3 Dominis de funcions. Trobeu el domini de les funcions següents:

(a) $f(x) = \ln(\sin x)$.

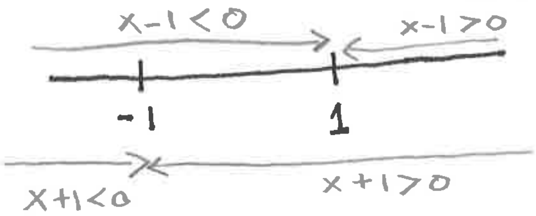
cal $\sin x > 0$. Això és cert si $x \in (0,\pi)$ més/menys múltiples de 2π.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x = y + 2\pi k \text{ on } y \in (0,\pi),\ k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2\pi k, \pi + 2\pi k)$$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. $D_f = \mathbb{R}$ ja que el denominador sempre és $x^2+1>0$.

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\dfrac{2-x}{\sqrt{2+x}}}$.

Cal, simultàniament, $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$ & $2+x>0$ & $2-x \geq 0$.



Així $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$ sii $x \in (-\infty,-1) \cup [1,+\infty)$.

$2+x>0 \iff x>-2 \iff x \in (-2,+\infty)$

$2-x \geq 0 \iff x \leq 2 \iff x \in (-\infty, 2]$

Finalment: $D_f = (-2,-1) \cup [1,2]$.

(d) $f(x) = \sqrt{|x+2| - |x+1|}$

cal $|x+2| - |x+1| \geq 0$. Ho podem discutir com en el problema 2, o bé adonar-nos que $\underbrace{|x+2|}_{\substack{\text{distància de}\\ x \text{ a } -2\\ |x-(-2)|}} \geq \underbrace{|x+1|}_{\substack{\text{distància de}\\ x \text{ a } -1\\ |x-(-1)|}}$

$\dfrac{-2-1}{2} = -3/2$

Així $D_f = [-3/2, +\infty)$

(e) $f(x) = \ln(3 - |2x - |x-1||)$

cal $3 - |2x-|x-1|| > 0 \iff |2x-|x-1|| < 3$

$$|2x-|x-1|| = \begin{cases} |2x-(x-1)| = |x+1|, & \text{si } x \geq 1 \\ |2x-(1-x)| = |3x-1|, & \text{si } x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \geq 1 \\ 3x-1, & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \\ 1-3x, & \text{si } x \leq 1/3 \end{cases}$$

Llavors, la condició $|2x-|x-1||<3$ esdevé, segons el cas:

si $x \geq 1$: cal $x+1<3 \iff x<2$. obtenim $x \in [1,2)$

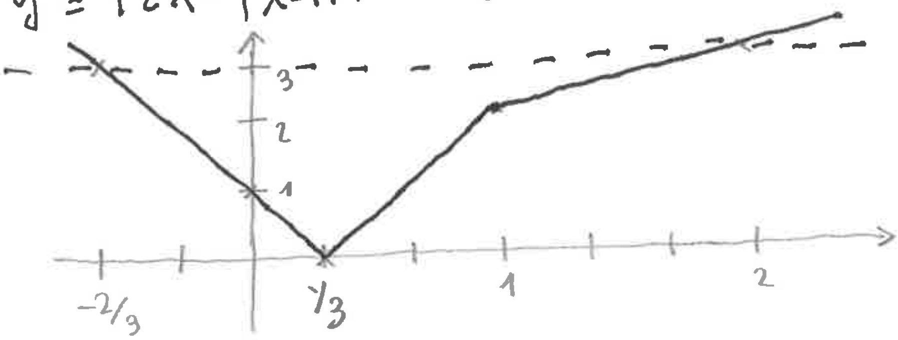
si $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$: cal $3x-1<3 \iff x<4/3$. obtenim $x \in [1/3, 1]$.

si $x \leq 1/3$: cal $1-3x<3 \iff x>-2/3$. obtenim $x \in (-2/3, 1/3]$

Així $D_f = (-2/3, 2)$

També podem resoldre-ho gràficament, pintant la gràfica de

$y = |2x-|x-1||$ i $y=3$.



(f) $f(x) = \sqrt{\cos(5x)}$

cal $\cos(5x) \geq 0$. És clar que si $-\frac{\pi}{2} \leq 5x \leq \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{10} \leq x \leq \frac{\pi}{10}$ llavors $\cos(5x) \geq 0$. Però si sumam $\frac{2\pi k}{5}$ a x, pel caràcter 2π periòdic del cos obtenim el mateix valor per $\cos(5x)$ que per $\cos\left(5\left(x+\frac{2\pi k}{5}\right)\right)$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$ (i.e., $\cos(5x)$ és $\frac{2\pi}{5}$ periòdica)

És fàcil veure doncs que $D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}\right]$.

(g) $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$

cal $-x \geq 0$ & $2+x>0 \iff x \leq 0$ & $x>-2$. $D_f = (-2, 0]$.

(h) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{1+x}\right)$.

El domini del arcsin és $[-1,1]$. Per tant, cal $-1 \leq \frac{x}{1+x} \leq 1$.

· si $x>-1$: cal $-(1+x) \leq x \leq 1+x \iff \begin{cases} -1-x \leq x \iff 2x \geq -1 \iff x \geq -1/2 \\ x \leq 1+x \text{ sempre cert} \end{cases}$

obtenim $x \in [-1/2, +\infty)$

· si $x<-1$: cal $-(1+x) \geq x \geq 1+x \iff \begin{cases} -1-x \geq x \\ x \geq 1+x \text{ sempre fals} \end{cases}$ No obtenim cap valor de x.

Així: $D_f = [-1/2, +\infty)$. També ho podem resoldre pintant $y = \frac{x}{1+x}$.