(9) Càlcul de límits. Suposem coneguts els límits següents:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

Calculeu, cas d'existir, els límits següents:

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -1 = -1 \end{array} \right\} = \nexists$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1} = -1.$$

(c) $$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x+5)-9}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x+5}+3} = \frac{1}{6}$$

(d) $$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x^3+3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} (3x^2 + 3x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2.$$

(e) $$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

És clar que $\nexists$ si agafem valors de x adequats tendint a zero i $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no tendeix a un mateix valor per a tots ells.

Veiem que

P. ex. $x_n = \frac{1}{n\pi}$ tendeix a zero quan $n\to\infty$ i $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin(n\pi) = 0$

Però, si $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ llavors també $x_n \to 0$ quan $n\to\infty$ però ara

$$\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = 1$$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot x = 1^2 \cdot 0 = 0.$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{tg^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{x}{\cos^2 x} = 1^2 \cdot \frac{0}{1} = 0.$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{3(1-\cos x)}{x} = 3 \cdot 0 = 0$

(i) $\lim_{x\to \pi/4} \frac{1-tg\,x}{\sin x - \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to \pi/4} \frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x - \cos x} = \lim_{x\to \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x(\sin x - \cos x)} =$

$= \lim_{x\to \pi/4} -\frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{\sqrt{2}/2} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

(j) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 2x)/2x}{(\sin 3x)/(3x)} \cdot \frac{2x}{3x} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} = 2/3.$

(k) $\lim_{x\to 0} x \cdot \cos x = 0 \cdot 1 = 0.$

(l) $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ ja que $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$ si $x \neq 0$ i llavors $-|x| \leq x \sin\frac{1}{x} \leq |x|$ si $x \neq 0$. Per tant, com $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, llavors la funció del mig també ha de tenir límit zero.

(m) $\lim_{x\to 0} (\sin x)\, E(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \sin x \cdot E(x) = 0 \cdot 0 = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} \sin x \cdot E(x) = 0 \cdot (-1) = 0 \end{cases} = 0.$

ja que $E(x) = 0$ si $x \in [0,1)$ i $E(x) = -1$ si $x \in [-1, 0)$.

Així $\lim_{x\to 0^+} E(x) = 0$ i $\lim_{x\to 0^-} E(x) = -1.$

(n) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{2}{\sin^2 x}\right) = -\infty + \infty$ ja que $\cos x < 1$ si $x \approx 0$ però $x \neq 0$ i per tant $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x - 1} = -\infty.$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + 2(\cos x - 1)}{(\cos x - 1)\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x + 2(\cos x - 1)}{(\cos x - 1)\sin^2 x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos^2 x + 2\cos x - 1}{(\cos x - 1)\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-(\cos x - 1)^2}{(\cos x - 1)\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} =$

$$= \lim_{x\to 0} - \frac{(\cos x - 1)/x^2}{(\sin x / x)^2} = - \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -(-1/2) = 1/2$$

Però cal afegir a la llista de límits de l'enunciat $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

De fet el podem demostrar fàcilment a partir de $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2 (\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2 (\cos x + 1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} - \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = -\frac{1}{2}.$$

(o) $\lim_{x\to \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{1}{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (veure (i))

(p) $\lim_{x\to 0} \frac{1+e^{1/x}}{2+e^{1/x}} = \nexists$, ja que $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+e^{1/x}}{1+e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}+1}{e^{-1/x}+1} = 1$ i

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1+e^{1/x}}{2+e^{1/x}} = \frac{1}{2}$, usant $\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = e^{-\infty} = 0$ i $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0$.

(q) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{1/\sin x} = 1^{\infty}$

$$\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{1/\sin x} = \left(1 - \frac{2x}{2+x}\right)^{1/\sin x} = \left(1 + \frac{(-2)x}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{(-2)}{2+x}}$$

Llavors com $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \Rightarrow \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{(-2)x}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2x}} = e$.

A més, $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. Finalment: $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\operatorname{cosec} x} = e^{-1} = 1/e$

(r) $\lim_{x\to 0} (1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\cot^2 x} = \lim_{x\to 0} (1+3\operatorname{tg}^2 x)^{1/\operatorname{tg}^2 x} = 1^{+\infty} =$

$$= \lim_{x\to 0} (1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{3\operatorname{tg}^2 x} \cdot 3} \underset{\uparrow}{=} e^3.$$

$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$