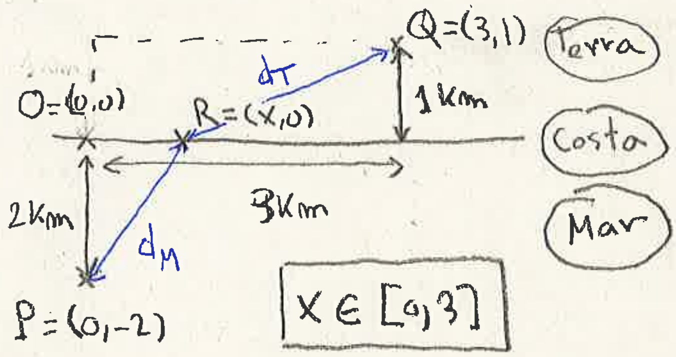
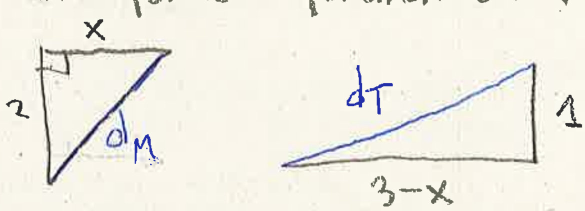
(49) Un home es troba en una barca a rems en el punt P a 2 Km del punt més proper a la costa, E i es dirigeix al punt Q que es troba a 3 Km per la costa i a 1 Km terra endins. L'home pot remar a 2 km/h i caminar a 4 Km/h. A quin punt R de la costa ha de remar per arribar al punt Q en el menor temps possible?



$d_M = \sqrt{x^2+2^2}$ distància que recorre per mar per anar de P a Q

$d_T = \sqrt{(3-x)^2+1^2}$ distància que recorre per terra per anar de Q a R



Atenent a les diferents velocitats, el temps per anar de P a Q, en funció del $x \in [0,3]$ triat és:

$$t(x) = \frac{d_M(x)}{2} + \frac{d_T(x)}{4} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{\sqrt{(3-x)^2+1}}{4}$$ funció contínua i derivable $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$t'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{(3-x)}{2\sqrt{(3-x)^2+1}}\right], \quad x \in [0,3]$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \underbrace{\frac{3-x}{2\sqrt{(3-x)^2+1}}}_{\geq 0 \text{ si } x\in[0,3]} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2+4} = \frac{(3-x)^2}{4((3-x)^2+1)} \Leftrightarrow$$

elevem al quadrat

$$\Leftrightarrow 4x^2[(3-x)^2+1] = (3-x)^2(x^2+4)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2[x^2-6x+10] = (x^2-6x+9)(x^2+4)$$

$$\Leftrightarrow 3f(x) = 0 \text{ on } f(x) = x^4-6x^3+9x^2+8x-12$$

clarament $f(1) = 0 \Rightarrow t'(1) = 0$

Per Ruffini: $f(x) = (x-1)g(x)$ on $g(x) = x^3-5x^2+4x+12$

	1	-6	9	8	-12
1		1	-5	4	12
	1	-5	4	12	0

Complexe: $g(0) = 12$, $g(3) = 6$

$g'(x) = 3x^2-10x+4$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{6} = x_+, x_-$

on $x_+ \simeq 2.8685$, $x_- \simeq 0.4648$

1/2

Els dos punts on $g'(x)=0$ són en $[0,3]$. Com $g'(0)=12>0$, això vol dir que entre $[0,x_-]$ $g(x)$ creix, entre $[x_-,x_+]$ decreix i després entre $[x_+,3]$ torna a creixer. En conseqüència, el seu mínim absolut en $[0,3]$ és $g(x_+)\simeq 5{,}9354>0$. Així doncs, $g(x)>0$ $\forall x\in[0,3]$ i per tant, $x=1$ és l'únic punt on $t'(x)=0$ per $x\in[0,3]$.

Clarament doncs, el valor de x solució (que és el que minimitza $t(x)$ en $[0,3]$), s'obté avaluant $t(x)$ en els tres punts candidats: $x=0$, $x=1$, $x=3$

extrems interval

$$t(0)=1+\frac{\sqrt{10}}{4}\simeq 1.7906\ h$$

$$t(1)=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{4}\simeq 1.6771\ h \leftarrow \boxed{R=(1,0)\ \text{punt solució}}$$

$$t(3)=\frac{\sqrt{12}}{2}+\frac{1}{4}\simeq 1.9821\ h$$