22 Em els casos següents useu la derivada per determinar si la funció $f(x)$ té una funció inversa.

(a) $f(x) = \cos(3x/2)$

Sabem que si f és estrictament monòtona en $[a,b]$, llavors existeix la inversa de f.

- Si f estrict. creixent en $[a,b]$, $f:[a,b] \to [f(a), f(b)]$ i $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a,b]$.
- Si f estrict. decreixent en $[a,b]$, $f:[a,b] \to [f(b), f(a)]$ i $f^{-1}: [f(b), f(a)] \to [a,b]$.

En el nostre cas: $f'(x) = -\frac{3}{2}\sin(3x/2) < 0$ si $0 < \frac{3x}{2} < \pi \iff 0 < x < \frac{2\pi}{3}$, i $f'(0) = f'(\frac{2\pi}{3}) = 0$.

Llavors, f és estrict. decreixent en $[0, 2\pi/3]$ i existeix $f^{-1}: [\underset{f(2\pi/3)}{\overset{\shortparallel}{-1}}, \underset{f(0)}{\overset{\shortparallel}{1}}] \to [0, 2\pi/3]$, que de fet és $f^{-1}(y) = \frac{2}{3}\arccos(y)$

(b) $f(x) = \ln(x-3)$

$f: (3, +\infty) \to \mathbb{R}$ compleix $f'(x) = \frac{1}{x-3} > 0 \quad \forall x > 3$ i $\lim_{x\to 3^+} f = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f = +\infty$. Per tant f és estrict. creixent en $(3, +\infty)$ i bijectiva entre $(3, +\infty)$ i $\mathbb{R}$.

Així, doncs $\exists\, f^{-1}: \mathbb{R} \to (3, +\infty)$, que de fet és $f^{-1}(y) = e^y + 3$.