42 Doneu una cota superior de l'error en les evaluacions següents:

(a) $\cos(0.3) \approx 1 - \frac{(0.3)^2}{2!} + \frac{(0.3)^4}{4!}$

Polinomi de Taylor del $\cos(x)$ en $c=0$ fins termes de grau 4:

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x)$ on $R_4(x) = \frac{(\cos)^{(V)}(z)}{5!} x^5$ i

z està entre 0 i x. Usant que $|(\cos)^{(V)}(z)| = |-\sin(z)| \leq 1$

i fent $x = 0.3$, obtenim que $|R_4(0.3)| \leq \frac{(0.3)^5}{5!} = \frac{3^5 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2.025 \cdot 10^{-5}$

Per tant:

$$\Big|\underbrace{\cos(0.3)}_{\substack{\text{SI} \\ 0.9553365}} - \underbrace{\left(1 - \frac{(0.3)^2}{2!} + \frac{(0.3)^4}{4!}\right)}_{\substack{\text{SI} \\ 0.9553375}}\Big| = |R_4(0.3)| \leq 2.025 \cdot 10^{-5}$$

← diferencia real $\simeq 1.01 \cdot 10^{-6}$

(b) $e \simeq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$

Polinomi de Taylor de e^x en $c=0$ fins termes de grau 5:

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + R_5(x)$ on $R_5(x) = \frac{e^z}{6!} x^6$ i

z està entre 0 i x (usem que $\frac{d^6(e^x)}{dx^6} = e^x$).

Llavors, fent $x = 1$ i usant que $0 < z < 1$ i que $e \leq 3$,

obtenim: $|R_5(1)| \leq \frac{3 \cdot 1^6}{6!} \simeq 4.1667 \cdot 10^{-3}$. Per tant:

$$\Big|\underbrace{e}_{\substack{\text{SI} \\ 2.718281 3}} - \underbrace{\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}\right)}_{\substack{\text{SI} \\ 2.7166667}}\Big| = |R_5(1)| \leq 4.17 \cdot 10^{-3}$$

← diferencia real $\simeq 1.6 \cdot 10^{-3}$