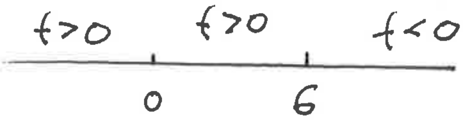
$\boxed{35\ (l)}$ Feu un estudi complet de la gràfica de la funció

$$y = f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3} = (6x^2 - x^3)^{1/3} = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$$

- Domini := $\mathbb{R}$ i f és contínua en tot $\mathbb{R}$.
- Talls amb els eixos:



  - Eix y: $(0, f(0)) = (0,0)$
  - Eix x: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(6-x) = 0$

  obtenim $(0,0)$ i $(6,0)$.

- Límits a l'infinit: f té 2 asímptotes obliqües, una a $+\infty$ i un altre a $-\infty$.
  - Asímptota oblíqua a $+\infty$: $y = mx + b = -x + 2$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} = -1.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -x\left(\sqrt[3]{1 - \frac{6}{x}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} -x\left(-\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2$$

on usem que, si z és petit, $\sqrt[3]{1+z} = 1 + \frac{z}{3} + O(z^2)$ tot desenvolupant per Taylor entorn $z=0$. Llavors, fent $z = -\frac{6}{x}$, obtenim $\sqrt[3]{1 - 6/x} = 1 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ si x és gran (i llavors $z = -\frac{6}{x}$ petit)

  - Asímptota oblíqua a $-\infty$: $y = mx + b = -x + 2$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad \text{(ídem)}$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = 2 \quad \text{(ídem)}$$

- Derivada 1a: $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}(6-x)^{1/3}-\frac{1}{3}x^{2/3}(6-x)^{-2/3}$, $x\neq 0,6$.

$f'(0^+)=+\infty$, $f'(0^-)=-\infty$, $f'(6)=-\infty$ $\Rightarrow$ f té pendent infinita en 0 i 6.

- Punts crítics: $\boxed{0,\ 4 \text{ i } 6}$ $f(0)=0,\ f(4)=2\sqrt[3]{4},\ f(6)=0$

$$f'(x)=0 \iff \frac{2}{3}x^{-1/3}(6-x)^{1/3}=\frac{1}{3}x^{2/3}(6-x)^{-2/3}$$

$$\iff 2(6-x)=x \iff 3x=12 \iff x=4$$

$f'<0$		$f'>0$		$f'<0$		$f'<0$
↘	0	↗	4	↘	6	↘

$x=0$ mínim relatiu

$x=4$ màxim relatiu

- Derivada 2a:

$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-4/3}(6-x)^{1/3}-\frac{4}{9}x^{-1/3}(6-x)^{-2/3}-\frac{2}{9}x^{2/3}(6-x)^{-5/3},\ x\neq 0,6.$$

$$f''(x)=0 \underset{\uparrow}{\iff} (6-x)^2+2x(6-x)+x^2=0 \underset{\uparrow}{\iff} [(6-x)+x]^2=0$$

(multipliquem per $x^{4/3}(6-x)^{5/3}$ i treiem els $-2/9$)

(quadrat perfecte)

Obtenim doncs: $f''(x)=0 \iff 6^2=0$ No pot ser!

Els únics possibles punts d'inflexió són $x=0,6$ (on $\nexists f'$).

Escrivint $f''(x)=-8x^{-4/3}(6-x)^{-5/3}$; veiem: $\mathrm{sgn}(f'')=-\mathrm{sgn}(6-x)$

$f''<0$		$f''>0$
$\frown$	6	$\smile$
(còncava)		(convexa)