(12) Em els exercicis següents troben els valors de x (si n'existeix algun) en els quals f no és contínua. Quines discontinuïtats són evitables?

(a) $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$.

f discontínua $\Leftrightarrow 4-x^2=0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ (discontinuïtats asimptòtiques).

(b) $f(x) = \frac{|x+7|}{x+7}$

f discontínua $\Leftrightarrow x=-7$ $\lim\limits_{x\to -7^+} \frac{|x+7|}{x+7} = 1$, $\lim\limits_{x\to -7^-} \frac{|x+7|}{x+7} = -1$ (salt).

(c) $f(x) = \frac{1}{1-e^{1/x}}$

f discontínua $\Leftrightarrow x=0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{1-e^{1/x}} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{1-e^{1/x}} = 1$ (salt)

(d) $f(x) = \begin{cases} -2x+3, & x<1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (-2x+3) = 1$

$x=1$ no és cap discontinuïtat. f contínua $\forall x \in \mathbb{R}$.

(e) $f(x) = \begin{cases} tg\left(\frac{\pi x}{4}\right), & |x|<1 \\ x, & |x| \geq 1 \end{cases}$

Recordem: $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^-} tg(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^+} tg(x) = -\infty$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

Per tant f és discontínua si $\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = 2+4k, \forall k \in \mathbb{Z}$ (discontinuïtats asimptòtiques). Observeu però que $|2+4k| > 1, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Per tant cap d'aquests valors és una discontinuïtat real de f.

Ens queda estudiar $x = \pm 1$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} tg\left(\frac{\pi x}{4}\right) = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} tg\left(\frac{\pi x}{4}\right) = tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} x = -1$

Així ni $x=\pm 1$ són discontinuïtat i f és contínua $\forall x \in \mathbb{R}$.

(f) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi x}{6}\right), & \text{si } |x-3| \leq 2 \\ 2, & \text{si } |x-3| > 2 \end{cases}$

$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin x}$ és contínua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus (\pi \mathbb{Z})$ (múltiples de π)

Si $|x-3| \leq 2 \iff -2 \leq x-3 \leq 2 \iff 1 \leq x \leq 5 \iff \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi x}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$

Per tant, $f(x)$ és contínua $\forall x$ t.q. $|x-3| < 2$.

Com $f(x) = 2$ és contínua si $|x-3| > 2$, només queda discutir $x \in \{1, 5\}$.

$$\lim_{x \to 1} \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi x}{6}\right) = \frac{1}{\sin(\pi/6)} = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$\lim_{x \to 5} \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi x}{6}\right) = \frac{1}{\sin(\frac{5}{6}\pi)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{1/2} = 2$$

Així, f és contínua si $x \in \{1, 5\}$. Per tant, f és contínua $\forall x \in \mathbb{R}$.

(g) $f(x) = \frac{e^{\cot x} - 1}{e^{\cot x} + 1}$

$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ és contínua si $x \in \mathbb{R} \setminus (\pi \mathbb{Z})$. Com $e^{\cot x} > 0$, llavors $f(x)$ és contínua en aquests punts. En els múltiples de π:

$$\lim_{x \to k\pi^+} \cot x = \lim_{x \to k\pi^+} \frac{1}{\tan x} = +\infty, \quad \lim_{x \to k\pi^-} \cot x = -\infty$$

Així: $\lim_{x \to k\pi^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \to k\pi^-} f(x) = -1$ i f té discontinuïtat de salt en $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(h) $f(x) = \frac{|x|}{1 - \sqrt{\ln(|x|+1)}}$

- $\ln(|x|+1)$ contínua $\forall x \in \mathbb{R}$ i parell $(f(x) = f(-x))$.
- $\sqrt{\ln(|x|+1)}$ ben definida i contínua si $|x|+1 \geq 1$. Per tant $\sqrt{\ln(|x|+1)}$ és contínua $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Finalment, $f(x)$ ben definida i contínua si $\sqrt{\ln(|x|+1)} \neq 1 \iff$ $\iff \ln(|x|+1) \neq 1 \iff |x|+1 \neq e^1 = e \iff |x| \neq e-1 \iff x \notin \{\pm(e-1)\}$.

Finalment, $\lim_{x\to(e-1)^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to(e-1)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(e-1)^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(e-1)^-} f(x) = -\infty$

Així, f té discontinuïtats asimptòtiques en $\pm(e-1)$.

(i) $f(x) = E\left(\frac{x}{a}\right)\frac{b}{x}$.

Suposem $a\cdot b \neq 0$ i $a>0$ i $b\geq 0$. Els altres casos són anàlegs.

- $E\left(\frac{x}{a}\right)$ és contínua si $x \in \mathbb{R}\setminus(a\mathbb{Z})$ } $\Rightarrow$ $f(x)$ és contínua almenys si $x \in \mathbb{R}\setminus(a\mathbb{Z})$.
- b/x és contínua si $x \neq 0$
- Cas $x=0$: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$. (disc. asimptòtica)
- Cas $x = ka$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$: $\lim_{x\to(ka)^+} f(x) = k\cdot\frac{b}{ka} = \frac{b}{a}$, $\lim_{x\to(ka)^-} f(x) = (k-1)\frac{b}{k}$

(disc. de salt).

(j) $f(x) = E(x) + E(-x)$.

- $E(x)$ és discontínua en $\mathbb{Z}$. Per tant, $f(x)$ és contínua almenys si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
- observem $f(x)$ és parell ($f(x) = f(-x)$). Per tant si volem estudiar la seva continuïtat en $k\in\mathbb{Z}^+$ i $k\in\mathbb{Z}^-$, llavors $k\in\mathbb{Z}^+$ és suficient.
- Cas $x=0$: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 + (-1) = -1$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1+0 = -1$.
- Cas $x = k\in\mathbb{Z}^+$: $\lim_{x\to k^+} f(x) = k + (-k-1) = -1$; $\lim_{x\to k^-} f(x) = k-1-k = -1$

  però en canvi, $f(k) = E(k) + E(-k) = k-k = 0$.

  Per tant f té una discontinuïtat evitable si $x=k$.