty} = 0$. Per tant, $f(x)$ té discontinuïtats de salt si $x = k\pi$ per algún $k \in \mathbb{Z}$.

(j) $f(x) = E(x) + E(-x)$ ($E(x)$ és la funció part entera de x).

1. Si és el cas que $x = k \in \mathbb{Z}$ és un nombre enter, llavors: $E(k) = k,\ E(-k) = -k \implies f(x) = k + (-k) = 0.$
2. Si x no és un enter, sempre és cert que $k < x < k+1$, per un únic $k \in \mathbb{Z}$. Llavors, canviant de signe, és té $-(k+1) < -x < -k$. Com que el valor de $E(x)$ és el nombre enter que millor aproxima x **per sota**, llavors és té: $E(x) = k \ \text{ i } \ E(-x) = -(k+1) \implies f(x) = -k + (-(k+1)) = -1.$

$f(x) = -1$ si x no és enter i $f(x) = 1$ si x és enter $\implies$ $f(x)$ és contínua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ i té dicontinuïtats evitables en tots els enters.

Problema 12(c)

Valors de $a, b \in \mathbb{R}$ que fan que $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1-\cos(bx)}{x^2}, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+ax)}{x}, & \text{si } x > 0 \end{array} \right\}$ sigui contínua en $x = 0$.

Calculem el límit en $x = 0$ per la dreta i l'esquerra.

Si $a > 0$, és té:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+ax)}{ax} = a \cdot 1 = a,$$

on hem usat que, si $g(x)$ és qualsevol funció tal que $\lim_{x \to c} g(x) = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \implies \lim_{x \to c} \frac{\ln(1+g(x))}{g(x)} = 1.$$

En aquest cas, $g(x) = ax$. Si $a = 0 \implies f(x) = \dfrac{\ln(1)}{x} = 0$, si $x > 0$.
Per tant, si $a = 0 \implies \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = a$. A més, si $b \neq 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1-\cos(bx)}{x^2} = b^2 \cdot \lim_{x \to 0^-} \frac{1-\cos(bx)}{(bx)^2} = \frac{b^2}{2},$$

on hem usat $\lim_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$. El resultat també val per $b = 0$.
Si volem $f(x)$ contínua en $x = 0$ cal:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) \iff a = \frac{b^2}{2} = 1 \iff a = 1,\ b = \pm\sqrt{2}.$$

Teoremes valor intermedi i de Bolzano

Teorema (del valor intermedi)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua i tal que* $f(a) \neq f(b)$.
Llavors, per a qualsevol valor $k \in \mathbb{R}$ *que estigui entre* $f(a)$ *i* $f(b)$ *existeix almenys un* $c \in (a,b)$ *tal que* $f(c) = k$.

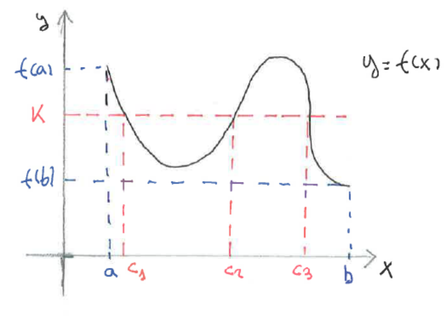
Comentari

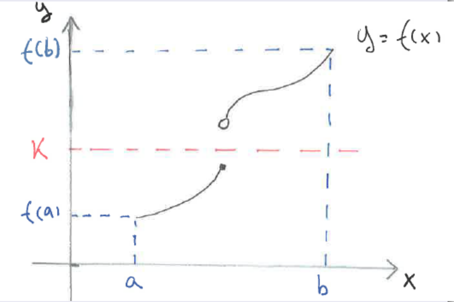
- c *"existeix" però el més probable és que no sapiguem dir qui és.*
- c *no té perquè ser únic. Si volem garantir que* c *és únic hem d'estudiar la gràfica de* f. *Per exemple, si* f *és estrictament creixent o decreixen llavors segur que* c *és únic.*

Corol·lari (Teorema de Bolzano)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua i tal que* $f(a) \cdot f(b) < 0$ *(això és,* f *té almenys un canvi de signe en l'interval* $[a,b]$ *).*
Llavors, existeix almenys un $c \in (a,b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

Exemple (Teorema valor intermedi)





- *En la figura de l'esquerra veiem que hi ha tres possibles valors per* c *que en aplicar* f *van a parar al mateix* k *.*
- *En la figura de la dreta veiem que si* f *no és contínua llavors el resultat no té perque ser cert: no existeix cap valor per* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = k$ *.*

Exemple (Tot polinomi de grau tres té almenys un zero real)

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

(Normalitzem $p(x)$ *perque el seu coeficient dominant sigui* 1*.)*

- $p(x)$ *és una funció contínua en tot* $\mathbb{R}$
- $p(x) = x^3 \cdot \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right)$
- $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty \implies$ *si* $x > 0$ *és prou gran* $p(x) > 0$
- $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty \implies$ *si* $x < 0$ *és prou "negatiu"* $p(x) < 0$
- $p(x)$ *té almenys un canvi de signe en* $\mathbb{R}$
- *Per Bolzano* $p(x)$ *té almenys un zero en* $\mathbb{R}$

Observació

Si $p(x)$ *és un polinomi de grau senar qualsevol, llavors el mateix resultat també és cert.*

Problema 15

Sigui $f : [0,1] \to [0,1]$ funció contínua. Proveu que existeixen $c, d \in [0,1]$ (potser no únics) tals que $f(c) = c$ i $f(d) = 1 - d$.

Obseveu que $x = c$ és solució de l'equació $f(x) = x \iff x = c$ és un zero de la funció contínua $g(x) := f(x) - x$. El truc és avaluar $g(x)$ en $x = 0$ i $x = 1$ i aplicar el teorema “clàssic” de Bolzano. Noteu que, per hipòtesis, $f(x) \in [0,1] \iff 0 \le f(x) \le 1, \ \forall x \in [0,1]$:

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \ge 0,$$
$$g(1) = f(1) - 1 \le 0, \quad \text{ja que } f(1) \le 1.$$

Per tant, és dóna un dels tres casos següents:

$$1)\ g(0) = 0, \qquad 2)\ g(1) = 0, \qquad 3)\ g(0) > 0 \text{ i } g(1) < 0.$$

Cas 1) $\Longrightarrow$ $c = 0$; Cas 2) $\Longrightarrow$ $c = 1$; Cas 3) $\Longrightarrow$ podem aplicar el teorema de Bolzano a $g(x)$ en $[0,1]$ $\Longrightarrow$ $\exists c \in (0,1)$ tal que $g(c) = 0$.

Per provar existència de d cal repetir el procès per $h(x) = f(x) + x - 1$: $x = d$ és solució de l'equació $f(x) = 1 - x \iff x = d$ és un zero de la funció contínua $h(x)$.

Problema 18(b)

Proveu que $x^{1313} + \dfrac{169}{13 + x^2 + \sin^2(x)} = 247$ té almenys una arrel real.

$f(x) = x^{1313} + \dfrac{169}{13 + x^2 + \sin^2(x)}$ és una funció contínua $\forall x \in \mathbb{R}$. (Raó: el denominador $13 + x^2 + \sin^2(x) \geq 13$ no és fa mai zero en cap punt.)

Per garantir que existeix $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 247$, hem de veure que hi ha una parella de punts en $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $f(a) < 247$ i $f(b) > 247$.

- $f(0) = \frac{169}{13} = 13 < 247 \implies$ triem $a = 0$;
- $f(10) = 10^{1313} + \frac{169}{13+10^2+\sin^2(10)} > 10^{1313} > 247 \implies$ triem $b = 10$.

Per tant, l'equació $f(x) = 247$ té almenys una solució $c \in (0, 10)$.

- Qüestió: És la solució per c única? En general la resposta és no.

Una forma de veure que sí que és única és provar que $f(x)$ és o bé estrictament creixent o bé estrictament decreixent. (En aquest exemple és complicat verificar-ho.)

Problema 18(b) "ampliat"

Si $f(x) = x^{1313} + \dfrac{169}{13 + x^2 + \sin^2(x)}$, per a quins valors $d \in \mathbb{R}$ podem garantir que té almenys una solució l'equació $f(x) = d$?

El punt clau és calcular els següents límits:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

que són òbvis ja que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1313} = +\infty$ i $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^{1313} = -\infty$, en ser 1313 senar, mentres que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{169}{13 + x^2 + \sin^2(x)} = 0$. Per tant, sigui quin sigui el valor de $d \in \mathbb{R}$:

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \implies$ podem triar un $a \ll 0$ tal que $f(a) < d$.
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \implies$ podem triar un $b \gg 0$ tal que $f(b) > d$.

En conseqüència, $f(x)$ és una funció contínua tal que $\exists\, a < b$ verificant $f(a) < d < f(b) \implies \exists c \in (a, b)$ (potser no únic) tal que $f(c) = d$.