

35(j) Feu un estudi complet de la gràfica de la funció

$$y = f(x) = x^x = e^{x \ln x}$$

• Domini := $(0, +\infty)$ i f és contínua si $x > 0$.

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^0 = 1$, ja que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Per tant, si fem $f(0) = 1$, llavors f té extensió contínua a 0 .

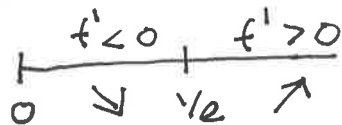
• $f(x) > 0, \forall x \in [0, +\infty)$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (però f no té cap asymptota obliqua a ∞)

• Derivada 1a.: $f'(x) = e^{x \ln x} \cdot (1 + \ln x)$, si $x > 0$.

$f'(0^+) = -\infty \Rightarrow f$ té pendent infinita en 0 .

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = 1/e$ pts crítics: $0, 1/e$



$x = 0$ màxim relatiu $f(0) = 1$
 $x = 1/e$ mínim relatiu $f(1/e) = e^{-1/e}$

• Derivada 2a.: $f''(x) = e^{x \ln x} [(1 + \ln x)^2 + 1/x]$, si $x > 0$.

$f''(x) > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$ és cònvexa en $[0, +\infty)$