$\boxed{35(j)}$ Feu un estudi complet de la gràfica de la funció

$$y = f(x) = x^x = e^{x\ln x}$$

- Domini $:= (0, +\infty)$ i f és contínua si $x > 0$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$, ja que:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Per tant, si fem $f(0) = 1$, llavors f té extensió contínua a 0.

- $f(x) > 0,\ \forall x \in [0, +\infty)$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ (Però f no té cap asímptota obliqua a ∞)

- Derivada 1a.: $f'(x) = e^{x\ln x}\cdot(1+\ln x)$, si $x > 0$.

$f'(0^+) = -\infty \Rightarrow f$ té pendent infinita en 0.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = 1/e$ pts crítics: $0, 1/e$

$f' < 0$, $f' > 0$

$0 \searrow 1/e \nearrow$

$x = 0$ màxim relatiu $f(0) = 1$

$x = 1/e$ mínim relatiu $f(1/e) = e^{-1/e}$

- Derivada 2a.: $f''(x) = e^{x\ln x}\left[(1+\ln x)^2 + 1/x\right]$, si $x > 0$.

$f''(x) > 0,\ \forall x > 0 \Rightarrow f$ és convexa en $[0, +\infty)$