

Derivació

Jordi Villanueva

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

6 de setembre de 2023

Derivada d'una funció

Definició (Derivada d'una funció en un punt)

$$f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad i \quad c \in (a, b)$$

$x \mapsto f(x)$

Definim la **derivada de f en el punt c** com el valor del límit següent:

$$f'(c) = \frac{df}{dx}(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad \underbrace{=}_{x=c+h} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

(Sempre que el límit existeixi i sigui finit.)

Comentari

- ❶ Si $\nexists$ el límit (inclou quan $f'(c) = \pm\infty$) llavors direm que f **no és derivable** en el punt c .
- ❷ Si f és derivable $\forall c \in (a, b)$ llavors anomenarem a la funció $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ la **funció derivada** de f .

Comentari (Derivades laterals)

*També podem definir derivades per la **dreta** i per l'**esquerra**:*

$$f'(c^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad f'(c^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Aplicacions:

- ③ $m = f'(c) \iff m = f'(c^+) = f'(c^-)$
- ④ *Si f està definida en un interval tancat, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, direm que f és derivable en els extrems de l'interval si $\exists f'(a^+)$ i $\exists f'(b^-)$.*

Interpretació geomètica de la derivada

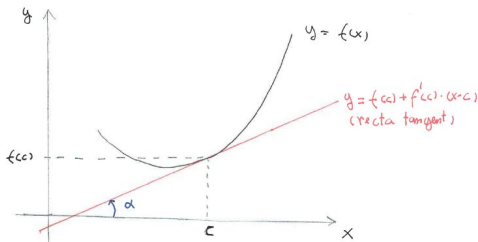
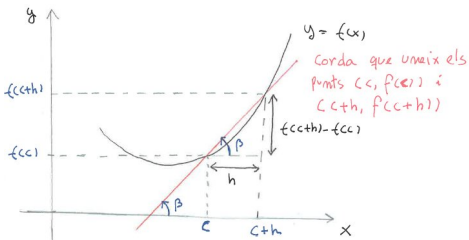
- $f'(c)$ dóna la pendent de la **recta tangent** a la gràfica $y = f(x)$ en el punt c . L'equació de la recta tangent és:

$$y = f(c) + f'(c) \cdot (x - c)$$

- Si $f'(c) = \pm\infty$ direm que la pendent de f en el punt c és infinita. (Però f no és derivable en c .)
- La recta perpendicular a la recta tangent en el punt $(c, f(c))$ s'anomena **recta normal** a la gràfica. La pendent de la recta normal en és $-\frac{1}{f'(c)}$ i la seva equació és:

$$y = f(c) - \frac{1}{f'(c)} \cdot (x - c)$$

(En el cas en que $f'(c) = 0$, la recta normal és $x = c$.)



- Si considerem la recta (“corda”) que uneix els punts $(c, f(c))$ i $(c+h, f(c+h))$ la seva pendent és:

$$\tan \beta = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

- Si fem el límit quan $h \rightarrow 0$ d'aquesta corda obtenim la recta tangent, la pendent de la qual és $\tan \alpha = f'(c)$.

Exemple (Càlcul de derivades en un punt usant la definició)

(a) $f(x) = x^3 + 2x$ i $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((c+h)^3 + 2(c+h)) - (c^3 + 2c)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(c^3 + 3c^2h + 3ch^2 + h^3 + 2c + 2h) - (c^3 + 2c)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} (3c^2 + 3ch + h^2 + 2) = 3c^2 + 2\end{aligned}$$

Per tant, la seva funció derivada és $f'(x) = 3x^2 + 2$.

Si, p. ex., fem $c = 1$, llavors les rectes tangent i normal a $y = f(x)$ en el punt $(c, f(c)) = (1, 3)$ són, respectivament:

$$y = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) = 3 + 5 \cdot (x - 1) = 5x - 2,$$

$$y = f(1) - \frac{1}{f'(1)} \cdot (x - 1) = 3 - \frac{1}{5} \cdot (x - 1) = -\frac{1}{5}x + \frac{16}{5}.$$

Exemple (Càlcul de derivades en un punt ... (continuació))

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ definida per $x \geq 0$ i triem $c > 0$.

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{c+h} - \sqrt{c}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{c+h} - \sqrt{c}) \times (\sqrt{c+h} + \sqrt{c})}{h \times (\sqrt{c+h} + \sqrt{c})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{c+h})^2 - (\sqrt{c})^2}{h \times (\sqrt{c+h} + \sqrt{c})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{c+h} + \sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \end{aligned}$$

Per tant, la funció derivada és $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ definida si $x > 0$.

Per $c = 0$ és fàcil veure que $\nexists f'(0^+)$:

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Exemple (Càlcul de derivades en un punt ... (fi))

$$(c) \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

Així $f'(x) = \operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$, si $x \neq 0$, i $f'(0^+) \neq f'(0^-) \implies \nexists f'(0)$.

$$(d) \quad f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x > 0 \\ -2x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En aquest cas, $f'(0^+) = f'(0^-) = 0 \implies \exists f'(0) = 0$.

Per tant:

$$f'(x) = 2|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propietats de la derivada

Teorema (Relació bàsica entre continuïtat i derivada)

f derivable en el punt $c \implies f$ contínua en el punt c .

Demostració

Escrivim $f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c)$. Llavors:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c)) = \left(\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow c} (x - c) \right) = f'(c) \cdot 0 = 0.$$

Per tant: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c)) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Comentari

- *Si f no és contínua en c segur que f no és derivable en c .*
- *Hi ha funcions f que són contínues en c però $\nexists f'(c)$.
(P. ex., $f(x) = |x|$ en $c = 0$.)*

Teorema (Regles bàsiques de derivació)

Suposem que f i g són funcions derivables en el punt x . Llavors:

- ❶ $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x), \quad \forall c \in \mathbb{R}.$
- ❷ $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- ❸ $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- ❹ Si $g(x) \neq 0$:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Teorema (Regla de la cadena: Derivada composició funcions)

Suposem que f és derivable en el punt x i que g és derivable en el punt $f(x)$. Llavors:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

(S'escriu $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.)

Teorema (Derivada de la funció inversa)

Sigui f una funció derivable $\forall x \in (a, b)$ i t.q. $f'(x) \neq 0$ en l'interval. Supposem que $\exists f^{-1}$ funció inversa de f . Llavors, la derivada de f^{-1} compleix:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Demostració

El resultat és conseqüència directa de la regla de la cadena aplicada a la identitat $f^{-1}(f(x)) = x$. Si la derivem obtenim:

$$f^{-1}(f(x)) = x \implies (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \implies (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Comentari

Més endavant veurem que el fet que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, implica automàticament l'existència de la funció inversa f^{-1} .

Problema 4

Estudieu la continuïtat i derivabilitat en $\mathbb{R}$ de les funcions:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

És clar que, per generació, $f(x)$, $g(x)$ són contínues i derivables en tot $x \neq 0$. De fet, si $x \neq 0$, podem derivar les fórmules directament:

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

És té que $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ i $\exists \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, ja que són funcions producte d'una funció amb límit zero per una d'acotada $\implies f(x), g(x)$ també són contínues en $x = 0$ i, per tant, en tot $\mathbb{R}$.

Per discutir si són o no derivables en $c = 0$, usarem la definició de derivada d'una funció en un punt. Veurem que $\nexists f'(0)$ però $g'(0) = 0$.

Recordem que $\nexists \lim_{h \rightarrow 0} \sin(1/h)$, però $\exists \lim_{h \rightarrow 0} h \sin(1/h) = 0$. Per tant:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin(1/h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right) = \nexists,$$

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0.$$

$$\text{Així } g'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ definida } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Clarament, $g'(x)$ és contínua, per generació, si $x \neq 0$, però observem que no ho és en $x = 0$ ja que $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= \underbrace{2 \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{=0} - \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists. \end{aligned}$$

Derivació implícita

Si coneixem l'equació (també dita **relació implícita**) que defineix una funció $y = f(x)$, podem calcular $y' = f'(x)$ derivant **implícitament** l'equació, sense necessitat de calcular l'expressió **explícita** de $f(x)$. Introduïm la **derivació implícita** mitjançant un exemple.

Exemple (Derivació implícita)

- Sigui $y = f(x)$ funció (positiva) definida per l'equació $x^2 + y^2 = 1$.
- En aquest exemple podem donar l'**expressió explícita** de $y = f(x)$:

$$x^2 + y^2 = 1 \implies y^2 = 1 - x^2 \implies y = f(x) = +\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Derivant, obtenim:

$$y' = f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{f(x)}, \quad x \in (-1, 1).$$

- En general però, si $y = f(x)$ funció definida implícitament per una equació no és possible donar-ne una fórmula explícita. La derivació implícita permet calcular-ne igualment la seva derivada.

Exemple (Derivació implícita (continuació))

- Si en l'equació $x^2 + y^2 = 1$ interpretem y no com a variable independent, sinó com una funció de x , llavors derivant $x^2 + y^2 = 1$ respecte de x obtenim la següent expressió per $y' = f'(x)$:

$$x^2 + y^2 = 1 \implies 2x + 2y \cdot y' = 0 \implies y' = -\frac{x}{y}.$$

Aquesta darrera expressió equival a dir $f'(x) = -x/f(x)$.

- P. ex.: $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ compleix $x^2 + y^2 = 1 \implies f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$f'(1/2) = -\frac{1/2}{f(1/2)} = -\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Per tant, la recta tangent en el punt $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ a la corba en el pla (x, y) definida per l'equació $x^2 + y^2 = 1$ (circumferència) és:

$$y = f(1/2) + f'(1/2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}(2 - x).$$

Taula de derivades bàsiques

- $\frac{d}{dx}(c) = 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0$
- $\frac{d}{dx}(\log_a(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)} \right) = \frac{1}{x \ln(a)}, \quad \forall a, x > 0$
- $\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \ln(a)}) = e^{x \ln(a)} \ln(a) = a^x \ln(a), \quad \forall a > 0, x \in \mathbb{R}.$
- $\frac{d}{dx}(x^a) = \frac{d}{dx}(e^{a \ln(x)}) = e^{a \ln(x)} \frac{a}{x} = ax^{a-1}, \quad \forall a \in \mathbb{R}, x > 0$
- $\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$

- $\frac{d}{dx}(\tan(x)) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
- $\frac{d}{dx}(\cotan(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan(x)}\right) = -\frac{1}{\sin^2(x)}, \quad \forall x \neq n\pi$
- $\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1)$
- $\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1)$
- $\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \cosh(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$
- $\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \sinh(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$
- $\frac{d}{dx}(\tanh(x)) = \frac{1}{\cosh^2(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right)$

- $\frac{d}{dx}(\operatorname{argsinh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $(\operatorname{argsinh}(x) = \sinh^{-1}(x))$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{argcosh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1$
 $(\operatorname{argcosh}(x) = \cosh^{-1}(x))$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{argtanh}(x)) = \frac{1}{1 - x^2}, \quad x \in (-1, 1) \quad (\operatorname{argtanh}(x) = \tanh^{-1}(x))$
- $\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad x \neq 0$

Exemples càlcul derivades

- 1 Usant la derivada del quocient:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan(x)) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \underbrace{\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)^2}_{\tan^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

② Usant que $A^B = (e^{\ln(A)})^B = e^{B \ln(A)}$, si $A > 0$, llavors $x^x = e^{x \ln(x)}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^x) &= \frac{d}{dx}(e^{x \ln(x)}) = e^{x \ln(x)} \frac{d}{dx}(x \ln(x)) = x^x (\ln(x) + x \frac{1}{x}) \\ &= x^x (\ln(x) + 1).\end{aligned}$$

③ Usant la derivada de la funció inversa, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, i fent $f(x) = \sin(x)$, $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$, tenim:

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

on, fent $y = \arcsin(x)$ en la identitat $1 = \sin^2(y) + \cos^2(y)$:

$$1 = \sin^2(\arcsin(x)) + \cos^2(\arcsin(x)) = x^2 + \cos^2(\arcsin(x)).$$

Per tant: $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2 \implies \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

- 4 Usant de nou $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, ara amb $f(x) = \tan(x)$,
 $f^{-1}(x) = \arctan(x)$, $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$:

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(x)))^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

- 5 Recordem que $|x| = +\sqrt{x^2}$ i observem que

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \forall x > 0.$$

Llavors:

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x^2}) = \frac{2 \cdot x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}, \quad \forall x \neq 0.$$

Problema 14

$f(x) = \arctan\left(\frac{x+c}{1-cx}\right)$, $c > 0$ fixat, $g(x) = \arctan(x)$. Calculeu $f'(x)$, $g'(x)$ i useu el resultat per trobar expressions més simples per $f(x)$.

Observem que el domini de $g(x)$ és tot $\mathbb{R}$, però el de $f(x)$ és $\mathbb{R} \setminus \{1/c\}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1-cx-(x+c) \cdot (-c)}{(1-cx)^2}}{1 + \left(\frac{x+c}{1-cx}\right)^2} = \frac{\frac{1+c^2}{(1-cx)^2}}{1 + \left(\frac{x+c}{1-cx}\right)^2} \\ &= \frac{1+c^2}{(1-cx)^2 + (x+c)^2} = \frac{1+c^2}{1+c^2+x^2+c^2x^2} = \frac{1}{1+x^2}, \end{aligned}$$

vàlid si $x \neq 1/c$, on $f(x)$ no està ni definida. Per tant:

$$f'(x) = (\arctan(x))' = g'(x) \implies \frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = 0.$$

Si una funció té derivada zero ha de ser igual a una constant. Però cal estar atents al fet de que $f(x) - g(x)$ té derivada zero en tot $\mathbb{R}$ menys el punt $x = 1/c$, on $f(x) - g(x)$ no és ni tant sols contínua.

- Què implica que $f(x) - g(x)$ tingui derivada zero arreu tret en $1/c$?
- Que l'expressió $f(x) - g(x)$ és “constant”, però el valor d'aquesta constant pot ser diferent a la dreta i a l'esquerra de $x = 1/c$.

- $f(x) - g(x) = a$, si $x \in (-\infty, 1/c)$, per una certa $a \in \mathbb{R}$. Així:

$$\arctan\left(\frac{x+c}{1-cx}\right) = \arctan(x) + a, \quad \forall x < \frac{1}{c}.$$

Per determinar el valor de la constant a (en funció del c triat), avaluem l'expressió en $x = 0 < 1/c$. Obtenim:

$$\arctan(c) = \arctan(0) + a \implies a = \arctan(c).$$

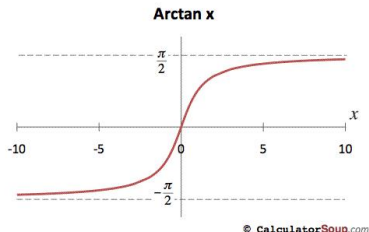
- $f(x) - g(x) = b$, si $x \in (1/c, +\infty)$, per una certa $b \in \mathbb{R}$. Així:

$$\arctan\left(\frac{x+c}{1-cx}\right) = \arctan(x) + b, \quad \forall x > \frac{1}{c}.$$

Determinem b calculant el límit quan $x \rightarrow +\infty$ i usant:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{x+c}{1-cx}\right) = \arctan\left(-\frac{1}{c}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{c}\right),$$

$$\text{Per tant: } -\arctan\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{\pi}{2} + b \implies b = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{c}\right).$$



- $g(x) = \arctan(x)$ és una funció definida $\forall x \in \mathbb{R}$, senar i tal que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan(x) = \pm \frac{\pi}{2}$ (asímtotes horitzontals a $\pm\infty$). A més, $\arctan(x)$ compleix la següent propietat. Si $c > 0$, llavors:

$$\arctan\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(c),$$

que usem per simplificar l'expressió de b de la pàgina anterior:

$$b = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{c}\right) = -\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(c)\right) = \arctan(c) - \pi.$$

Problema 10(b)

$f(x) = |x^2 - 9|$. Calculeu $f'(x)$ allà on la derivada estigui definida.

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{x}{|x|} \implies \frac{d}{dx}(|u(x)|) = u'(x) \frac{u(x)}{|u(x)|}, \text{ si } u(x) \neq 0 \text{ i } \exists u'(x).$$

En el nostre cas, $u(x) = x^2 - 9$. Així:

$$u'(x) = 2x \quad \text{i} \quad u(x) = 0 \iff x = \pm 3.$$

Per tant:

$$f'(x) = 2x \frac{x^2 - 9}{|x^2 - 9|}, \quad \text{si } x \neq \pm 3.$$

En canvi $\nexists f'(\pm 3)$. Per veure-ho, cal usar la definició de derivada:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(3+h)^2 - 9| - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(9 + 6h + h^2) - 9|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|6h + h^2|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \left| \frac{6h + h^2}{h} \right| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{|h|}{h}}_{\text{sign}(h)} |6 + h| = 6 \lim_{h \rightarrow 0} \text{sign}(h) = \nexists. \end{aligned}$$

Derivades d'ordre superior

Definició (Derivada segona i n -èsima d'una funció)

- Sigui $f(x)$ una funció derivable i $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$ la seva funció derivada. Llavors, si $f'(x)$ torna a ser una funció derivable, denotarem la funció **derivada segona** de $f(x)$ com:

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}(x) := \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) (x).$$

- En general, $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$ és la **derivada n -èsima** de $f(x)$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x) := \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right) (x).$$

Exemple

Si $f(x) = x^2|x|$ llavors $\exists f'(x) = 3x|x|$ i $\exists f''(x) = 6|x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, però $f'''(x) = 6 \operatorname{sgn}(x)$ si $x \neq 0$ i $\nexists f'''(0) \implies f(x)$ és dos cops derivable en $x = 0$ però no és tres cops derivable en $x = 0$. De fet, si $x \neq 0$ llavors $f^{(n)}(x) = 0$ si $n \geq 4$ i $f(x)$ infinits cops derivable si $x \neq 0$.

Exemple (Derivada n -èsima de $f(x) = \sqrt{x}$)

$$f(x) = x^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} = (-1) \frac{1}{2 \cdot 2} x^{-3/2} = -\frac{1}{4} x^{-3/2}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-5/2} = (+1) \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} x^{-5/2} = \frac{3}{8} x^{-5/2}$$

En general:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n} x^{-(2n-1)/2}, \quad n \geq 2.$$

- $(-1)^n$ determina el **signe**: -1 si n senar; $+1$ si n parell.
- $n!!$ denota el **semi-factorial** del nombre natural n .

P.ex.: $5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1$, $6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2$, $7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$, etcètera.

Exemple (Derivada segona d'una relació implícita)

- Tornem a l'exemple de la funció $y = f(x)$ definida implícitament per l'equació $x^2 + y^2 = 1$. (Triem $f(x) > 0$.)
- Derivant respecte de x aquesta relació implícita: $y' = -\frac{x}{y}$.
- Derivant 2 cops obtenim $y'' = f''(x)$:

$$x^2 + y^2 = 1 \implies 2x + 2y \cdot y' = 0 \implies 2 + 2(y')^2 + 2y \cdot y'' = 0.$$

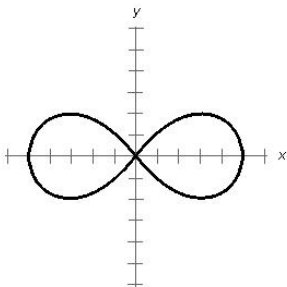
$$\text{Per tant } y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y}.$$

- P. ex.: $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ compleix $x^2 + y^2 = 1$:

$$x = \frac{1}{2}, \quad f(1/2) = y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f'(1/2) = y' = -\frac{x}{y} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Finalment:

$$f''(1/2) = y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y} = -\frac{1 + (-\sqrt{3}/3)^2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{8\sqrt{3}}{9}.$$



Problema 24

Calculeu la recta tangent en el punt $(4, 2)$ de la lemmiscata d'equació $3(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2)$. (Vegeu la figura de dalt.)

El que hem d'entendre en aquest problema, és que la corba en el pla x, y que ens defineix aquesta equació la podem expressar, almenys localment entorn del punt $(4, 2)$ de l'enunciat, com la gràfica d'una certa funció $y = y(x)$. És clar que la funció $y(x)$ no la tenim, però sabem que $y = y(x)$ verifica l'equació de l'enunciat i podem calcular les seva derivades usant derivació implícita.

Pas 1 Verifiquem que $(x, y) = (4, 2)$ efectivament pertany a la corba d'equació $3(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2)$:

$$3(4^2 + 2^2)^2 \stackrel{?}{=} 100(4^2 - 2^2) \iff 3 \cdot 20^2 \stackrel{?}{=} 100 \cdot 12 \iff 1200 \stackrel{?}{=} 1200.$$

Pas 2 Derivem implícitament l'equació $3(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2)$ respecte de x , entenent que $y = y(x)$ és una funció de x :

$$6(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 100(2x - 2yy').$$

Fixeu-vos que **no** aïllem y' a menys que ens ho demanin.

Pas 3 Avaluem en $(x, y) = (4, 2)$ per calcular $y'(4)$. Això vol dir que en la fórmula anterior hem d'entendre $x = 4$, $y = y(4) = 2$, $y' = y'(4)$:

$$6(4^2 + 2^2)(2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot y'(4)) = 100(2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot y'(4)) \implies$$

$$6 \cdot 20 \cdot (8 + 4 \cdot y'(4)) = 100 \cdot (8 - 4 \cdot y'(4)) \implies$$

$$6 \cdot (2 + y'(4)) = 5 \cdot (2 - y'(4)) \implies 11 \cdot y'(4) = -2.$$

Per tant, $y'(4) = -2/11$, i la recta tangent a la corba donada per la gràfica $y = y(x)$ en el punt $x = 4$ triat és:

$$y = y(4) + y'(4)(x - 4) = 2 - \frac{2}{11}(x - 4) = \frac{30}{11} - \frac{2}{11}x.$$

Per completar aquest exemple, anem a calcular també $y''(4)$. Un cop hem derivat implícitament respecte de x l'equació inicial, tenim:

$$6(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 100(2x - 2yy').$$

Ara podem tornar a derivar implícitament aquesta expressió respecte de x , entenent que tant $y = y(x)$ com $y' = y'(x)$ són funcions de x :

$$\begin{aligned} 6(2x + 2yy')^2 + 6(x^2 + y^2)(2 + 2(y')^2 + 2yy'') &= \\ &= 100(2 - 2(y')^2 - 2yy''). \end{aligned}$$

Simplificant:

$$6(x + yy')^2 + 3(x^2 + y^2)(1 + (y')^2 + yy'') = 50(1 - (y')^2 - yy'').$$

Fem $x = 4$, $y = y(4) = 2$, $y' = y'(4) = -2/11$, $y'' = y''(4)$. Obtenim:

$$\begin{aligned} 6\left(4 + 2\left(-\frac{2}{11}\right)\right)^2 + 3(4^2 + 2^2)\left(1 + \left(-\frac{2}{11}\right)^2 + 2y''(4)\right) &= \\ &= 50\left(1 - \left(-\frac{2}{11}\right)^2 - 2y''(4)\right). \end{aligned}$$

Operant: $2662y''(4) = -1085 \implies y''(4) = -1085/2662$.

Interpretació física de les derivades

Sigui $x(t)$ una funció que ens dóna la **posició** sobre la recta real d'una certa partícula en l'instant de temps t . Llavors:

- $v(t) = x'(t)$ **velocitat instantània** de la partícula en l'instant t .
- $a(t) = x''(t)$ **acceleració instantània** en l'instant t .

Exemple (Moviment uniformement accelerat)

Llancem un objecte des d'una alçada $h_0 > 0$ i amb una velocitat inicial v_0 . Si suposem que sobre l'objecte actua una gravetat constant, llavors l'expressió de la seva alçada en funció del temps és:

$$x(t) = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

on $g > 0$ és l'acceleració de la gravetat. Clarament:

$$x''(t) = -g, \quad x'(t) = v_0 - g \cdot t, \quad x'(0) = v_0, \quad x(0) = h_0$$

Creixement, decreixement, inversa i extrems

Definició (Creixement i decreixement)

$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on I és un interval de la recta real. Direm que f és ...

... **creixent** en $I \iff \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, llavors $f(x_1) \leq f(x_2)$.

... **decreixent** en $I \iff \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, llavors $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Si les desigualtats anteriors són **estRICTES** direm que f és ...

... **estRICTament creixent** síí. $f(x_1) < f(x_2)$.

... **estRICTament decreixent** síí. $f(x_1) > f(x_2)$.

Teorema (Creixement i decreixement via la derivada)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funció contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b) . Llavors:

- $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b) \implies f$ **estRICTament creixent** en $[a, b]$.
- $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b) \implies f$ **estRICTament decreixent** en $[a, b]$.
- $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b) \implies f$ **constant** en $[a, b]$.

Comentari (Funció inversa)

Si $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ és **bijectiva** (f és 1 a 1 entre els dos intervals), llavors $\exists f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ la **funció inversa** de f , verificant:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in [a, b], \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in [c, d].$$

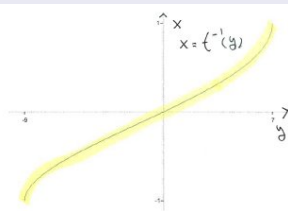
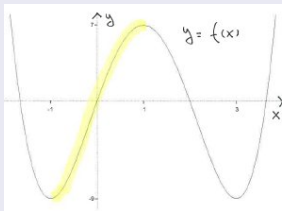
Teorema (Existència d'inversa via la derivada)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funció contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b) . Llavors:

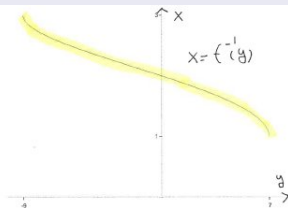
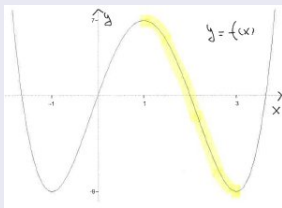
- 1 Si $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b) \implies f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ és bijectiva i $\exists f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ contínua en $[f(a), f(b)]$ i derivable en $(f(a), f(b))$. A més, $(f^{-1})'$ compleix $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$.
- 2 Si $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b) \implies f : [a, b] \rightarrow [f(b), f(a)]$ és bijectiva i $\exists f^{-1} : [f(b), f(a)] \rightarrow [a, b]$ contínua en $[f(b), f(a)]$ i derivable en $(f(b), f(a))$. A més, $(f^{-1})'$ compleix $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$.

• **Important:** Mentre f sigui **o bé estrictament creixent o bé estrict. decreixent** $\implies f$ és **injectiva i per tant té inversa**. Allà on f té una transició creixement/decreixement f deixa de ser injectiva/invertible.

Exemple (Funció inversa de $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$)



• f estrict. creixent en l'interval $[-1, 1]$, $f(-1) = -9$, $f(1) = 7 \implies f : [-1, 1] \rightarrow [-9, 7]$ és bijectiva $\implies \exists f^{-1} : [-9, 7] \rightarrow [-1, 1]$.



• f estrict. decreixent en l'interval $[1, 3]$, $f(1) = 7$, $f(3) = -9 \implies f : [1, 3] \rightarrow [-9, 7]$ és bijectiva $\implies \exists f^{-1} : [-9, 7] \rightarrow [1, 3]$.

Exemple (Funció inversa de $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$ (continuació))

- $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 4(x+1)(x-1)(x-3)$ compleix:
 $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 3)$,
 $f'(x) > 0$ si $x \in (-1, 1) \cup (3, +\infty)$.
- No tenim fórmules per a cap de les 4 possibles inverses de $f(x)$.
- Triem $x_0 \in \mathbb{R}$ i calculem $y_0 = f(x_0)$.
 - **Qüestió:** Podem garantir (independent dels càlculs anteriors) que existeix f^{-1} inversa local de f tal que $f^{-1}(y_0) = x_0$?
 - **Resposta:** Sí que podem garantir-ho sempre que $f'(x_0) \neq 0$.
 - A més, per aquesta inversa es té: $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
 - El que no ens diu directament el càlcul $f'(x_0) \neq 0$ és de quin a quin interval està definida f^{-1} .

Exemple: $x = 2 \implies f(2) = 0, f'(2) = -12 \neq 0 \implies$ existeix f^{-1} inversa local de f t.q. $f^{-1}(0) = 2$ i $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(2)} = -\frac{1}{12}$.

Exemple

Trobeu l'interval $I \subset \mathbb{R}$ més gran possible i contenint $x = 1$ en el qual $f(x) = x e^x$, definida de $I \rightarrow \mathbb{R}$, sigui injectiva i ademeti inversa f^{-1} , definida de $J \rightarrow I$, on $J = f(I) \subset \mathbb{R}$ interval contenint $y = e = f(1)$. Calculeu també $(f^{-1})'(e)$.

Estudiem el creixemen i decreixement de $f(x) = x e^x$ en $\mathbb{R}$. Calculem:
 $f'(x) = e^x (x + 1) \implies f'(x) = 0 \iff x = -1$. Per tant:

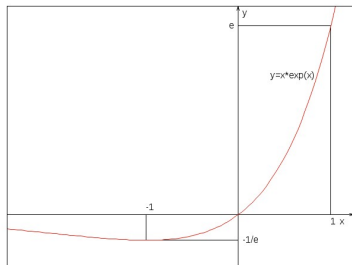
- $x < -1 \implies f'(x) < 0 \implies f$ estrictament decreixent en $(-\infty, -1]$.
- $x > -1 \implies f'(x) > 0 \implies f$ estrictament creixent en $[-1, +\infty)$.

Per tant:

- $I = [-1, +\infty)$, contenint $x = e$, interval més gran de creixement de f .
- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ estrictament creixent $\implies f : I \rightarrow J$ bijectiva, on $J = f(I)$.
- $J = f([-1, +\infty)) = [-\frac{1}{e}, +\infty)$, ja que $f(-1) = -\frac{1}{e}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Finalment, com que $f(1) = e \iff f^{-1}(e) = 1$, obtenim la següent relació entre les derivades de f , f^{-1} en **punts corresponents via f** :

$$(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2e}.$$



- Per pintar $f(x) = x e^x$, observem que $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. El darrer límit el calculem usant L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0,$$

on $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = e^{+\infty} = +\infty$.

- Com que $f : (-\infty, -1] \rightarrow \mathbb{R}$ és estrictament decreixent, també és $f : (-\infty, -1] \rightarrow [-1/e, 0)$ bijectiva i $\exists f^{-1} : [-1/e, 0) \rightarrow (-\infty, -1]$ una altre inversa (local) de f .

Definició (Màxims, mínims i extrems)

$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on I és un interval. Direm que c és un ...

... **mínim absolut** de f en $I \iff f(c) \leq f(x), \forall x \in I$.

... **màxim absolut** de f en $I \iff f(x) \leq f(c), \forall x \in I$.

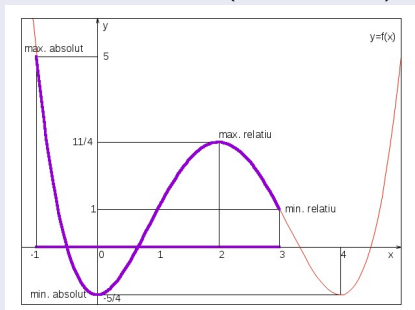
... **mínim relatiu** de f en $I \iff f(c) \leq f(x)$ si $x \in I$ és proper a c .

... **màxim relatiu** de f en $I \iff f(x) \leq f(c)$ si $x \in I$ és proper a c .

... **extrem** de f en $I \iff c$ és un màxim o un mínim de f en I .

Exemple (Extrems de $f(x) = x^4/4 - 2x^3 + 4x^2 - 5/4$)

Els extrems de f en $I = [-1, 3]$ són $-1, 0, 2$ i 3 , que surten de calcular $f'(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8) = x(x - 2)(x - 4)$.



Teorema (Existència d'extrems absoluts d'una funció contínua)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funció contínua en un **interval** $I = [a, b]$ **tancat i acotat**, llavors f sempre assoleix el seu màxim i el seu mínim absolut en I .

Comentari

- Si l'interval I no és tancat (p. ex., $I = (0, 1]$) o bé no és acotat (p. ex., $I = (-\infty, 0]$) llavors el resultat no té perquè ser cert.
- Pot succeir que f assoleixi el seu màxim absolut en 2 o més punts simultàniament (ídem mínim absolut).
- És molt usual que o bé el màxim o bé el mínim absolut sigui algun dels punts extrems de l'interval $[a, b]$.
(Per tant, $x = a$ i $x = b$ sempre són **candidats** a extrems de f .)
- **Questió:** Com identificar els candidats a extrems de f en (a, b) ?

Definició (Punts crítics)

$x = c$ és un **punt crític** de f si verifica una de les següents opcions:

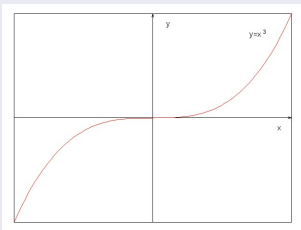
- **Opció 1:** $f'(c) = 0$.
- **Opció 2:** $\nexists f'(c)$.

Teorema (Relació punts crítics / extrems)

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funció contínua en un **interval obert** $I = (a, b)$. Llavors:
Si $c \in I$ és un extrem de f en $I \implies c$ és un punt crític de f .

Comentari

- El resultat també val si $a = -\infty$ o bé $b = +\infty$.
- No tot punt crític és un extrem. (P. ex.: $f(x) = x^3 \implies f'(0) = 0$ i $c = 0$ és un punt crític de f , però no és un extrem de f .)



- **Resum:** Si f està definida en l'interval tancat i acotat $[a, b]$ els seus **candidats a extrems** són: $x = a$ i $x = b$; els $c \in (a, b)$ t.q. f no és contínua en c o bé $\nexists f'(c)$; els $c \in (a, b)$ t.q. $f'(c) = 0$.

Teorema (Caracterització dels extrems relatius via derivades)

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ i $c \in (a, b)$.

- 1 Si f és derivable i c n'és un extrem relatiu $\implies f'(c) = 0$.
- 2 Si f és 2 cops derivable i $f'(c) = 0$:
 - $f''(c) > 0 \implies c$ és un mínim relatiu.
 - $f''(c) < 0 \implies c$ és un màxim relatiu.
 - $f''(c) = 0 \implies$ No podem dir res a priori.
- 3 Si f és n cops derivable, $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ i $f^{(n)}(c) \neq 0$ (això és, $f^{(n)}$ és la 1a derivada $\neq 0$ en c):
 - Si n **senar** $\implies c$ no és ni màx. ni mín. relatiu (punt d'inflexió).
 - Si n **parell**: $f^{(n)}(c) > 0 \implies c$ mínim; $f^{(n)}(c) < 0 \implies c$ màxim.

Exemple

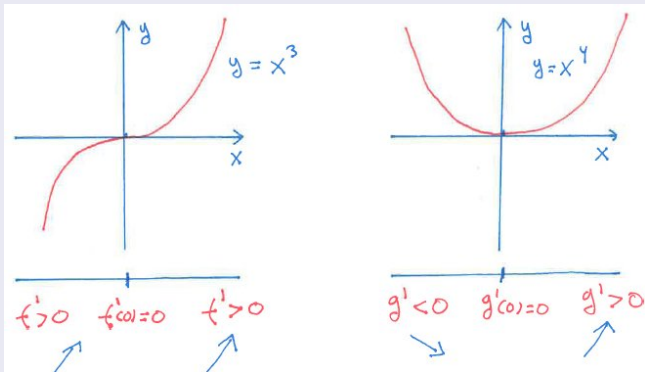
- (1) $f(x) = x^3 \implies f'(0) = f''(0) = 0, f'''(0) = 6 \neq 0$ (derivada senar)
 $\implies c = 0$ punt d'inflexió (ni màx. ni mín. relatiu).
- (2) $g(x) = x^4 \implies g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0, g^{(iv)}(0) = 24 > 0$
(derivada parell) $\implies c = 0$ mín. relatiu (de fet és el mín. absolut).

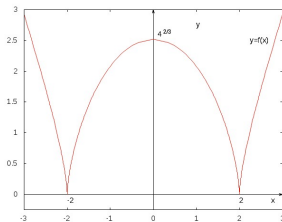
Comentari

En general, no és raonable calcular f'' per identificar màxims i mínims. Ja no diguem calcular f''' , $f^{(iv)}$, etcètera.

Sol ser millor estudiar el signe de f' entorn dels punts c on $f'(c) = 0$. Ho podem fer avaluant f' en un punt a la dreta de c i un a l'esquerra.

Exemple ($f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $g(x) = x^4$, $g'(x) = 4x^3$)





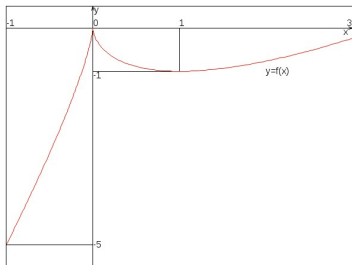
Exemple ($f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$)

- f és contínua en tot $\mathbb{R}$; $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = 0 \iff x = \pm 2$;
- $f'(x) = \frac{4x}{3(x^2 - 4)^{1/3}}$, si $x \neq \pm 2$. En canvi, $\nexists f'(x)$ si $x = \pm 2$, ja que:

$$f'(2^\pm) = \lim_{x \rightarrow 2^\pm} f'(x) = \pm\infty, \quad f'((-2)^\pm) = \lim_{x \rightarrow (-2)^\pm} f'(x) = \mp\infty.$$

A més, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$.

- Conclusió:** Els punts crítics de f en $\mathbb{R}$ són: $x = \pm 2$ (mín.'s abs.) i $x = 0$, únic $x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$ (màx. relatiu però no absolut).



Exemple (Extrems absoluts $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$, $-1 \leq x \leq 3$)

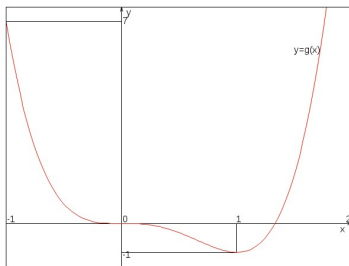
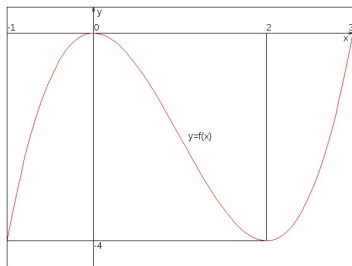
$f(x)$ contínua $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 2 - 2x^{-1/3} = 2 \left(\frac{x^{1/3} - 1}{x^{1/3}} \right)$, $\forall x \neq 0$

($f'(0^+) = -\infty$, $f'(0^-) = +\infty$). A més, el zeros de $f'(x)$ són:

$$f'(x) = 0 \iff x^{1/3} - 1 = 0 \iff x^{1/3} = 1 \iff x = 1.$$

Els punts crítics de $f(x)$ són 0, 1. Així: $f(0) = 0$ (màx. abs.), $f(1) = -1$, $f(-1) = -5$ (mín. abs.) i $f(3) = 6 - 3 \cdot 3^{2/3} = 3(2 - 3^{2/3}) \in (-1, 0)$, ja que: $f'(x) > 0$ si $x > 1 \implies f(3) > f(-1)$;

$$(2)^3 = 8 < 9 = (3^{2/3})^3 \implies 2 - 3^{2/3} < 0.$$



Exemple (Extr. absol. $f(x)$ en $-1 \leq x \leq 3$; $g(x)$ en $-1 \leq x \leq 2$)

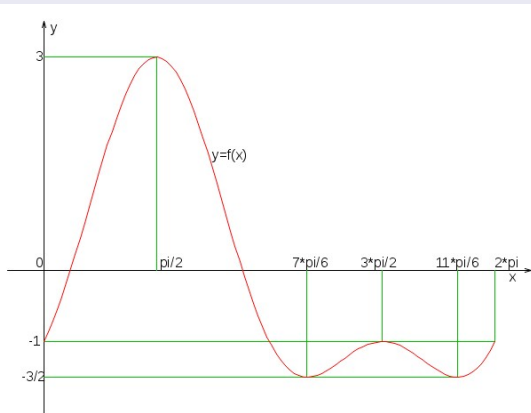
- $f(x) = x^3 - 3x^2 \implies f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \implies x \in \{0, 2\}$
punts crítics $\implies \underbrace{f(-1) = f(2) = -4}_{\text{mín. abs.}}, \underbrace{f(0) = f(3) = 0}_{\text{màx. abs.}}$

- $g(x) = 3x^4 - 4x^3 \implies g'(x) = 12(x^3 - x^2) = 12x^2(x-1) = 0 \implies x \in \{0, 1\}$ *punts crítics* $\implies g(-1) = 7, g(0) = 0, \underbrace{g(1) = -1}_{\text{mín. abs.}}$

$$\underbrace{g(2) = 16.}_{\text{màx. abs.}}$$

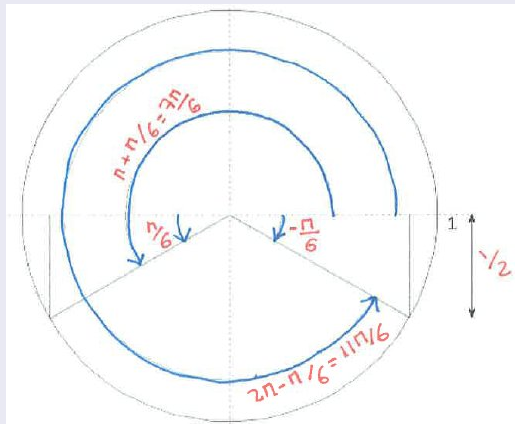
Exemple (Extr. absol. $f(x) = 2 \sin(x) - \cos(2x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$)

- $f'(x) = 2 \cos(x) + 2 \sin(2x) = 2 \cos(x) \cdot (1 + 2 \sin(x))$.
- $f'(x) = 0 \iff \cos(x) = 0$ o bé $\sin(x) = -1/2$.
- $\cos(x) = 0$ en $[0, 2\pi] \iff x = \pi/2$ o bé $x = 3\pi/2$.
- $\sin(x) = -1/2$ en $[0, 2\pi] \iff x = 7\pi/6$ o bé $x = 11\pi/6$.
- Els extrems absoluts de f en $[0, 2\pi]$ surten d'avaluar-la en:
 $f(0) = f(\frac{3\pi}{2}) = f(2\pi) = -1$, $f(\frac{\pi}{2}) = 3$, $f(\frac{7\pi}{6}) = f(\frac{11\pi}{6}) = -\frac{3}{2}$.



Exemple (Alguns comentaris sobre l'exemple anterior)

- Hem usat $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$.
- Per la determinació dels angles on $\sin(x) = -1/2$ veure la figura.
- Per calcular $f(x)$ si $x = 7\pi/6$ o $x = 11\pi/6$, observem que:
 $\sin(x) = -1/2 \implies \cos(x) = \pm\sqrt{3}/2$ (el signe depèn del quadrant).
Lavors, escrivim $f(x)$ de la forma següent:
 $f(x) = 2 \sin(x) - \cos(2x) = 2 \sin(x) - (\cos^2(x) - \sin^2(x))$.



Concavitat, convexitat, punts d'inflexió

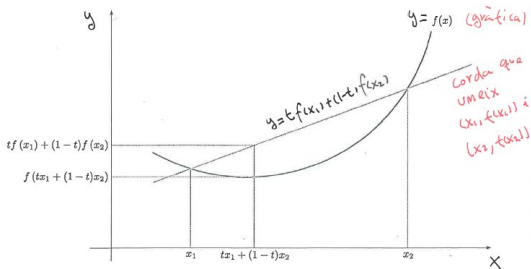
Definició (Funcions cònccaves i convexes en un interval)

Donada la funció $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, direm que f és ...

... **convexa** en $[a, b]$ síí. $f(t \cdot x_1 + (1 - t) \cdot x_2) \leq t \cdot f(x_1) + (1 - t) \cdot f(x_2)$

... **concava** en $[a, b]$ síí. $f(t \cdot x_1 + (1 - t) \cdot x_2) \geq t \cdot f(x_1) + (1 - t) \cdot f(x_2)$

on les desigualtats han de ser certes $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ i $\forall t \in [0, 1]$.



f **convexa** $\cup$ si per a tota parella de punts $x_1 < x_2$ la **corda** que uneix $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ queda per **sobre de la gràfica** $y = f(x)$.
Si la **corda** queda per **sota** llavors f és **concava** $\cap$.

Definició (Punt d'inflexió)

Direm que $c \in (a, b)$ és un **punt d'inflexió** de f si en $x = c$ canvia el caràcter còncava / convexa de f .

(f és còncava en $[a, c]$ i convexa en $[c, b]$ o viceversa.)

Teorema (Caracterització concavitat i convexitat via derivades)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua en $[a, b]$ i **2 cops** derivable en (a, b) . Llavors:

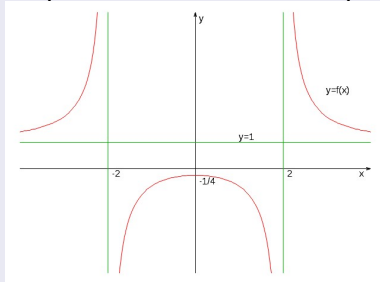
- $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b) \implies f$ **convexa** en $[a, b]$.
- $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b) \implies f$ **còncava** en $[a, b]$.
- Si $c \in (a, b)$ és un **punt d'inflexió** de $f \implies f''(c) = 0$.
- Si $f''(c) = 0$ i $f'''(c) \neq 0 \implies c$ és **punt d'inflexió** de f .

Comentari

- Si $f''(c) = 0$ i $f'''(c) = 0$, llavors $x = c$ no té perquè ser un punt d'inflexió de $f(x)$. (Exemple: $c = 0$ per $f(x) = x^4$.)
- Els punts de **discontinuitat** de f i de f' poden donar lloc a canvis concavitat / convexitat sense que f'' sigui zero enlloc.

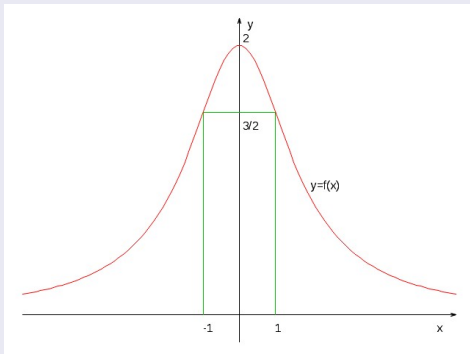
Exemple ($f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$)

- En $x = \pm 2$ la funció té *asímtotes verticals*: $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.
- Quan $x \rightarrow \pm\infty$ la funció té *asímtotes horitzontals*: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$.
- $f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-4) - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-10x}{(x^2-4)^2}$.
- $f'(x) > 0$ si $x < 0$ ($\nearrow$); $f'(0) = 0$ (*màx. relat.*); $f'(x) < 0$ si $x > 0$ ($\searrow$).
- $f''(x) = \frac{-10(x^2-4)^2 - (-10x) \cdot 2 \cdot (x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \frac{10 \cdot (3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$.
- $f''(x) > 0$ si $x < -2$ o si $x > 2$ ($\cup$); $f''(x) < 0$ si $-2 < x < 2$ ($\cap$).
- Per tant, $x = \pm 2$ són punts de discontinuïtat però d'inflexió de f .



Exemple ($f(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$ (contínua en tot $\mathbb{R}$))

- Quan $x \rightarrow \pm\infty$ la funció té asímptotes horitzontals: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.
- $f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$.
- $f'(x) > 0$ si $x < 0$ ($\nearrow$); $f'(0) = 0$ (màx. abs.); $f'(x) < 0$ si $x > 0$ ($\searrow$).
- $f''(x) = \frac{-12 \cdot (x^2+3)^2 - (-12x) \cdot 2 \cdot (x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} = \frac{36 \cdot (x^2-1)}{(x^2+3)^3}$.
- $f''(x) > 0$ si $x < -1$ o si $x > 1$ ($\cup$); $f''(x) < 0$ si $-1 < x < 1$ ($\cap$);
- $f''(\pm 1) = 0$ ($x = \pm 1$ són punts d'inflexió de f).



Regla de L'Hôpital

Teorema

Siguin f i g dues funcions derivables en $I \setminus \{c\}$, on I és un interval obert de $\mathbb{R}$ que conté el punt c (això vol dir que no cal que ni f ni g estiguin definides en $x = c$). Supposem que:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \left(\text{o bé } = \frac{\infty}{\infty} \right)$$

Aleshores, si $\exists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, es té:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

• Aquesta regla també serveix pels límits laterals $\lim_{x \rightarrow c^{\pm}} \frac{f(x)}{g(x)}$ i pels

límits cap a l'infinit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

• És habitual haver d'aplicar diverses vegades seguides la regla de L'Hôpital per a poder resoldre la indeterminació.

Atenció: Perquè la regla de L'Hôpital apliqui cal:

1er Què el $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ generi una indeterminació $\frac{0}{0}$ o bé $\frac{\infty}{\infty}$.

P.ex.: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ **NO** és una indeterminació i per tant

L'Hôpital no aplica: $+\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{1} = 1$.

2on Què efectivament existeixi $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Si $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ és $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$,

però $\nexists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, això no sempre vol dir que $\nexists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$. P.ex.:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad (\text{indeterminació})$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x = \nexists.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1.$$

Exemple (Regla de L'Hôpital)

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} \underset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \underset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 1/\infty = 0.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0} \underset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{0}{0} \underset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{x - \sin x} = \frac{0}{0} \underset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 \cos(2x)}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \underset{\text{L'Hôp.}}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x + 4 \sin(2x)}{\sin x} = \frac{0}{0} \underset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x + 8 \cos(2x)}{\cos x} = 6.$$

Exemple (Regla de L'Hôpital (continuació))

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} \underset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \underset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e,$$

on en (g) hem usat que $A^B = e^{B \ln(A)}$ amb $A = 1+x$ i $B = \frac{1}{x}$ per escriure $(1+x)^{1/x} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$ i hem permutat exponencial i límit (ja que l'exponencial és una funció contínua). Finalment:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0} \underset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/(1+x)}{1} = 1.$$

Exemple (Regla de L'Hôpital (continuació))

$$(h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right) \right)^x = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(\cos \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right) \right)} = e^L = e^{-a^2/2},$$

on hem usat el mateix truc que en l'exemple anterior per reformular el càlcul en termes del límit:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\cos \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right) \right) = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\cos \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right) \right)}{1/x} = \frac{0}{0} \\ &\stackrel{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{\cos \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right)} \right) \cdot \left(-\sin \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right) \right) \cdot \left(-\frac{a}{2} x^{-3/2} \right)}{-1/x^2} \\ &= -\frac{a^2}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right)}{\cos \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right)} \frac{\sqrt{x}}{a} \stackrel{z=a/\sqrt{x}}{=} -\frac{a^2}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \frac{1}{\cos z} = -\frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Exemple (Regla de L'Hôpital (fi))

$$\begin{aligned}(i) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= +\infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \frac{0}{0} \\&\stackrel{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-1/x}{\ln x + (x-1)/x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x \ln x + x-1} = \frac{0}{0} \\&\stackrel{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

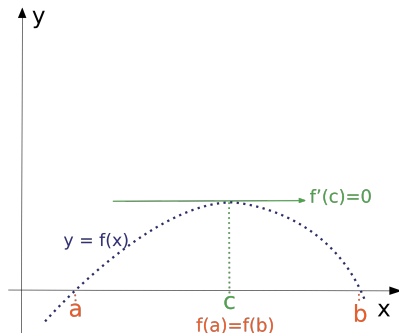
Teorema de Rolle

Teorema

Sigui $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b) .

Si $f(a) = f(b)$, aleshores existeix $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

Interpretació geomètrica: si una funció derivable f té el mateix valor en dos punts diferents a i b , aleshores existeix algun punt intermedi $c \in (a, b)$ on la seva recta tangent és horitzontal. El punt c és un extrem relatiu de f en (a, b) , que en general és desconegut i que no te pas perquè ser únic.



Teorema del valor mitjà

Teorema

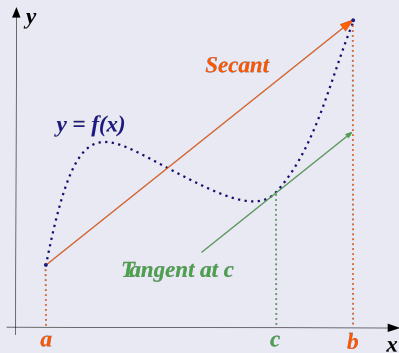
Sigui $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b) .

Aleshores, existeix $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Interpretació geomètrica: El punt intermedi c és t.q. la pendent de f en c coincideix amb la pendent de la recta secant/corda que uneix els punts $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$:

$$\underbrace{f'(c)}_{\text{Pendent de } f \text{ en } x=c} = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\text{Pendent de la "corda"}}$$

De nou, c existeix, és desconegut i no té perquè ser únic (en l'exemple del dibuix n'hi ha dos).



Demostració (del Teorema del Valor Mitjà)

Considerem la funció $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ donada per la fórmula:

$$F(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right).$$

($F(x)$ dóna la diferència entre les gràfiques de $y = f(x)$ i la de la recta secant de la figura anterior: $y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$.)

- $F(x)$ és contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b) , ja que $f(x)$ ho compleix i $F(x)$ s'obté restant-li una funció lineal en x .
- Per definició: $0 = F(a) = F(b) = 0 \implies$ Pel Teorema de Rolle, $\exists c \in (a, b)$ tal que $F'(c) = 0$.
- Clarament: $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Per tant:

$$0 = F'(c) = f'(c) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) \implies f(b) - f(a) = f'(c) (b - a).$$

Exemple

Aplicació del Teorema de Rolle Sigui $f(x)$ una funció tres cops derivable en tot $\mathbb{R}$ que compleix:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f''(1) = 0.$$

Proveu que $f'''(c) = 0$, per algún $c \in (0, 1)$.

Apliquem el Teorema de Rolle de forma reiterada a $f(x)$, $f'(x)$ i $f''(x)$.

- $f(0) = f(1) = 1 \implies \exists a \in (0, 1)$ tal que $f'(a) = 0$.
- $f'(0) = f'(a) = 0 \implies \exists b \in (0, a)$ tal que $(f')'(b) = f''(b) = 0$.
- $f''(b) = f''(1) = 0 \implies \exists c \in (b, a)$ tal que $(f'')'(c) = f'''(c) = 0$.

Problema 34

Siguin $0 \leq a < b$. Proveu: $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan(b) - \arctan(a) < \frac{b-a}{1+a^2}$.

Apliquem el T^a del Valor Mitjà a $f(x) = \arctan(x)$ en l'interval $[a, b]$.

Usant que $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, es té que $\exists c \in (a, b)$:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \implies \arctan(b) - \arctan(a) = \frac{1}{1+c^2}(b-a).$$

El punt c no sabem qui és, però sí que $c \in (a, b)$ i que $0 \leq a < b$:

$$\begin{aligned} 0 \leq a < c < b &\implies 1 \leq 1+a^2 < 1+c^2 < 1+b^2 \\ &\implies \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2} \leq 1. \end{aligned}$$

Per tant, com que $b-a > 0$:

$$\arctan(b) - \arctan(a) = \frac{1}{1+c^2}(b-a) < \frac{1}{1+a^2}(b-a),$$

$$\arctan(b) - \arctan(a) = \frac{1}{1+c^2}(b-a) > \frac{1}{1+b^2}(b-a).$$

Fórmula de Taylor

Els polinomis de Taylor són la forma natural d'aproximar **localment** (entorn d'un punt donat) funcions generals per la classe de funcions més simples possibles: els polinomis.

Definició (Polinomis de Taylor)

Sigui $f(x)$ una funció (almenys) n vegades derivable en el punt c . Aleshores, denotem per $P_n(x)$ **el polinomi de Taylor de grau n de $f(x)$ en el punt c** , que ve donat per la fórmula següent:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(c)}{j!} (x-c)^j = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!} (x-c)^2 + \\ + \frac{f'''(c)}{3!} (x-c)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n.$$

$$\underbrace{j!}_{j \text{ factorial}} = j \cdot (j-1) \cdot (j-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1. \quad (\text{Si } j=0 \implies 0! = 1.)$$

Definició (Polinomis de Maclaurin)

*En el cas particular $c = 0$, els polinomis de Taylor s'anomenen de **Maclaurin**:*

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Comentari (Motivació del perquè de la definició de $P_n(x)$)

Si avaluem $P_n(x)$ i $f(x)$ en $x = c$ ambdós donem el mateix valor. El mateix succeeix amb les seves n primeres derivades en $x = c$:

$$P_n(c) = f(c), \quad P'_n(c) = f'(c), \quad P''_n(c) = f''(c), \dots, \quad P_n^{(n)}(c) = f^{(n)}(c).$$

Polinomis de Maclaurin bàsics (detalls tot seguit)

Funció	Polinomis de Maclaurin
e^x	$P_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^N}{N!}$
$\cos x$	$P_{2N}(x) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^N \frac{x^{2N}}{(2N)!}$
$\sin x$	$P_{2N+1}(x) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^N \frac{x^{2N+1}}{(2N+1)!}$
$\ln(1-x)$	$P_N(x) = - \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^N}{N}$
$\arctan x$	$P_{2N+1}(x) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^N \frac{x^{2N+1}}{2N+1}$
$\frac{1}{1-x}$	$P_N(x) = \sum_{n=0}^N x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^N$
$(1+x)^\alpha$ amb $\alpha \in \mathbb{R}$	$P_N(x) = \sum_{n=0}^N \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots$

TAULA 1. Alguns polinomis de Maclaurin.

Polinomis de Maclaurin bàsics: detalls

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

- $f(x) = e^x$ $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$
 $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

- $f(x) = \sin x$ (Cada cop que derivem 4 cops repetim seqüència.)

$$f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x$$
$$f^{(iv)}(x) = \sin x, f^{(v)}(x) = \cos x, \dots$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1,$$
$$f^{(iv)}(0) = 0, f^{(v)}(0) = 1, \dots$$

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

(només termes de grau senar $\leq n$)

Polinomis de Maclaurin bàsics: detalls (continuació)

- $f(x) = \cos x$

$$P_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (\text{només termes de grau parell } \leq n)$$

- $f(x) = \ln(1+x)$ $f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$,
 $f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$,

$$\begin{aligned} f^{(j)}(x) &= (-1)(-2)(-3) \cdots (-(j-1)) \cdot (1+x)^{-j} \\ &= (-1)^{j-1} (j-1)! (1+x)^{-j}. \end{aligned}$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, f'''(0) = 2!, f^{(iv)}(0) = -3!, f^{(v)}(0) = 4!, \dots, f^{(j)}(0) = (-1)^{j-1} (j-1)!$$

$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Polinomis de Maclaurin bàsics: detalls (continuació)

- $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$
- $f(x) = (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ valor fixat)

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \dots$$

$$f^{(j)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-j+1) \cdot (1+x)^{\alpha-j}$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \alpha, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1), \quad f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2), \\ f^{(j)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-j+1).$$

$$P_n(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Polinomis de Maclaurin bàsics: detalls (fi)

- $f(x) = (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ valor fixat) (Continuació)

També podem expressar el seu polinomi de Maclaurin en termes de *nombres combinatoris (generalitzats)*:

$$P_n(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n$$

on, per a cada, $\alpha \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, definim el **nombre combinatori (generalitzat)** α sobre n com:

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}^{n \text{ termes}}}{n!}.$$

$$\text{P.ex.: } \binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{16}.$$

Desenvolupaments de Taylor per generació

Molts altres desenvolupaments de Taylor poden calcular-se operant i composant els de les funcions bàsiques (sense calcular cap derivada).

Exemple (Maclaurin de $f(x) = \arctan(x)$)

- $f(x) = \arctan(x) \implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- Usem el desenvolupament de Maclaurin (ja introduït) de $\frac{1}{1-x}$ fins grau n , pero en termes d'una nova variable u enlloc de x :
$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \dots + u^n + \mathcal{O}(u^{n+1}),$$

on $\mathcal{O}(u^{n+1})$ es llegeix com **ordre** u^{n+1} **en** u i vol dir (de forma sintètica) que $\mathcal{O}(u^{n+1})$ conté termes (sense que calgui precisar quins) de grau $n+1$ i superior en u , que són els que no explicitem quan donem el polinomi de Taylor de $\frac{1}{1-u}$ fins grau n .

Exemple (Maclaurin de $f(x) = \arctan(x)$ (continuació))

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \dots + u^n + \mathcal{O}(u^{n+1})$$

- Fem $u = -x^2$ en el polinomi de Taylor de $\frac{1}{1-u}$ fins grau n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \dots + (-x^2)^n + \mathcal{O}((-x^2)^{n+1}) \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \mathcal{O}(x^{2(n+1)}) \end{aligned}$$

on $\mathcal{O}(x^{2(n+1)})$ denota termes de grau $2n+2$ i superior en x .

- Integrem en els dos costats de la igualtat respecte de x :

$$\arctan(x) = c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathcal{O}(x^{2n+3})$$

on els dos costats de la igualtat són primitives de $\frac{1}{1+x^2}$ que han de diferir en una constant c . Fent $x = 0 \implies c = \arctan(0) = 0$.

- $$f(x) = \arctan(x) \implies P_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

($P_n(x)$ només té graus senars i cal tallar-lo al grau que toqui.)

Exemple (Maclaurin de $f(x) = \tan x$ fins grau 5)

- $\tan x = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \implies$ Maclaurin de $\tan x$ surt de multiplicar Maclaurin de $\sin x$ i de $\frac{1}{\cos x}$.

- Maclaurin de $\cos x$ fins grau 5 és:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6) = 1 - u,$$

on la igualtat final es dóna si definim $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)$.

- Usem Maclaurin de $\frac{1}{1-u}$ amb **aquest valor de u** per calcular Maclaurin de $\frac{1}{\cos x}$ fins grau 5 (observem $\mathcal{O}(u^3) = \mathcal{O}(x^6)$):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \mathcal{O}(u^3) \\ &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6) \right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6) \right)^2 + \mathcal{O}(x^6) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24} \right) x^4 + \mathcal{O}(x^6) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + \mathcal{O}(x^6).\end{aligned}$$

Exemple (Maclaurin de $f(x) = \tan x$ fins grau 5 (continuació))

- Multipliquem Maclaurin de $\sin x$ i de $\frac{1}{\cos x}$ fins grau 5:

$$\begin{aligned}\tan x &= \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \\&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7) \right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \mathcal{O}(x^6) \right) \\&= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) x^3 + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{12} + \frac{5}{24} \right) x^5 + \mathcal{O}(x^7) \\&= x + \underbrace{\frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5}_{P_5(x)} + \mathcal{O}(x^7).\end{aligned}$$

- $P_5(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(v)}(0)}{5!}x^5$.

Si igualem potències de x , deduïm $f(0) = f''(0) = f^{(iv)}(0) = 0$ i:

$$f'(0) = 1 \quad \left| \quad \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3} \implies f'''(0) = 2 \quad \right| \quad \frac{f^{(v)}(0)}{5!} = \frac{2}{15} \implies f^{(v)}(0) = 16$$

Exemple (Càlcul de límits usant desenvolupaments de Taylor)

Els límits següents donen lloc a indeterminacions $\frac{0}{0}$. Per calcular-los per Taylor hem de desenvolupar **separadament** per Maclaurin les funcions del numerador i denominador dels quocients. El grau/ordre del desenvolupament és: **fins que apareix el 1er terme no nul del polinomi de Taylor.**

- Usem $\ln(1 + u) = u + \mathcal{O}(u^2) = u - \frac{u^2}{2} + \mathcal{O}(u^3)$, per calcular:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \\&= \left[\begin{array}{l} \text{Canvi de variables:} \\ u = x-1 \rightarrow 0^+ \end{array} \right] = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u - \ln(1+u)}{u \ln(1+u)} \\&= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u - (u - u^2/2 + \mathcal{O}(u^3))}{u(u + \mathcal{O}(u^2))} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u^2/2 + \mathcal{O}(u^3)}{u^2 + \mathcal{O}(u^3)} \\&= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1/2 + \mathcal{O}(u)}{1 + \mathcal{O}(u)} = \frac{1/2 + 0}{1 + 0} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exemple (Càlcul de límits usant Taylor (continuació))

• *Useu els desenvolupaments:* $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \mathcal{O}(x^7)$,
 $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \mathcal{O}(u^3) \xRightarrow{u=x^2/3} e^{x^2/3} = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{3}\right)^2 + \mathcal{O}(x^6),$

$\ln(1+u) = u + \mathcal{O}(u^2) \xRightarrow{u=x^3} \ln(1+x^3) = x^3 + \mathcal{O}(x^6)$, per calcular:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x - x^2 e^{x^2/3}}{\ln^2(1+x^3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \mathcal{O}(x^7) \right) - x^2 \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{18} + \mathcal{O}(x^6) \right)}{(x^3 + \mathcal{O}(x^6))^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2}{15} - \frac{1}{18} \right) x^6 + \mathcal{O}(x^8)}{x^6 + \mathcal{O}(x^9)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{90} + \mathcal{O}(x^2)}{1 + \mathcal{O}(x^3)} = \frac{7}{90} + 0 = \frac{7}{90}. \end{aligned}$$

Observació: Si usem L'Hôpital per calcular el límit, cal derivar 6 cops numerador i denominador!

Problema 41(a,b)

Useu Maclaurin per calcular el límit a l'origen de les funcions següents:

$$(a) f(x) = \frac{1 - \cos(1 - \cos(x))}{x^4}, \quad (b) g(x) = \frac{\sin^3(x) - \sin(x^3)}{\ln(1 + x^5)}.$$

(a) $\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \mathcal{O}(u^6) \implies 1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)$. Així:

$$\begin{aligned} \cos(1 - \cos(x)) &= \cos\left(\underbrace{\left(\frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)\right)}_u\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)\right)^4 + \mathcal{O}(x^{12}) \\ &= 1 - \frac{1}{2!} \frac{x^4}{(2!)^2} + \frac{1}{4!} \frac{x^8}{(2!)^4} + \mathcal{O}(x^6) = 1 - \frac{x^4}{8} + \mathcal{O}(x^6). \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^4}{8} + \mathcal{O}(x^6)\right)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{8} + \mathcal{O}(x^2)\right) = \frac{1}{8}.$$

$$(b) \quad g(x) = \frac{\sin^3(x) - \sin(x^3)}{\ln(1+x^5)}.$$

$$\ln(1+u) = u + \mathcal{O}(u^2) \implies \ln(1+x^5) = x^5 + \mathcal{O}(x^{10}),$$

$$\sin(u) = u - \frac{u^3}{3!} + \mathcal{O}(u^5) \implies \sin(x^3) = x^3 + \mathcal{O}(x^9),$$

$$\sin(x) \times \sin(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)\right) \times \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)\right)$$

$$= x^2 - 2 \frac{x^4}{3!} + \mathcal{O}(x^6),$$

$$\sin^2(x) \times \sin(x) = \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)\right) \times \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)$$

$$= x^3 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)x^5 + \mathcal{O}(x^7) = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \mathcal{O}(x^7).$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \mathcal{O}(x^7) - (x^3 + \mathcal{O}(x^9))}{x^5 + \mathcal{O}(x^{10})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x^2)}{1 + \mathcal{O}(x^5)} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Problema 37

Maclaurin fins ordre 3 de $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} = (1 + (1 + x)^{1/2})^{1/2}$.

Hi ha l'opció de calcular les 3 primeres derivades de $f(x)$ en $x = 0$, però ho farem per **generació**. Recordem:

$$(1 + u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} u^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} u^3 + \mathcal{O}(u^4).$$

Fent $\alpha = 1/2$ obtenim:

$$\begin{aligned}(1 + u)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2} u + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!} u^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{3!} u^3 + \mathcal{O}(u^4) \\&= 1 + \frac{1}{2} u + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2} u^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{6} u^3 + \mathcal{O}(u^4) \\&= 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + \mathcal{O}(u^4).\end{aligned}$$

$(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + \mathcal{O}(u^4)$. Per tant:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left(1 + (1+x)^{1/2}\right)^{1/2} = \left(1 + \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathcal{O}(x^4)\right)\right)^{1/2} \\
 &= \left(2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathcal{O}(x^4)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \left[1 + \underbrace{\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + \mathcal{O}(x^4)}_u\right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sqrt{2} \left[1 + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + \mathcal{O}(x^4)\right)}_u - \frac{1}{8} \underbrace{\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \mathcal{O}(x^3)\right)^2}_{u^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{16} \underbrace{\left(\frac{x}{4} + \mathcal{O}(x^2)\right)^3}_{u^3} + \mathcal{O}(x^4)\right].
 \end{aligned}$$

(Dins del quadrat i el cub només hi deixem els termes de u que realment contribueixen al càlcul del desenvolupament de grau 3.)

Finalment, desenvolupant el quadrat i el cub i retenint només els termes de grau ≤ 3 s'obté:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{2} \left[1 + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + \mathcal{O}(x^4) \right)}_u - \underbrace{\frac{1}{8} \left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \mathcal{O}(x^3) \right)^2}_{u^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{16} \underbrace{\left(\frac{x}{4} + \mathcal{O}(x^2) \right)^3}_{u^3} + \mathcal{O}(x^4) \right] \\
 &= \sqrt{2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{32} \right) + \frac{1}{16} \frac{x^3}{64} + \mathcal{O}(x^4) \right] \\
 &= \sqrt{2} \left[1 + \frac{x}{8} - \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{128} \right) x^2 + \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} \right) x^3 + \mathcal{O}(x^4) \right] \\
 &= \sqrt{2} \left[1 + \frac{x}{8} - \frac{5}{128} x^2 + \frac{21}{1024} x^3 + \mathcal{O}(x^4) \right].
 \end{aligned}$$

Error en el desenvolupament de Taylor

- **Qüestió:** Si substituïm una funció $f(x)$ pel seu polinomi de Taylor $P_n(x)$ en un punt $x = c$, quin error cometem?
- **Resposta:** Cal controlar el tamany del **residu** $R_n(x)$.

Teorema (Fórmula de Lagrange del residu)

Sigui $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funció $n + 1$ vegades derivable i $c \in (a, b)$.

Lavors: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ on:

- $P_n(x)$ polinomi de Taylor de grau n de $f(x)$ en el punt c .
- $R_n(x)$ **reste / residu / error** del desenvolupament de Taylor.

Aleshores, es té la següent **fórmula de Lagrange** pel residu:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\mathbf{z})}{(n+1)!} (x - c)^{n+1}, \quad \forall x \in (a, b),$$

on $\mathbf{z} = \mathbf{z}(x)$ és un punt, que depèn del valor de $x \in (a, b)$ triat, que pertany a l'interval obert que té extrems c i x (en l'ordre que toqui).
(De $\mathbf{z}$ podem dir que existeix, però en general és desconegut.)

Problema 38(b)

Doneu una cota superior de l'error que cometem en fer l'evaluació

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \approx 2.7166667.$$

El desenvolupament de Maclaurin de $f(x) = e^x$ fins termes de grau 5 és: $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + R_5(x)$. La fórmula de Lagrange pel residu del desenvolupament de Taylor per $c = 0$ i $n = 5$ és:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\mathbf{z})}{(n+1)!} (x - c)^{n+1} \implies R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\mathbf{z})}{6!} x^6,$$

on $\mathbf{z}$ és un punt (desconegut) que està en l'interval definit per $c = 0$ i el valor de x triat. En el nostre cas: $f^{(6)}(x) = e^x$, $x = 1$. Per tant:

$$e = f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + R_5(1), \quad R_5(1) = \frac{e^{\mathbf{z}} \cdot 1^6}{6!}.$$

Usant que $e^{\mathbf{z}} < e^1 < 3$, obtenim la següent acotació per l'error comés:

$$|R_5(1)| = \frac{e^{\mathbf{z}}}{6!} < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} < 4.17 \times 10^{-3}. \quad (\text{Error real} \approx 1.6 \times 10^{-3}.)$$

Representació gràfica de funcions

Tot seguit, anem a detallar un possible esquema per abordar la representació gràfica “aproximada” de funcions d’una variable.

Atenció: No sempre cal implementar l’esquema complert per dibuixar la gràfica. P. ex., l’estudi de la concavitat i la convexitat molts cops el podem ometre.

1. Domini i rang

Exemple ($f(x) = x^x = e^{x \ln(x)}$)

Domini de f : $D_f = (0, +\infty)$. ($\ln(x)$ ben definit $\iff x > 0$.)

Rang o imatge de f : $R_f = (0, +\infty)$. (Ja que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.)

Exemple ($f(x) = \sqrt{x^3 - x}$)

$D_f = [-1, 0] \cup [1, +\infty)$ (punts on $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1) \geq 0$).

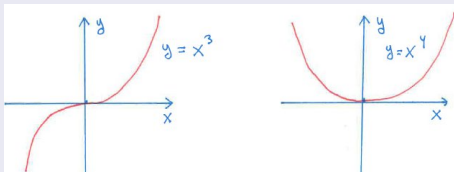
$R_f = (0, +\infty)$. (Ja que $f(x) > 0, \forall x \in D_f$.)

2. Simetries i talls amb els eixos

Definició (Funcions parells i senars)

- f és **parell** (simètrica respecte de l'eix y) $\iff f(-x) = f(x)$.
- f és **senar** (simètrica respecte de l'origen) $\iff f(-x) = -f(x)$.

Exemple ($f(x) = x^3$ senar, $g(x) = x^4$ parell)



Definició (Talls amb els eixos)

- **Tall amb l'eix y** : Correspon al punt $(0, f(0))$.
- **Talls amb l'eix x** $\iff$ zeros de la funció.

Exemple ($f(x) = x^3 - x$)

f té tres talls amb l'eix x : $(-1, 0)$, $(0, 0)$ i $(1, 0)$.

3. Límits a l'infinit (asímtotes horitzontals i obliqües)

Definició (Asímtotes horitzontals i obliqües)

- f té una **asímtota obliqua** a $+\infty$ si existeix una recta $y = mx + b$ a la qual tendeix la gràfica $y = f(x)$ quan $x \rightarrow +\infty$.
(Ídem per definir asímtota obliqua a $-\infty$.)
- En el cas particular $m = 0$, l'asímtota obliqua $y = b$ esdevé una recta horitzontal i s'anomena **asímtota horitzontal**.

- ❶ **Asímtota obliqua** a $+\infty$ si existeixen els dos límits següents:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - m \cdot x)$$

- ❷ **Asímtota obliqua** a $-\infty$: Canviem $x \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow -\infty$.

- ❸ **Asímtota horitzontal** $\pm\infty$: Si existeix $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Comentari

En general les funcions **no tenen** asímtotes obliqües. Si en tenen, el que succeeix a $-\infty$ és independent del que succeeix a $+\infty$.

Exemple ($f(x) = e^x$)

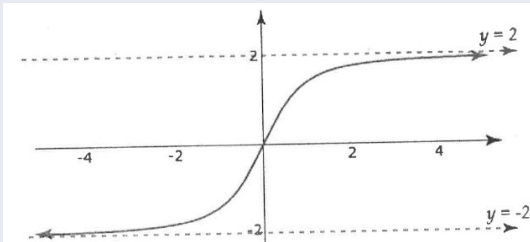
$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \implies y = 0$ *asímt. horitz. de f a $-\infty$, però f no té asímt. horitz. a $+\infty$ (de fet tampoc obliqua).*

Exemple ($f(x) = \arctan(x)$)

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan(x) = \pm \frac{\pi}{2} \implies y = \frac{\pi}{2}$ i $y = -\frac{\pi}{2}$ *són les asímt. horitz. de f a $+\infty$ i $-\infty$, respectivament.*

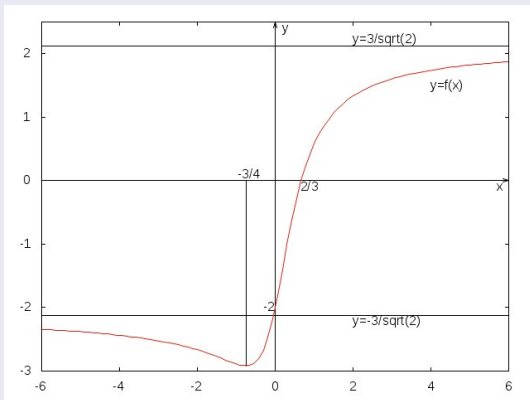
Exemple ($f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f'(x) = \frac{2}{(x^2+1)^{3/2}}$, $f''(x) = \frac{-6x}{(x^2+1)^{5/2}}$)

$D_f = \mathbb{R}$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm 2 \implies y = \pm 2$ *asímt. horitz. de f a $\pm\infty$. f estrictament creixent; $x = 0$ punt d'inflexió.*



Exercici ($f(x) = \frac{3x - 2}{\sqrt{2x^2 + 1}}$)

Vegeu que la gràfica de $y = f(x)$ és com segueix. (Indicació: pot ser útil expressar $f(x) = \frac{3x - 2}{(2x^2 + 1)^{1/2}}$ per calcular $f'(x) = \frac{4x + 3}{(2x^2 + 1)^{3/2}}$.)



Exemple ($f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$, $D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$)

• $y = x$ **asímt. obliqua** a $+\infty$: Si $x > 0 \implies x = +\sqrt{x^2}$. Per tant:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - 4/x^2}} = 1.$$

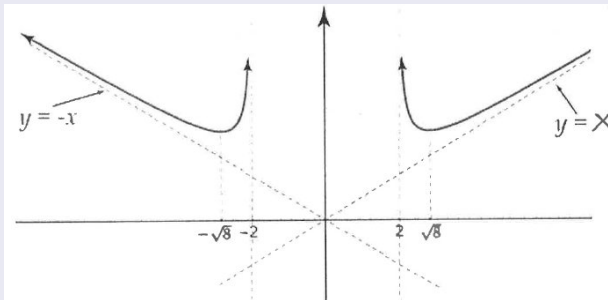
$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)^2 - (x\sqrt{x^2 - 4})^2}{(x^2 + x\sqrt{x^2 - 4}) \sqrt{x^2 - 4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{(x^2 + x\sqrt{x^2 - 4}) \sqrt{x^2 - 4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{(1 + \sqrt{1 - 4/x}) \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{4}{(1 + 1) \cdot (+\infty)} = 0. \end{aligned}$$

Exemple $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$, $f'(x) = \frac{x(x^2-8)}{(x^2-4)^{3/2}}$, $f''(x) = \frac{4(x^2+8)}{(x^2-4)^{5/2}}$ (cont.)

• $y = -x$ **asímt. obliqua** $a -\infty$: Si $x < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{x^2}$. Ara:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-4/x^2}} = -1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2)^2 - (x\sqrt{x^2-4})^2}{(x^2 - x\sqrt{x^2-4})\sqrt{x^2-4}} = 0.$$



Exemple (Problema 32(I): $f(x) = (6x^2 - x^3)^{1/3}$, $D_f = \mathbb{R}$)

• $y = mx + b = -x + 2$ **asíntota obliqua** a $\pm\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{6x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{6x^2 - x^3}{x^3}} = -1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x \right) = \left[u = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+ \right]$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\sqrt[3]{\frac{6}{u^2} - \frac{1}{u^3}} + \frac{1}{u} \right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{6u - 1} + 1}{u}$$

$$= - \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{1 - 6u} - 1}{u} = - \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(1 - 2u + \mathcal{O}(u^2)) - 1}{u}$$

$$= - \lim_{u \rightarrow 0^+} (-2 + \mathcal{O}(u)) = -(-2) = 2,$$

on hem usat el desenvolupament de Maclaurin:

$$\sqrt[3]{1+z} = (1+z)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}z + \mathcal{O}(z^2) \underbrace{\implies}_{z=-6u} \sqrt[3]{1-6u} = 1 - 2u + \mathcal{O}(u^2).$$

4. Continuitat (discontinuitats, asímptotes verticals)

Definició (Asímtotes verticals)

c és una **asímtota vertical** de $f \iff \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$ i/o $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$. (Si només un dels dos límits laterals és infinit, parlem d'asímtota vertical per la dreta o l'esquerra, segons el cas.)

Exemple ($f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$. (Veure figura pàg. anterior))

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \implies f$ té una **asímtota vertical per la dreta en 2 i una per l'esquerra en -2**.

Exemple ($f(x) = e^{1/x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

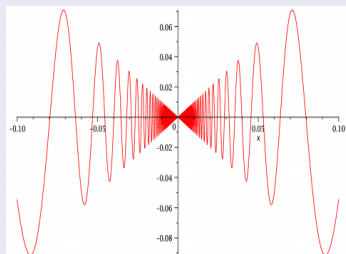
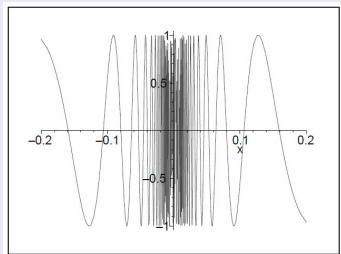
$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0 \implies f$ té una **asímt. vertical per la dreta en 0 i admet extensió contínua per l'esquerra en 0**.

Exemple ($f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \implies f$ té una **discontinuitat de salt** en 0. (Vegeu la seva gràfica a la pàgina següent.)

Exemple ($f(x) = \sin(1/x)$, $g(x) = x \sin(1/x)$)

- $D_f = D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x) \implies f$ té una **discontinuitat asimptòtica** en 0.
- $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0 \implies g$ té una **discontinuitat evitable** en 0.



(Esquerra: gràfica de $y = \sin(1/x)$; Dreta: gràfica de $y = x \sin(1/x)$.)

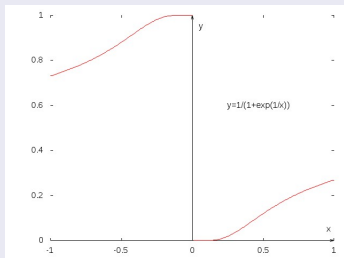
5. Derivabilitat (creixement, decreix., punts crítics, extrems)

Exemple ($f(x) = |x|$ funció contínua en tot $\mathbb{R}$)

$f'(0^+) = 1$, $f'(0^-) = -1 \implies f$ contínua però no derivable en 0 $\implies$ 0 és **punt crític** de f . (De fet és el seu mínim absolut.)

Exemple ($f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$, $f'(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2(1+e^{1/x})^2}$, si $x \neq 0$)

$f(0^+) = 0$, $f(0^-) = 1$, $f'(0^+) = 0$, $f'(0^-) = 0 \implies f$ té discontinuïtat de salt en 0 però $\exists$ els límits laterals de f' en 0 (**punt crític** de f).



Exemple ($f(x) = \sqrt{x}$, contínua si $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$)

$f'(0^+) = +\infty \implies f$ té pendent infinita per la dreta.

Exemple ($f(x) = x - e^{-x}$, $f'(x) = 1 + e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

- $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \implies f$ és estrictament creixent en tot $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \implies f$ té exactament un zero.
- $f(0) = -1$, $f(1) = 1 - 1/e > 0 \implies$ per Bolzano podem afirmar que el zero pertany a l'interval $(0, 1)$. (Vegeu gràfica a la pàgina següent.)

Exemple ($g(x) = x^3 - x$, $g'(x) = 3x^2 - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

- $g(x) = x(x-1)(x+1) = 0 \iff x \in \{-1, 0, 1\}$ (zeros de g).
- $g'(x) = 3(x - \frac{1}{\sqrt{3}})(x + \frac{1}{\sqrt{3}}) = 0 \iff x = \pm 1/\sqrt{3}$ (punts crítics).
- $g'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, +\infty)$ (estrict. creixent).
- $g'(x) < 0$ si $x \in (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ (estrictament decreixent).

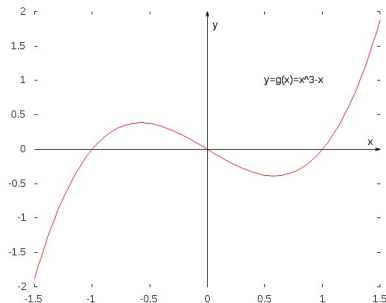
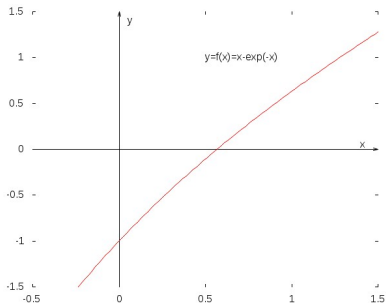
6. Derivada segona (concavitat, convexitat, punts d'inflexió)

Exemple ($f(x) = x - e^{-x}$, $f''(x) = -e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

$f''(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \implies f$ és **concava** $\cap$ en tot $\mathbb{R}$

Exemple ($g(x) = x^3 - x$, $g''(x) = 6x$, $g'''(x) = 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

- $g''(x) = 0 \iff x = 0$ i $g'''(0) \neq 0$: 0 (única) **punt d'inflexió** de g .
- $g'(x) > 0$ si $x > 0 \implies g$ **convexa** $\cup$ si $x > 0$.
- $g'(x) < 0$ si $x < 0 \implies g$ **concava** $\cap$ si $x < 0$.



Mètode de la bisecció per aproximar zeros de funcions

• Configuració inicial del mètode de la bisecció:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funció contínua verificant $f(a) \cdot f(b) < 0$
(per Bolzano f té **almenys** un zero α en l'interval (a, b))

• Un pas del mètode de la bisecció:

Calculem $c = \frac{a+b}{2}$ punt mig de l'interval $[a, b]$ i avaluem $f(c)$

- **Cas 1:** $f(c) = 0$ llavors $\alpha = c$ és un zero de f Fi!!!
- **Cas 2:** $\text{sgn}(f(c)) = \text{sgn}(f(a)) \implies f$ canvia de signe en $[c, b]$

Nova **configuració inicial:** $f : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ amb $f(c) \cdot f(b) < 0$

- **Cas 3:** $\text{sgn}(f(c)) = \text{sgn}(f(b)) \implies f$ canvia de signe en $[a, c]$

Nova **configuració inicial:** $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ amb $f(a) \cdot f(c) < 0$

• Apliquem un altre pas del mètode a la nova configuració inicial:

Pel T^a de Bolzano, $f(x)$ té almenys un zero en el nou interval ($[c, b]$ en el **Cas 2**; $[a, c]$ en el **Cas 3**). Calculem ara el punt mig d'aquest nou interval i repetim el procés anterior. Etcètera.

- *Després de cada pas del mètode de la bisecció, és **dividideix per dos** el tamany de l'interval que conté el zero α .*

Després de n passos el tamany de l'interval és $\frac{b-a}{2^n}$.

- **Avantatge:** *El mètode de la bisecció funciona sempre.*
- **Inconvenient:** *És un mètode molt lent! Si volem calcular α amb un error més petit que ε hem de fer n passos per tal que:*

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \iff 2^n > \frac{b-a}{\varepsilon} \iff n > \frac{\ln((b-a)/\varepsilon)}{\ln(2)}$$

- *Si volem p xifres decimals correctes, arrodonint a la xifra decimal p , cal triar $\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-p}$. Per tant, cal fer n passos del mètode amb:*

$$n > \frac{\ln(2 \cdot 10^p \times (b-a))}{\ln(2)}$$

- *Si volem p xifres decimals correctes **per truncament** (sense arrodonir la xifra decimal p), llavors cal triar $\varepsilon = 10^{-(p+1)}$.*

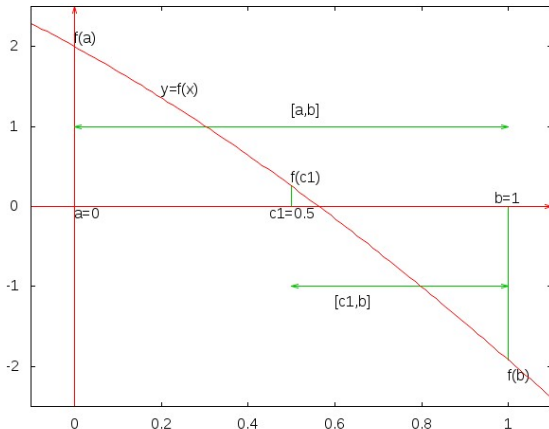
Exemple ($f(x) = 2 \cos(x) - 3x$)

Useu el mètode de la bisecció per calcular una aproximació numèrica del zero de $f(x)$ en l'interval $[a, b] = [0, 1]$ amb una precisió de dues xifres decimals exactes (per arrodoniment).

- f és contínua en tot $\mathbb{R}$.
- $f(0) = 2 > 0$ & $f(1) = 2 \cos(1) - 3 \simeq -1.92 < 0$
- f té almenys un canvi de signe en $[0, 1]$ i per Bolzano té almenys un zero en $[0, 1]$.
(De fet, $f'(x) = -2 \sin(x) - 3 \leq -1 < 0$ i f és decreixent en tot $\mathbb{R}$ i per tant com a molt f pot tenir un zero.)
- Si volem calcular el zero amb el mètode de la bisecció amb $p = 2$ xifres decimals correctes per arrodoniment cal fer n passos de manera que l'interval final tingui tamany menor que $\varepsilon = \frac{1}{2} 10^{-p}$:

$$n > \frac{\ln(2 \cdot 10^p \times (b - a))}{\ln(2)} = \frac{\ln(2 \cdot 10^2 \times (1 - 0))}{\ln(2)} \simeq 7.64$$

Cal fer almenys $n = 8$ passos. Fem en detall els dos primers.

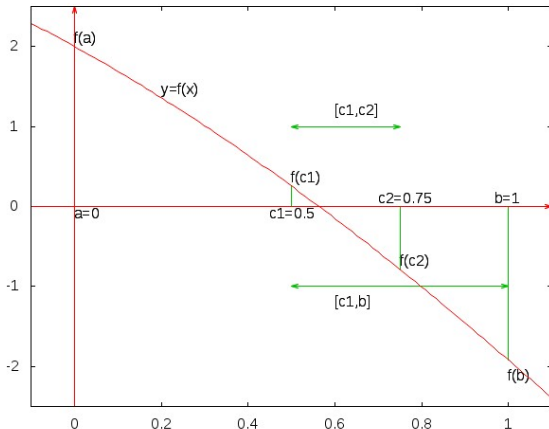


• **Pas 1 mètode bisecció:** L'interval inicial és $[a, b] = [0, 1]$

• $a = 0 \implies f(a) = 2 > 0, \quad b = 1 \implies f(1) \simeq -1.92 < 0$

• $c_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5 \implies f(c_1) \simeq 0.26 > 0$

• $\text{sgn}(f(c_1)) = \text{sgn}(f(a)) \implies$ el nou interval és $[c_1, b] = [0.5, 1]$



• **Pas 2 mètode bisecció:** Ara l'interval és $[c_1, b] = [0.5, 1]$

• $c_1 = 0.5 \implies f(c_1) \simeq 0.26 > 0, \quad b = 1 \implies f(1) \simeq -1.92 < 0$

• $c_2 = \frac{c_1 + b}{2} = \frac{0.5 + 1}{2} = 0.75 \implies f(c_2) \simeq -0.79 < 0$

• $\text{sgn}(f(c_2)) = \text{sgn}(f(b)) \implies$ nou interval $[c_1, c_2] = [0.5, 0.75]$

Mostrem l'aplicació iterativa del mètode de la bisecció a la funció $f(x) = 2 \cos(x) - 3x$ en $[0, 1]$, fins un total de $n = 8$ iteracions. En cada fila, $c = \frac{a+b}{2}$ indica el valor mig dels dos extrems de l'interval $[a, b]$ que estem considerant en el pas n .

n	a	$f(a)$	b	$f(b)$	c	$f(c)$
0	0	2	1	-1.9194	0.5	0.2552
1	0.5	0.2552	1	-1.9194	0.75	-0.7866
2	0.5	0.2552	0.75	-0.7866	0.625	-0.2531
3	0.5	0.2552	0.625	-0.2531	0.5625	0.0043
4	0.5625	0.0043	0.625	-0.2531	0.5938	-0.1236
5	0.5625	0.0043	0.5938	-0.1236	0.5781	-0.0594
6	0.5625	0.0043	0.5781	-0.0594	0.5703	-0.0275
7	0.5625	0.0043	0.5703	-0.0275	0.5664	-0.0275
8	0.5625	0.0043	0.5664	-0.0275		

La diferència entre els dos darrers valors de $a = 0.5625$ i $b = 0.5664$ calculats és $b - a \approx 0.0039 < \frac{1}{2} 10^{-2} = 0.005$.

Mètode de la secant per aproximar zeros de funcions

- **Configuració inicial del mètode de la secant:**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funció contínua que suposem té un zero $\alpha \in [a, b]$.

Siguin $x_0, x_1 \in [a, b]$ dos punts donats que suposem són propers a α .

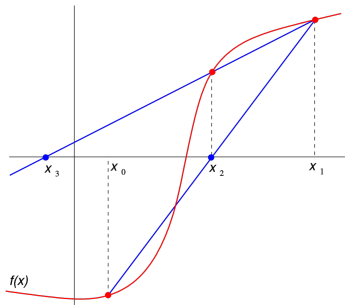
- No cal que siguin $x_0 = a$ ni $x_1 = b$. Tampoc cal que es verifiqui $x_0 < x_1$ ni que $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$ (no cal doncs que $f(x)$ tingui cap canvi de signe entre x_0 i x_1).
- “Entenem” que x_1 és “més proper” a α que no pas x_0 .

- **Primer pas del mètode de la secant:** $(x_0, x_1) \mapsto (x_1, x_2)$.

Calculem la recta r que connecta els punts $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$ i busquem el punt de tall de r amb l'eix x . El valor de la coordenada x d'aquest tall defineix el nou valor x_2 del mètode. La nova configuració del mètode de la secant és la donada per la parella x_1, x_2 .

- **Segon pas del mètode de la secant:** $(x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_3)$.

x_3 donat pel tall de la recta que uneix $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$. Etcètera.



- **Pas general del mètode de la secant:** $(x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n+1})$.
La recta r que connecta els punts $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ i $(x_n, f(x_n))$ és:

$$y = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (x - x_n).$$

(r és la recta que interpola la funció $f(x)$ en els punts x_{n-1} i x_n).
Tallem r amb l'eix x fent $y = 0$ i definim x_{n+1} com el valor x del tall:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

- Si la parella x_0, x_1 és “prou propera” a un zero α de $f(x)$, i aquest zero és simple, en general el mètode de la secant aproxima força ràpidament α . Molt més ràpidament que el mètode de la bisecció.
- És difícil dir quin error fem si aproximem α per x_n . Usualment, “s’estima” aquest error a partir de la diferència $|x_n - x_{n-1}|$.
- Si inicialment triem x_0, x_1 tals que $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$, res garanteix que la nova parella x_1, x_2 compleixi $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. Si ho compleix, res garanteix que això sigui sempre cert quan iterem el mètode. (P. ex., en el dibuix de la pàgina anterior, $f(x)$ té un canvi de signe entre x_0 i x_1 , però $f(x_1) > 0$ i $f(x_2) > 0$.)
- Hi ha una versió modificada del mètode de la secant, anomenada **Regula Falsi**, en que triem la parella x_0, x_1 tal que $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$ i, un cop calculat x_2 , triem x_1, x_2 només si $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, però triem x_0, x_2 si $f(x_0) \cdot f(x_2) < 0$ (p. ex., en el dibuix de la pàgina anterior, el primer pas del mètode de la Regula Falsi és $(x_0, x_1) \mapsto (x_0, x_2)$).
 - Part bona Regula Falsi: Sempre controlem l’interval on està α .
 - Part dolenta Regula Falsi: Hi ha molts exemples on un dels punts esdevé “estàtic” en iterar el mètode (no canvia mai). En aquests casos, el mètode és tant lent com el de la bisecció.

Exemple ($f(x) = 2 \cos(x) - 3x$)

$f(x)$ té un únic zero $\alpha \in [0, 1]$. Useu mètode de la secant per calcular una aproximació numèrica de α . Itereu fins saturar l'aritmètica de doble pressió (aproximadament 16 xifres decimals correctes).

- **Pas 1 mètode secant triant** $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$:

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) \approx 1 - \frac{1 - 0}{-1.91939539 - 2} \approx 0.51028279.$$

- **Aplicació iterativa del mètode:**

n	x_n	$f(x_n)$
0	0.0000000000000000	2.0000000000000000
1	1.0000000000000000	-1.919395388263720
2	0.510282786469776	0.214364486253517
3	0.559481377249191	0.016616832863047
4	0.563615559101983	-0.000188592629508
5	0.563569164785646	0.000000160457705
6	0.563569204225136	0.000000000001545
7	0.56356920422516	0.000000000000000
8	0.56356920422516	0.000000000000000

Mètode de Newton per aproximar zeros de funcions

- **Configuració inicial del mètode de Newton:**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funció **derivable** que suposem té un zero $\alpha \in [a, b]$.
Sigui $x_0 \in [a, b]$ un punt donat que suposem proper a α .

- **Primer pas del mètode de Newton:** $x_0 \mapsto x_1$.

Calculem r recta **tangent** a la gràfica de $y = f(x)$ en el punt $x = x_0$.
Definim x_1 com el punt de tall de r amb l'eix x .

- **Segon pas del mètode de Newton:** $x_1 \mapsto x_2$.

x_2 tall de la recta tangent a $y = f(x)$ en el punt $x = x_1$. Etcètera.

- **Pas general del mètode de Newton:** $x_n \mapsto x_{n+1}$.

La recta r tangent a $y = f(x)$ en el punt $x = x_n$ és:

$$y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n).$$

Tallem r amb l'eix x fent $y = 0$ i definim x_{n+1} com el valor x del tall:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

- La convergència del mètode de Newton per calcular zeros simples de $f(x)$ és **quadràtica**: el nombre de xifres decimals correctes de α que té x_{n+1} és (bàsicament) el doble de les que tenia x_n .

Exemple ($f(x) = 2 \cos(x) - 3x \implies f'(x) = -2 \sin(x) - 3$)

$f(x)$ té un únic zero $\alpha \in [0, 1]$. Useu el mètode de Newton per calcular una aproximació numèrica de α . Itereu fins saturar l'aritmètica de doble pressió (aproximadament 16 xifres decimals correctes).

• **Pas 1 mètode de Newton triant $x_0 = 0$:**

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{2}{-3} = \frac{2}{3} \approx 0.666666666666667.$$

• **Aplicació iterativa del mètode:**

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	0.0000000000000000	2.0000000000000000	-3.0000000000000000
1	0.6666666666666667	-0.428225478446104	-4.2367396061395
2	0.565592369387324	-0.008234531523349	-4.0718320609492
3	0.563570053289782	-0.000003454345275	-4.0684151046742
4	0.563569204225665	-0.0000000000000610	-4.0684136691554
5	0.563569204225516	-0.0000000000000000	-4.0684136691552

Funcions reals/escalars de dues variables

- En aquest bloc considerem funcions de 2 variables la forma següent:

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto f(x,y)$$

- Suposarem que $f(x, y)$ és contínua en el domini $D \subset \mathbb{R}^2$ i que les funcions **derivades parcials** $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ estan definides $\forall (x, y) \in D$ i també són funcions contínues.

- Recordem que si $(a, b) \in D$, llavors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}. \end{aligned}$$

- Definim el **vector gradient** de $f(x, y)$ en un punt com el vector de les seves derivades parcials en el punt:

$$\text{grad}(f)(x, y) = \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right).$$

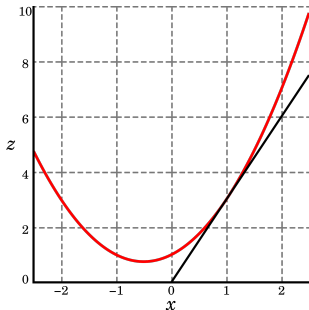
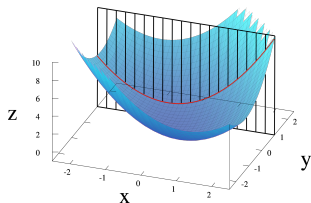
Exemple (Càlcul derivades parcials d'una funció en un punt)

Donada $f(x, y) = x^2 + x y + y^2$, usem la definició de derivada parcial:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h, 1) - f(1, 1)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1 + h)^2 + (1 + h) \cdot 1 + 1^2] - 3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3 + h) = 3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, 1 + h) - f(1, 1)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1^2 + 1 \cdot (1 + h) + (1 + h)^2] - 3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3 + h) = 3.\end{aligned}$$

$$\nabla f(1, 1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \right) = (3, 3).$$



• **Interpretació geomètrica del valor $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 3$ calculat:**

- En la figura de l'esquerra tenim la gràfica (superfície) de la funció $z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ considerada.
- Si tallem aquesta gràfica pel pla (vertical) $y = 1$, obtenim la corba plana de la figura de la dreta, que és la gràfica de la funció d'una variable $z = g(x) = f(x, 1) = x^2 + 2x + 1$.
- El valor $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 3$ dóna la pendent d'aquesta gràfica secció

en el punt $x = 1$: $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = g'(1) = (2x + 2)|_{x=1} = 3$.

• **Càlcul efectiu de les derivades parcials d'una funció $f(x, y)$:**

A efectes pràctics, el càlcul de les derivades parcials no el fem usant la definició, sinó interpretant que una de les variables és de fet una constant i derivant la funció resultant (ara d'una variable) respecte de l'altre variable. D'aquesta forma obtenim les corresponents **funcions derivades parcials** $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Després (si així s'escau) les podem avaluar en el punt que pertorqui.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \equiv$ considerem y constant i derivem respecte de x .
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \equiv$ considerem x constant i derivem respecte de y .

Exemple

Per $f(x, y) = x^2 + x y + y^2$ obtenim tenim les següents funcions:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y,$$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x + y, x + 2y).$$

- Donat un punt $a = (a_1, a_2) \in D$ i un vector $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ **unitari** (amb $v_1^2 + v_2^2 = 1$), definim la **derivada direccional** de la funció $f(x, y)$ en el punt a i en la direcció del vector $\vec{v}$ com:

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}f(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h \cdot \vec{v}) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h \cdot v_1, a_2 + h \cdot v_2) - f(a_1, a_2)}{h}. \end{aligned}$$

- Si les funcions derivades parcials de $f(x, y)$ són contínues en el punt a , llavors podem usar la **fórmula del gradient** pel càlcul de les derivades direccionals de $f(x, y)$ en a :

$$D_{\vec{v}}f(a) = \langle \nabla f(a), \vec{v} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot v_2.$$

- També podem introduir les **derivades d'una funció en un punt respecte d'un vector** per vectors $\vec{v}$ de longitud qualsevol. Però només parlem de derivades direccionals si el vector és unitari. La fórmula del gradient val igualment pel càlcul de les derivades d'una funció respecte d'un vector no unitari.

Derivada direccional

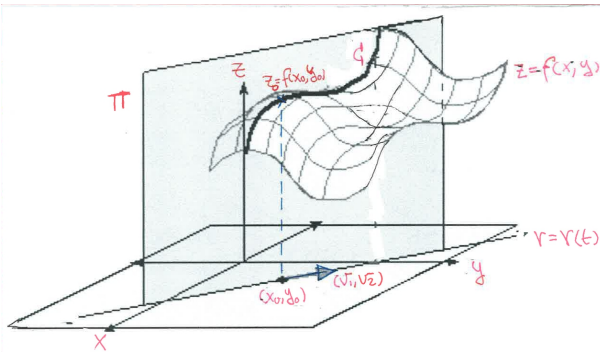
$$f(x, y) = x^y = (e^{\ln x})^y = e^{y \ln x}, \quad a = (e, 1), \quad \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{y \ln x} \cdot \frac{y}{x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{y \ln x} \cdot \ln x = x^y \ln x,$$

$$\nabla f(e, 1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(e, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(e, 1) \right) = (1, e)$$

Llavors:

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(e, 1) &= \langle \nabla f(e, 1), \vec{v} \rangle \\ &= \left\langle (1, e), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle \\ &= 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + e \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1 - e}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$



Interpretació derivades direccionals. Una formiga camina sobre la superfície determinada per la gràfica $z = f(x, y)$ de la funció $f(x, y)$ (que podem visualitzar com el perfil d'una muntanya) i és en el punt $p = (x_0, y_0, z_0)$, on $z_0 = f(x_0, y_0)$. La formiga vol desplaçar-se en la direcció determinada pel vector pla unitari $\vec{v} = (v_1, v_2)$, seguint el camí (corba) determinat per la intersecció de la superfície amb el pla vertical $\Pi = p + [\vec{v}, (0, 0, 1)]$. Llavors, la **pendent instantània** a la que s'enfonsa és la donada per la derivada direccional $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$.

- Suposem que $\nabla f(a) \neq (0, 0)$ i definim $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)^2}} \quad (\text{vector gradient normalitzat}),$$

- La direcció de **màxim creixement** de $f(x, y)$ en el punt a és la donada pel vector $\vec{u}$. A més, $D_{\vec{u}}f(a) = \|\nabla f(a)\|$ (la pendent màxima és doncs la **norma/longitud** del vector gradient).
- La direcció de **màxim decreixement** de $f(x, y)$ en el punt a és la donada pel vector $-\vec{u}$. A més, $D_{-\vec{u}}f(a) = -\|\nabla f(a)\|$.
- Sigui $\vec{v} = \pm(u_2, -u_1)$ (vector unitari perpendicular a $\vec{u}$). Llavors, $D_{\vec{v}}f(a) = 0$ ($\vec{v}$ direcció de derivada direccional nula).
- De fet, $\vec{v}$ és un vector **tangent** a la **corba de nivell** $C_{f(a)}$ de la funció $f(x, y)$ que passa pel punt a o, equivalentment, el vector gradient $\nabla f(a)$ és un vector perpendicular a la corba de nivell $C_{f(a)}$ en el punt a .

Exemple (Derivades direccionals màximes, mínimes i zero)

$$f(x, y) = x^y, \quad (x_0, y_0) = (e, 1), \quad f(e, 1) = e, \quad \nabla f(e, 1) = (1, e)$$

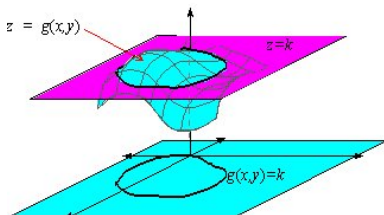
$$\vec{u} = \frac{\nabla f(e, 1)}{\|\nabla f(e, 1)\|} = \frac{(1, e)}{\sqrt{1 + e^2}} \quad (\text{vector gradient normalitzat})$$

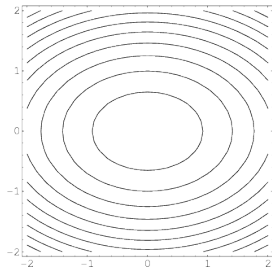
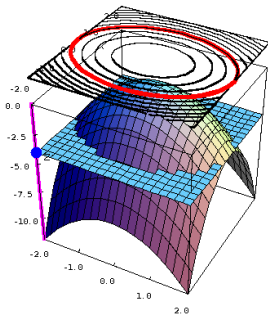
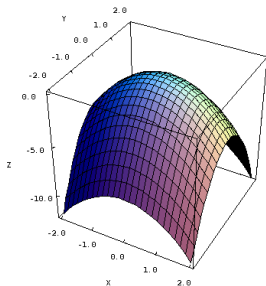
- $\vec{u}$ dóna la direcció de màxima pendent de $f(x, y)$ en el punt $(x_0, y_0) = (e, 1)$ i el valor de la pendent màxima és $\sqrt{1 + e^2}$.
- $-\vec{u}$ dóna la direcció de mínima pendent de $f(x, y)$ en el punt $(x_0, y_0) = (e, 1)$ i el valor de la pendent mínima és $-\sqrt{1 + e^2}$.
- $\vec{u}$ és un vector perpendicular a la corba de nivell C_e en el punt $(x_0, y_0) = (e, 1)$.
- $\vec{v} = \pm \frac{(e, -1)}{\sqrt{1 + e^2}}$ vectors unitaris tangents a la corba de nivell C_e en el punt $(x_0, y_0) = (e, 1)$.

- Donat un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, la **corba de nivell d'alçada** λ de la funció $f(x, y)$ és el lloc geomètric dels punts $(x, y) \in D$ als quals la funció assigna el valor λ :

$$C_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in D \text{ i } f(x, y) = \lambda\}$$

- La corba de nivell s'obté tallant la superfície $z = f(x, y)$ definida per la gràfica de la funció pel pla $z = \lambda$ de l'alçada triada i projectant la corba obtinguda en el pla (x, y) .
- En la figura veiem la corba de nivell $C_k = \{g(x, y) = k\}$ per la funció de gràfica $z = g(x, y)$ que obtenim tallant pel pla $z = k$.





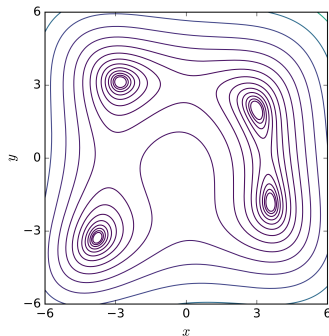
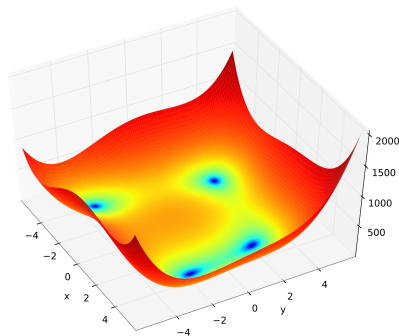
Exemple ($f(x, y) = -x^2 - 2y^2$ (paraboloide el·liptic))

La corba de nivell C_λ de f només té sentit per $\lambda \leq 0$ i ve donada per l'el·lipse de centre $(0, 0)$ i semi-eixos $a = \sqrt{|\lambda|}$ i $b = \sqrt{|\lambda|/2}$:

$$-x^2 - 2y^2 = \lambda \iff x^2 + 2y^2 = |\lambda| \iff \frac{x^2}{(\sqrt{|\lambda|})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{|\lambda|/2})^2} = 1.$$

El mapa de corbes de nivell de f està format per el·lipses concèntriques entorn del $(0, 0)$. (En particular, $C_0 = \{(0, 0)\}$.)

Exemple corbes de nivell d'una funció



Considereu la funció de Himmelblau:

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2.$$

- Figura de l'esquerra: Gràfica $z = f(x, y)$.
- Figura de la dreta: Corbes de nivell de la funció $f(x, y)$.

Exemple (Perfil muntanya (I))

El perfil d'una certa muntanya es modela mitjançant la funció:

$$h(x, y) = 5000 - 0.01 x^2 - 0.02 y^2 \quad (\text{unitats en metres}),$$

on, si (x, y) és un punt del pla imaginari (al nivell del mar) que defineix la base de la muntanya, llavors $z = h(x, y)$ ens dona la corresponent alçada. Suposem que un muntanyer es troba en el punt determinat per les coordenades $(x, y) = (10, 10)$ de la base. La seva altura actual és $z = h(10, 10) = 4997$ i, per tant, en ser l'altura de la muntanya 5000 m, el muntanyer és apunt de fer el cim. Suposem que el muntanyer tria la seva direcció de moviment en termes d'un mapa (en el pla $x y$) de corbes de nivell de la funció h . Per tant, el seu moviment queda determinat per la tria d'un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ unitari en aquest pla.

❶ *Quina pendent afronta si es mou en la direcció d'un cert vector $\vec{v}$?*

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -0.02 x, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -0.04 y, \quad \nabla h(10, 10) = 2 \cdot 10^{-1} (-1, -2).$$

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} h(10, 10) &= \langle \nabla h(10, 10), \vec{v} \rangle = -2 \cdot 10^{-1} \cdot \langle (1, 2), (v_1, v_2) \rangle \\ &= -2 \cdot 10^{-1} (v_1 + 2 v_2). \end{aligned}$$

Exemple (Perfil muntanya (II))

- 2 Quin pendent afrontem d'entrada si la direcció inicial de moviment és la donada pel vector $\vec{v} = \frac{(-1, -1)}{\sqrt{2}}$ apuntant cap al cim?

$$D_{\vec{v}}h(10, 10) = -2 \cdot 10^{-1} (v_1 + 2 v_2) = -2 \cdot 10^{-1} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

- 3 Si el que volem és pujar el més ràpidament possible digueu quina és la direcció $\vec{v}$ en la que ens hem de moure inicialment?
El natural és triar la direcció de màxim pendent en el punt (10, 10) en que ens trobem, donada pel vector gradient normalitzat.

$$\nabla h(10, 10) = -2 \cdot 10^{-1} (1, 2),$$

$$\vec{v} = \frac{\nabla h(10, 10)}{\|\nabla h(10, 10)\|} = -\frac{(1, 2)}{\|(1, 2)\|} = -\frac{(1, 2)}{\sqrt{5}}.$$

La pendent que afrontem inicialment si triem la direcció de màxim pendent és: $D_{\vec{v}}h(10, 10) = \|\nabla h(10, 10)\| = 2 \cdot 10^{-1} \cdot \sqrt{5}.$

Exemple (Perfil muntanya (III))

- 4 Quina direcció inicial $\vec{v} = (v_1, v_2)$ hem de triar si volem que el pendent inicial sigui del 40%?

Volem $\vec{v} = (v_1, v_2)$ unitari t.q. $D_{\vec{v}}h(10, 10) = \frac{40}{100} = 4 \cdot 10^{-1}$. Cal:

$$4 \cdot 10^{-1} = D_{\vec{v}}h(10, 10) = -2 \cdot 10^{-1} (v_1 + 2 v_2) \implies \boxed{v_1 + 2 v_2 = -2},$$

$$i, a \text{ més, } \|\vec{v}\| = 1 \implies \boxed{v_1^2 + v_2^2 = 1}. \text{ Fent } \boxed{v_1 = -(2 + 2 v_2)}:$$

$$1 = v_1^2 + v_2^2 = (2 + 2 v_2)^2 + v_2^2 = 4 + 8 v_2 + 5 v_2^2 \implies \boxed{5 v_2^2 + 8 v_2 + 3 = 0}.$$

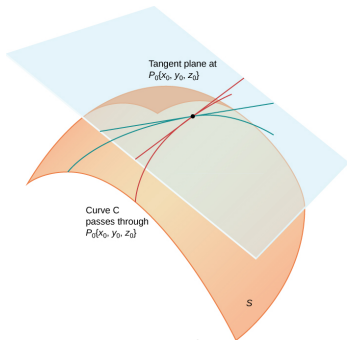
Obtenim dues solucions: $\vec{v} = -\frac{(4, 3)}{5}$, $\vec{v} = (0, -1)$. En efecte:

$$v_2 = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{10} = \frac{-8 \pm 2}{10} = \begin{cases} \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \implies v_1 = -\frac{4}{5}, \\ \frac{-10}{10} = -1 \implies v_1 = 0. \end{cases}$$

Exemple (Perfil muntanya (IV))

- 5 Quina direcció inicial $\vec{v} = (v_1, v_2)$ cal triar si volem “circumval·lar” la muntanya, i. e., mantenir l’altura inicial sense pujar ni baixar?
- Cal triar $\vec{v}$ paral·lel a la corba de nivell $C_{h(10,10)} = C_{4997}$ de $h(x, y)$ que passa pel punt $(x, y) = (10, 10)$ en que ens trobem. (Les corbes de nivell de $h(x, y)$ són el·lipse centrades en $(0, 0)$.)
 - El vector gradient $\nabla h(10, 10) = -2 \cdot 10^{-1} \cdot (1, 2)$ defineix un vector perpendicular a C_{4997} en $(10, 10)$.
 - Les dues direccions donades pels vectors unitaris ortogonals a $\nabla h(10, 10)$ són doncs paral·leles a C_{4997} en $(10, 10)$.
 - Si normalitzem el vector gradient, obtenim el vector $\frac{(-1, -2)}{\sqrt{5}}$.
- Per tant, les dues direccions buscades són:

$$\vec{v} = \frac{(2, -1)}{\sqrt{5}} \quad i \quad \vec{v} = \frac{(-2, 1)}{\sqrt{5}}$$



- Denotem per $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$, la superfície de $\mathbb{R}^3$ definida per la gràfica d'una funció real de dues variables $f(x, y)$. Considerem un punt $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$, on $(x_0, y_0) \in D$ i $z_0 = f(x_0, y_0)$. Si $f(x, y)$ i les seves derivades parcials $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ són funcions contínues en p_0 , té sentit parlar del **pla tangent a la superfície** S en el punt p_0 , que denotem per T_{p_0} . L'equació implícita d'aquest pla és:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Pla tangent a la gràfica de la funció $f(x, y) = x^y$ en un punt p_0

$$(x_0, y_0) = (e, 1), \quad z_0 = f(x_0, y_0) = e, \quad p_0 = (x_0, y_0, z_0) = (e, 1, e),$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(e, 1) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(e, 1) = e.$$

El pla tangent a la superfície S definida per la gràfica $z = f(x, y)$, en el punt $p_0 = (e, 1, e)$, té per equació:

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= f(e, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(e, 1)(x - e) + \frac{\partial f}{\partial y}(e, 1)(y - 1) \\ &= e + 1 \cdot (x - e) + e \cdot (y - 1) \\ &= -e + x + ey. \end{aligned}$$