
Valores extremos en los parámetros de dominación y resolución de un grafo ^{*}

J. Cáceres¹, C. Hernando², M. Mora², I.M. Pelayo² y M.L. Puertas¹

¹ Universidad de Almería, {jcaceres,mpuertas}@ual.es

² Universitat Politècnica de Catalunya,
{carmen.hernando,merce.mora,ignacio.m.pelayo}@upc.edu

Resumen. Un conjunto de vértices de S de un grafo G se dice que es dominante si todo vértice de G es adyacente a un vértice de S . Por otra parte, un conjunto S se dice que resuelve G (o que localiza G) si para todo par de vértices u, v de G existe $w \in S$ tal que $d(u, w) \neq d(v, w)$.

Si S es un conjunto que resuelve y domina lo llamamos η -conjunto y si además verifica que $N(u) \cap S \neq N(v) \cap S$ para $\forall v, u \in V(G) \setminus S$ entonces decimos que S es un $\ell - d$ -conjunto. En este trabajo estudiamos los valores extremos de los cardinales de los η -conjuntos y de los $\ell - d$ -conjuntos.

Palabras clave: Conjuntos dominantes, número de dominación, conjuntos que resuelven un grafo, dimensión métrica de un grafo, $\ell - d$ -conjuntos.

1 Introducción

Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo y $S \subset V(G)$. Decimos que S domina G , o que es un conjunto dominante de G , si se verifica que todo vértice de $V(G) \setminus S$ tiene algún vecino en S . El número de dominación de un grafo G es el mínimo cardinal de un conjunto que domina G y lo notaremos por $\gamma(G)$.

Sean u, v, z tres vértices de un grafo G . Se dice que z resuelve (o localiza) los vértices u y v si $d(u, z) \neq d(v, z)$. Un conjunto de vértices $S \subset V(G)$ se dice que resuelve G si para todo par de vértices de G existe uno de S que los resuelve. Se llama dimensión métrica de G al mínimo cardinal de un conjunto que resuelve G y lo notamos por $\beta(G)$.

A los conjuntos que resuelven y dominan un grafo G los llamaremos η -conjuntos y notamos $\eta(G)$ al mínimo cardinal de uno de estos conjuntos.

Un conjunto dominante S de un grafo G que además verifica que $N(u) \cap S \neq N(v) \cap S$ para todo par $u, v \in V(G) \setminus S$ se dice que es un $\ell - d$ -conjunto y notamos $\lambda(G)$ al mínimo cardinal de un $\ell - d$ -conjunto de G .

^{*} Parcialmente subvencionado por los proyectos: JA-FQM-305, P06-FQM-01649, 2009SGR1040, 2009SGR1387, MTM 2008-05866-C03-01, MTM 2008-06620-C03-01, MTM2009-07242.

Observamos que si S es $\ell - d$ -conjunto entonces S también resuelve y por tanto $\max\{\gamma(G), \beta(G)\} \leq \eta(G) \leq \lambda(G)$. Por otra parte, la reunión de un conjunto que resuelve y otro que domina es un η -conjunto, de donde $\eta(G) \leq \gamma(G) + \beta(G)$.

Los conjuntos que resuelven y la dimensión métrica de un grafo han sido largamente estudiados (ver [4], también ver [2] donde se da una larga lista de aplicaciones y una extensa biografía).

Los $\ell - d$ -conjuntos fueron introducidos por P.J. Slater en [9] y los η -conjuntos por M.A. Henning y O. Oellermann en [7]. Estos conjuntos han sido estudiados en diferentes tipos de grafos (ver [1],[3],[6]). Una motivación para el estudio de estos conjuntos es el detectar fallos en la diagnosis de sistemas con multiprocesadores.

En este trabajo estudiamos los valores extremos de los parámetros η y λ .

En la sección 2 se dan cotas ajustadas de $\eta(G)$ en función del orden y el diámetro del grafo y se caracterizan todos los grafos con $\eta(G)$ igual a 1 ó 2. En la sección 3 se hace un estudio análogo con el parámetro λ . También se estudian algunas condiciones en las cuales $\lambda = \eta$ y se caracteriza todos los grafos con $\lambda(G) = n - 2$ siendo n el orden del grafo.

Finalmente, en la sección 3 verificamos la existencia de grafos con número de dominación, dimensión métrica y parámetro de η cualesquiera siempre que se verifiquen las restricciones elementales.

Todos los grafos considerados son finitos, simples y conexos. Para conceptos básicos de teoría de grafos que aquí no definimos el vector puede referirse a [10].

2 Valores extremos del parámetro η

En esta sección vamos a estudiar cotas ajustadas del orden de G en función del diámetro y del parámetro η . Después caracterizaremos los grafos que verifican $\eta(G) = 1$ y $\eta(G) = 2$.

Teorema 1. *Sea G un grafo de orden n , diámetro $D \geq 3$ y $\eta(G) = \eta$, entonces:*

$$\eta + \left\lceil \frac{2D}{3} \right\rceil \leq n \leq \eta + \eta \cdot 3^{\eta-1}$$

y estas cotas son ajustadas.

Demostración. Empezamos estudiando la cota inferior. Sean u, v vértices de G tales que $d(u, v) = D$. Sea $\mathcal{P} : u = x_0 \sim x_1 \sim \dots \sim x_D = v$ un camino mínimo entre u y v . Consideramos el conjunto $A = \left\{ x_{3k+1} \mid k = 0, \dots, \left\lceil \frac{D+1}{3} \right\rceil \right\}$. Este conjunto domina y resuelve $\mathcal{P}$. Así pues, $S = \{V(G) \setminus V(\mathcal{P})\} \cup A$ resuelve y

domina G y verifica: $|S| = n - \left\lceil \frac{2D}{3} \right\rceil$, de donde obtenemos $n \geq \eta(G) + \left\lceil \frac{2D}{3} \right\rceil$.

Para ver que la cota es ajustada basta considerar el camino de orden n $G = P_n$.

Veamos ahora la cota superior. Sea $S = \{v_1, \dots, v_\eta\}$ un η -conjunto de cardinal mínimo. Sea $d_{ij} = d(v_i, v_j)$, $i, j = 1, \dots, \eta$, $i \neq j$. Sea $u \in V(G) \setminus S$. Puesto que S domina G , existe algún vértice $v_i \in S$ que es adyacente a u , esto es, $d(v_i, u) = 1$. Estudiamos las posibles distancias de u a los otros vértices de S .

Por un lado tenemos que $d(u, v_j) \leq d(u, v_i) + d(v_i, v_j)$ y por otra parte $d(v_i, v_j) \leq d(v_i, u) + d(u, v_j)$. De donde obtenemos que $d_{ij} - 1 \leq d(i, v_j) \leq 1 + d_{ij}$. Así pues, si $d(u, v_i) = 1$, la distancia de u a v_j sólo puede ser d_{ij} , $d_{ij} - 1$ o $d_{ij} + 1$. Si consideramos el vector distancias:

$$r(u, S) = (d(u, v_1), \dots, d(u, v_i), \dots, d(u, v_\eta))$$

vemos que la coordenada i -ésima es un 1 y para cada una de las otras coordenadas sólo puede haber tres valores posibles. Por tanto hay a lo sumo $3^{\eta-1}$ vectores diferentes para los $u \in G$ que son adyacentes a un vértice concreto de S . Puesto que S domina y resuelve se obtiene que a lo sumo hay $3^{\eta-1} \cdot \eta$ vértices en $V(G) \setminus S$, de donde concluimos que

$$n \leq \eta + \eta \cdot 3^{\eta-1}.$$

Para ver que la cota es ajustada construimos explícitamente grafos que la verifican. En la Figura 1 se ilustra el caso $\eta = 2$.

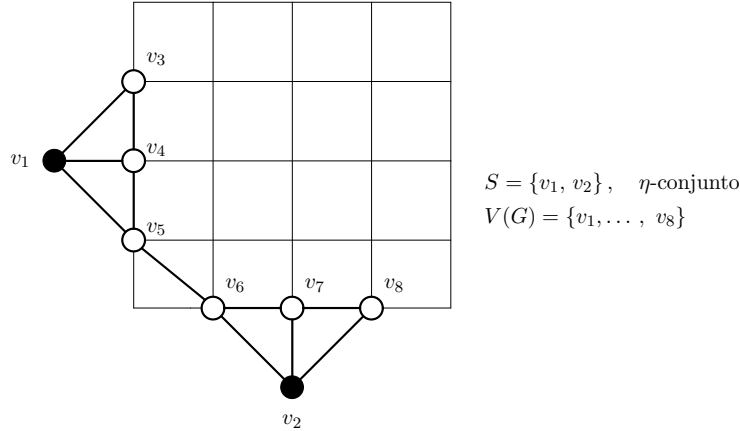


Figura 1. Grafo de orden máximo y $\eta = 2$

En general, para cualquier η , consideramos $G = (V(G), E(G))$ el siguiente grafo:

$$\begin{aligned}
V(G) &= \{x = (x_1, \dots, x_\eta) \mid i = 1, \dots, \eta, x_i = 0 \ x_j = 3 \ j \neq i\} \\
&\cup \{x = (x_1, \dots, x_\eta) \mid i = 1, \dots, \eta, x_i = 1 \ x_j \in \{2, 3, 4\} \ j \neq i\} \\
E(G) &= \{x \sim y \iff |x_k - y_k| \leq 1 \ \forall k\}
\end{aligned}$$

Se verifica que $\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i = 0, x_j = 3, i = 1, \dots, \eta, j \neq i\}$ es un η -conjunto de G de cardinal mínimo y por tanto $\eta(G) = \eta$. Y $|V(G)| = \eta \cdot 3^{\eta-1} + \eta$. $\square$

En [7] se estudian los grafos que tienen $\eta(G)$ de valor máximo. Concretamente obtienen los siguientes resultados.

Teorema 2. Si G es un grafo de orden $n \geq 2$, entonces

$$\begin{aligned}
\eta(G) = n - 1 &\iff G \text{ es el grafo completo } K_n \text{ o} \\
&G \text{ es el grafo bipartito completo } K_{1,n-1}.
\end{aligned}$$

Teorema 3. Si G es un grafo de orden $n \geq 4$, entonces

$$\eta(G) = n - 2 \iff G \in F_3 \cup \dots \cup F_9 \quad (\text{ver Tabla 1}).$$

i	F_i	β	η	λ
1	K_n	$n - 1$	$n - 1$	$n - 1$
2	$K_{1,n-1}$	$n - 2$	$n - 1$	$n - 1$
3	$\overline{K}_m + K_1 + K_1 + \overline{K}_k$	$\begin{cases} n - 4 \\ n - 3 \end{cases}$	$n - 2$	$n - 2$
4	$K_m + K_1 + \overline{K}_k, m \geq 2, k \geq 2$	$n - 3$	$n - 2$	$n - 2$
5	$K_1 + \overline{K}_m + K_1 + \overline{K}_k, m \geq 2$	$n - 3$	$n - 2$	$n - 2$
6	$(K_1 + \overline{K}_m) + K_1 + \overline{K}_k, m \geq 2$	$n - 3$	$n - 2$	$n - 2$
7	$K_{s,t}, 2 \leq s \leq t$	$n - 2$	$n - 2$	$n - 2$
8	$K_s + \overline{K}_t, 2 \leq s, 2 \leq t$	$n - 2$	$n - 2$	$n - 2$
9	$K_1 + K_s + K_t, 1 \leq s, 2 \leq t$	$n - 2$	$n - 2$	$n - 2$

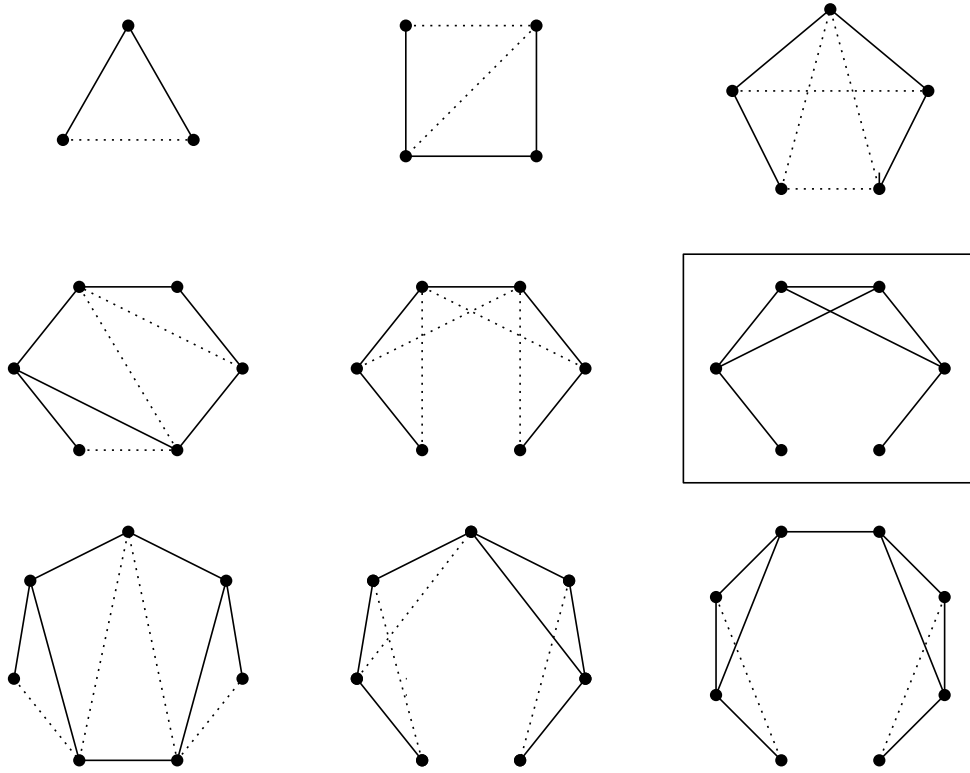
Tabla 1. Grafos que verifican $\eta(G) \geq n - 2$.

En este trabajamos caracterizamos los grafos con $\eta(G)$ de valor mínimo. Se han obtenido los siguientes resultados.

Teorema 4. Si G es un grafo de orden $n \geq 2$, entonces $\eta(G) = 1$ si y sólo si G es el camino P_2 .

Teorema 5. Si G es un grafo tal que $\eta(G) = 2$ entonces el orden de G es a lo sumo 8. El conjunto de todos los grafos conexos que verifican $\eta(G) = 2$ están totalmente caracterizados (ver Figura 2, donde las aristas marcadas en trazo continuo son obligatorias y las marcadas en trazo discontinuo son opcionales, siendo el único grafo prohibido el que está enmarcado).

Demostración. Omitida $\square$


 Figura 2. Grafos con $\eta = 2$

3 Valores extremos del parámetro λ

Estudiamos ahora cotas ajustadas del orden de G en función del diámetro y del parámetro λ . Después caracterizaremos los grafos que verifiquen que $\lambda(G) = 1$ o $\lambda(G) = 2$. Finalmente estudiaremos los valores máximos de $\lambda(G)$ y los grafos en que se alcanzan.

Teorema 6. Si G es un grafo de orden n , diámetro $D \geq 2$ y $\lambda(G) = \lambda$, entonces

$$\lambda + \left\lceil \frac{3D-1}{5} \right\rceil \leq n \leq \lambda + 2^\lambda - 1$$

y estas cotas son ajustadas.

Demostración. Empezamos estudiando la cota inferior. Sean u, v vértices de G tales que $d(u, v) = D$. Sea $\mathcal{P} : u = x_0 \sim x_1 \sim \dots \sim x_D = v$ un camino mínimo entre u y v . Consideramos el conjunto

$$A = \left\{ x_{5k+1}, x_{5k+3} \mid k = 0, \dots, \left\lceil \frac{D+1}{5} \right\rceil \right\}.$$

Este conjunto es un $\ell - d$ -conjunto para $\mathcal{P}$. Así pues $S = \{V(G) \setminus V(\mathcal{P})\} \cup A$ es un $\ell - d$ -conjunto de G y verifica: $|S| = n - \left\lceil \frac{3D-1}{5} \right\rceil$. De aquí obtenemos la cota inferior del enunciado. Para mostrar que la cota es ajustada basta considerar como grafo el camino de orden n .

Estudiamos ahora la cota superior. Sea $S = \{v_1, \dots, v_\lambda\}$ un $\ell - d$ -conjunto de cardinal mínimo. Sea $u \in V(G) \setminus S$, consideramos el vector distancia:

$$r(u, S) = (d(u, v_1), \dots, d(u, v_n)) .$$

Por ser S un conjunto dominante, alguna de estas coordenadas tiene que ser 1. Sea $w \in V(G) \setminus S$, $w \neq u$. Por ser S un $\ell - d$ -conjunto $r(u, S)$ y $r(w, S)$ no pueden tener los unos en las mismas coordenadas. Posibles vectores de λ coordenadas que verifiquen esto hay $2^\lambda - 1$. De donde se obtiene que:

$$n \leq \lambda + 2^\lambda - 1 .$$

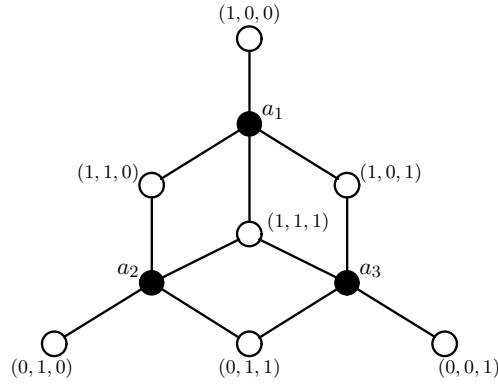


Figura 3. Grafo de orden máximo y $\lambda = 3$

Para ver que la cota es ajustada basta considerar los siguientes grafos $G = (V(G), E(G))$:

$$V(G) = (\{\text{palabras binarias de longitud } \lambda\} \setminus \{\emptyset\}) \cup \{a_1, \dots, a_\lambda\}$$

$$E(G) = \{(x_1, \dots, x_\lambda) \sim a_i \iff x_i = 1\} .$$

En la Figura 3 se ilustra el caso $\lambda = 3$. □

A continuación caracterizamos los grafos con $\lambda(G)$ de valor mínimo.

Teorema 7. Si G es un grafo de orden $n \geq 2$, entonces

$$\lambda(G) = 1 \iff G = P_2 .$$

Teorema 8. Si G es un grafo tal que $\lambda(G) = 2$, entonces contiene a lo más 5 vértices. El conjunto de todos los grafos conexos satisfaciendo esta condición ha sido completamente caracterizado (ver Figura 4, donde las aristas marcadas en trazo continuo son obligatorias y las marcadas en trazo discontinuo son opcionales).

Demostración. Si G es un grafo tal que $\lambda(G) = 2$, entonces $\eta(G) \leq 2$. Por otra parte $\eta(G) = 1 \iff G = P_2 \iff \lambda(G) = 1$. Basta por tanto estudiar los grafos que tienen $\eta(G) = 2$ (ver Figura 2) y ver cuales verifican que $\lambda(G) = 2$. Se comprueba que son todos los que tienen orden $n \leq 5$. $\square$

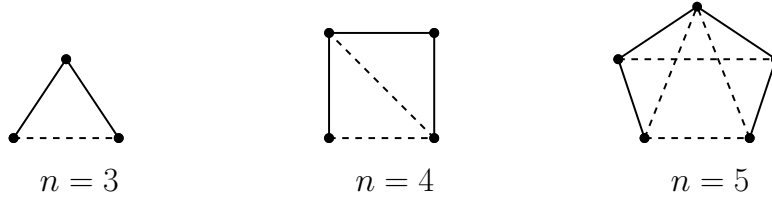


Figura 4. Grafos con $\lambda = 2$

En cuanto a los grafos que alcanzan los valores máximos del parámetro λ en [9] se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 9. Si G es un grafo de orden $n \geq 2$, entonces

$$\lambda(G) = n - 1 \iff G = K_{1,n-1} \text{ o } G = K_n.$$

Damos ahora una serie de resultados en los que para ciertos valores del diámetro o de la dimensión métrica obtendremos la igualdad entre los parámetros λ y η . En particular obtendremos la caracterización de todos los grafos G con $\lambda(G) = n - 2$.

En lo que sigue notamos $N(u)$ al conjunto de vértices adyacentes a u y $N[u] = N(u) \cup \{u\}$.

Proposición 1. Sea G un grafo de diámetro $D = 2$. Si S es un η -conjunto de G entonces S es también un $\ell - d$ -conjunto de G .

Demostración. Supongamos que S es un η -conjunto que no es $\ell - d$ -conjunto. Esto es, existen vértices $u, v \in V(G) \setminus S$, $u \neq v$, tales que $N(u) \cap S = N(v) \cap S = W$.

Sea $z \in S$. Si $z \in W$ entonces $d(z, u) = d(z, v) = 1$. Si $z \notin W$ entonces z no es adyacente ni a u ni a v , y puesto que $D = 2$ debe verificarse: $d(z, u) = d(z, v) = 2$. Luego S no resuelve u y v , lo cual contradice que sea un η -conjunto. $\square$

Corolario 1. Si G es un grafo de diámetro $D = 2$ entonces $\lambda(G) = \eta(G)$.

Observación 1. $D = 2$ es el valor máximo del diámetro para el cual podemos asegurar la igualdad de los dos parámetros. Esto es, existen grafos de diámetro $D = 3$ tales que $\lambda(G) \neq \eta(G)$. Vemos un ejemplo en la Figura 4.

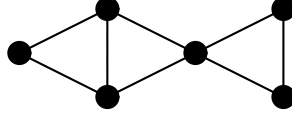


Figura 5. Grafo con diámetro 3, $\eta = 2$ y $\lambda = 3$

Proposición 2. Si G es un grafo con dimensión métrica $\beta = n - 3$ entonces $\lambda(G) = \eta(G)$.

Demostración. Si $\beta(G) = n - 3$ entonces el diámetro de G es 2 o 3. Si el diámetro es 2 ya hemos visto en la Proposición 1 que $\lambda(G) = \eta(G)$. Si el diámetro es 3, están caracterizados en [8] todos los grafos con $\beta(G) = n - D$. Por comprobación directa verificamos que en el caso $D = 3$ todos estos grafos satisfacen $\lambda(G) = \eta(G)$. $\square$

Proposición 3. Sea G un grafo de diámetro D . Si $\lambda(G) = n - 2$ o $\eta(G) = n - 2$ entonces $D \leq 3$.

Demostración. Supongamos que $D \geq 4$. Sean $u, v \in V(G)$ tales que $d(u, v) = 4$ y sea $u = x_0 \sim x_1 \sim x_2 \sim x_3 \sim x_4 = v$ un camino mínimo. Entonces el conjunto $S = V(G) \setminus \{x_0, x_2, x_4\}$ es η -conjunto y es $\ell - d$ -conjunto y $|S| < n - 2$. $\square$

La siguiente observación nos será útil tenerla presente para los resultados posteriores.

Observación 2. Sea G un grafo, $u, v \in V(G)$ tales que $N(u) = N(v)$ y sea R un conjunto que resuelve G ; entonces $u \in R$ o $v \in R$.

Proposición 4. Sea G un grafo, $u, v \in V(G)$. Si S es un η -conjunto de G tal que $u, v \notin S$, entonces $T = V \setminus \{u, v\}$ es un $\ell - d$ -conjunto.

Demostración. Si S es un η -conjunto entonces S resuelve y $N(u) \cap S \neq \emptyset$ y $N(v) \cap S \neq \emptyset$.

Puesto que $S \subset T$ se verifica que T también es η -conjunto. Para ver que T es $\ell - d$ -conjunto sólo falta ver que $N(u) \cap T \neq N(v) \cap T$.

Distinguimos casos según que u y v sean o no adyacentes. Si u y v no son adyacentes entonces $N(u) \cap T = N(u)$ y $N(v) \cap T = N(v)$. Pero como

S resuelve y $u, v \notin S$ tenemos que $N(u) \neq N(v)$ y por tanto $N(u) \cap T \neq N(v) \cap T$. Si u y v son adyacentes entonces $N[u] = \{u, v\} \cup [T \cap N(u)]$ y $N[v] = \{u, v\} \cup [T \cap N(v)]$. Pero como S resuelve se verifica que $N[u] \neq N[v]$ y por tanto $T \cap N(u) \neq T \cap N(v)$. $\square$

Teorema 10. Sea G un grafo de orden n ; entonces

$$\lambda(G) = n - 2 \iff \eta(G) = n - 2.$$

Demostración. Los grafos con $\eta(G) = n - 2$ son conocidos (ver Tabla 1). Directamente se comprueba que todos ellos verifican que $\lambda(G) = n - 2$. Ahora vamos a ver que no hay más grafos con $\lambda(G) = n - 2$. Supongamos existe un grafo G tal que $\lambda(G) = n - 2$ y $\eta(G) < n - 2$. Veremos que llegamos a contradicción.

Sea S un η -conjunto de G con $|S| = \eta(G) < \lambda(G) = n - 2$, en particular S no es un $\ell - d$ -conjunto. Existen por tanto vértices $x, y \in V(G) \setminus S$ tales que $S \cap N(x) = S \cap N(y) = N \neq \emptyset$. Por la Proposición 4 $T = V \setminus \{x, y\}$ es un $\ell - d$ -conjunto, de donde $T \cap N(x) \neq T \cap N(y)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un vértice $t \in T$ ($t \notin S$) tal que $t \in N(y)$ y $t \notin N(x)$.

Consideramos el conjunto $W = S \cup \{t\}$. Puesto que S resuelve y $S \subset W$, W también resuelve G . Además se verifica $W \cap N(x) = N \neq N \cup \{t\} = W \cap N(y)$ y por tanto W es un $\ell - d$ -conjunto. Como $|W| = |S| + 1$, esto obliga a que $\lambda(G) = \eta(G) + 1$ y por tanto $\eta(G) = n - 3$. De donde $V(G) = S \cup \{x, y, t\}$. Dado que S resuelve, existe $w \in S$ tal que $d(x, w) \neq d(y, w)$. En particular no puede ser que $w \in N$ y por tanto $d(x, w) \geq 2$ y $d(y, w) \geq 2$. Por otra parte, por la Proposición 3 sabemos que el diámetro de G es $D \leq 3$. Luego $2 \leq d(x, w) \leq 3$, $2 \leq d(y, w) \leq 3$. Pero, puesto que $N[x] \subset N[y]$ se verifica que $d(x, u) \leq d(y, u) \forall u \in V(G) \setminus \{x, y\}$ y por tanto $2 < d(y, w) < d(x, w) < 3$.

Observamos que no puede ser que exista un camino corto de w a y que contenga vértices de N pues entonces $d(y, w) = d(x, w)$. Así pues, el único camino corto entre w e y es $w \sim t \sim y$. Distinguimos ahora dos casos, según que x e y sean o no adyacentes entre sí.

Caso 1: x e y no son adyacentes.

En este caso $N(x) = N$ y $N(y) = N \cup \{t\}$. Consideramos un camino corto entre w y x : $w \sim a \sim z \sim x$. Como $z \in N$, z es adyacente a y . Puesto que $d(w, x) = 3$, $a \notin N(x) \subset N(y)$ y por tanto $d(a, y) \geq 2$.

Consideramos $W = V(G) \cup \{x, y, w\}$ y se verifica $W \cap N(x) = N \neq N \cup \{t\} = W \cap N(y)$. Por otra parte $a \in N(w) \cap W$ y a no es adyacente ni a x ni a y , de donde obtenemos que $W \cap N(x) \neq W \cap N(w)$ y $W \cap N(y) \neq W \cap N(w)$, así pues W es un $\ell - d$ -conjunto y $|W| < n - 2$ lo cual contradice que $\lambda(G) = n - 2$.

Caso 2: x e y son adyacentes.

En este caso si existe un camino corto entre w y x : $w \sim a \sim z \sim x$ con $z \neq y$ se procede igual que en el caso anterior. Suponemos pues que

los caminos cortos entre w y x contienen a y . En este caso sólo puede ser $w \sim t \sim y \sim x$. Consideramos ahora el conjunto $W = V(G) \cup \{x, y, w\}$, se verifica $W \cap N(x) = N \neq N \cup \{t\} = W \cap N(y)$ y como $N \cap N(w) = \emptyset$ también se verifica $W \cap N(x) \neq W \cap N(w)$ y $W \cap N(y) \neq W \cap N(w)$, así pues W es un $\ell - d$ -conjunto y $|W| < n - 2$ lo cual contradice que $\lambda(G) = n - 2$. $\square$

Consecuencia de este resultado y del Teorema 3 obtenemos la caracterización de todos los grafos con $\lambda(G) = n - 2$

Corolario 2. *Si G es un grafo de orden $n \geq 4$, entonces*

$$\lambda(G) = n - 2 \iff G \in F_3 \cup \dots \cup F_9 \quad (\text{ver Tabla 1}).$$

Observación 3. Hemos visto que si $\lambda(G) \geq n - 2$ entonces $\lambda(G) = \eta(G)$. Para valores menores esto ya no ocurre. Basta considerar el grafo de la Figura 5 para tener un ejemplo de grafo con $\lambda(G) = n - 3$ y $\eta(G) = n - 4$.

4 Teorema de realización

En [7] se muestra que existen grafos G para los cuales $\lambda(G)/\eta(G) = k$ con k cualquiera. En esta sección verificamos la existencia de grafos con número de dominación, dimensión métrica y parámetro η cualesquiera, siempre que se respeten las restricciones elementales.

Teorema 11. *Dados tres enteros positivos a, b, c verificando que $\max\{a, b\} \leq c \leq a + b$, existe un grafo G tal que $\gamma(G) = a$, $\beta(G) = b$ y $\eta(G) = c$, excepto para el caso $1 = b < a < c = a + 1$.*

Demostración. Distinguimos casos según que a o b sean o no uno.

- *Caso $b = 1$:* Es conocido (ver [4]) que $\beta(G) = 1$ si y sólo si G es un camino. Sea P_n el camino de orden n . Si $a = b = c = 1$ P_2 verifica el enunciado. Si $a = b = 1$ y $c = 2$ basta considerar P_3 . Si $b = 1$ y $a = c = k \geq 2$ entonces P_{3k} verifica el enunciado. El caso $b = 1$ y $a \geq 2$ con $a \neq c$ (esto es $c = a + 1$) es imposible pues no hay ningún camino que lo verifique.
- *Caso $a = 1, b \geq 2$:*
En este caso, puesto que $\gamma(G) = 1$, tiene que existir un vértice adyacente a todos los demás. Por otra parte, en estos supuestos se verifica $\beta(G) \leq \eta(G) \leq \beta(G) + 1$. Distinguimos dos casos.
Si $a = 1, c = b$ un grafo que verifica el enunciado es $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$:

$$\begin{aligned} V(G_1) &= \{u, v_1, v'_1, v_2, v'_2, \dots, v_b, v'_b\} \\ E(G_1) &= \{u \sim w \mid w \in V(G), w \neq u\} \cup \{v_i \sim v'_i \mid 1 \leq i \leq b\} \end{aligned}$$

Si $a = 1, c = b + 1$ basta considerar $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$:

$$\begin{aligned} V(G_2) &= \{u, v_0, v'_0, v_1, \dots, v_b\} \\ E(G_2) &= \{u \sim w \mid w \in V(G), w \neq u\} \cup \{v_0 \sim v'_0\} \end{aligned}$$

- *Caso $a \geq 2, b \geq 2$:*

Si $a = b = c$ consideramos el grafo $G_3 = (V(G_3), E(G_3))$:

$$\begin{aligned} V(G_3) &= \{u_1, \dots, u_a, v_1, v'_1, v_2, v'_2, \dots, v_a, v'_a\} \\ E(G_3) &= \{u_i \sim u_{i+1} \mid 1 \leq i \leq a - 1\} \cup \{u_i \sim v_i, u_i \sim v'_i, v_i \sim v'_i \mid 1 \leq i \leq a\} \end{aligned}$$

Si $a = b < c$ consideramos el grafo $G_4 = (V(G_4), E(G_4))$:

$$\begin{aligned} V(G_4) &= \{u_1, \dots, u_a, v_1, v'_1, v_2, v'_2, \dots, v_a, v'_a\} \\ E(G_4) &= \{u_i \sim u_{i+1} \mid 1 \leq i \leq a - 1\} \cup \{u_i \sim v_i, u_i \sim v'_i \mid 1 \leq i \leq a\} \\ &\quad \cup \{v_i \sim v'_i \mid c - a \leq i \leq a\} \end{aligned}$$

Si $a > b$ consideramos el grafo $G_5 = (V(G_5), E(G_5))$:

$$\begin{aligned} V(G_5) &= \{u_1, \dots, u_a, v_1, v'_1, v_2, v'_2, \dots, v_{c+1-a}, v'_{c+1-a}, v_{c+2-a}, \dots, v_{c+1-b}\} \\ &\quad \cup \{v_{c+2-b}, v'_{c+2-b}, \dots, v_a, v'_a\} \\ E(G_5) &= \{u_i \sim u_{i+1} \mid 1 \leq i \leq a - 1\} \cup \{u_i \sim v_i, u_i \sim v'_i \mid 1 \leq i \leq a\} \\ &\quad \cup \{v_i \sim v'_i \mid c + 2 - b \leq i \leq a\} \cup \{v_1 \sim v'_1\} \end{aligned}$$

Si $b > a$ consideramos el grafo $G_6 = (V(G_6), E(G_6))$:

$$\begin{aligned} V(G_6) &= \{u_1, \dots, u_a, w_1, w'_1, \dots, w_{b-a+1}, w'_{b-a+1}, v_2, v'_2, \dots, v_a, v'_a\} \\ E(G_6) &= \{u_i \sim u_{i+1} \mid 1 \leq i \leq a - 1\} \cup \{u_i \sim v_i, u_i \sim v'_i \mid 2 \leq i \leq a\} \\ &\quad \cup \{u_1 \sim w_i, u_1 \sim w'_i, w_i \sim w'_i \mid 1 \leq i \leq b - a + 1\} \\ &\quad \cup \{v_i \sim v'_i \mid 2 \leq i \leq a + b - c\} \end{aligned}$$

□

Referencias

- [1] M. Blidia, M. Chellali, F. Maffray, J. Moncel and A. Semri, Locating-domination and identifying codes in trees, *Australas. J. Combin.*, 39: 219–232, 2007.
- [2] J. Cáceres, C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, M. L. Puertas, C. Seara and D. R. Wood, On the Metric Dimension of Cartesian Products of Graphs, *SIAM Journal on Discrete Math.*, 21 (2) : 423–441, 2007.
- [3] I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Extremal cardinalities for identifying and locating-dominating codes in graphs, *Discrete Math.* 307 (3-5): 356–366, 2007.
- [4] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson and O. R. Oellermann, Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph, *Discrete Appl. Math.* 105 (1-3): 99–113, 2000.
- [5] M. Daniel, S. Gravier and J. Moncel, Identifying codes in some subgraphs of the square lattice, *Theor. Comp. Science* 319 (1-3): 411–421, 2004.
- [6] A. Finbow and B. Hartnell, On locating dominating sets and well-covered graphs, *Congr. Numer.* 65: 191–200, 1988.
- [7] M. A. Henning and O. Oellermann, Metric-locating-dominating sets in graphs, *Ars Combin.* 73: 129–141, 2004.
- [8] C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, C. Seara and D. Wood, Extremal graph theory for metric dimension and diameter, *Electronic Journal of Combinatorics*, 17: R30, 2010.
- [9] P.J. Slater, Dominating and reference sets in a graph, *J. Math. Phys. Sci.* 22: 445–455, 1988.
- [10] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice-Hall, New Jersey, 1999.