

Dimensión métrica de grafos infinitos[§]

J. Cáceres^a, C. Hernando^b, M. Mora^c, A. Moreno-González^d, I. Pelayo^e,
M.L. Puertas^a, C. Seara^c

(a) *Departamento de Estadística y Matemática Aplicada, Universidad de Almería.*
E-mail: `jcaceres@ual.es`, `mpuertas@ual.es`

(b) *Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya.*
E-mail: `carmen.hernando@upc.edu`

(c) *Departament de Matemàtica Aplicada II, Universitat Politècnica de Catalunya.*
E-mail: `merce.mora@upc.edu`, `carlos.seara@upc.edu`

(d) *Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla.*
E-mail: `auxiliadora@us.es`

(e) *Departament de Matemàtica Aplicada III, Universitat Politècnica de Catalunya.*
E-mail: `ignacio.m.pelayo@upc.edu`

Resumen. En este trabajo, trataremos de determinar bajo qué condiciones un grafo infinito localmente finito tiene una dimensión métrica finita, dando una caracterización parcial de dichos grafos. Existen varios ejemplos interesantes que se obtienen como producto cartesiano por lo que se estudia ese caso con especial interés, dando una cota para la dimensión métrica.

Palabras clave. grafo infinito, dimensión métrica, conjuntos resolutivos.

1 LA DIMENSIÓN MÉTRICA DE UN GRAFO INFINITO

Un grafo *finito localmente finito*, o grafo *infinito*, es un grafo con un cantidad numerable de vértices de valencia finita. La Figura 1.1 muestra varios grafos infinitos elementales, el *1-rayo* P_∞ y el *2-rayo* $P_{\infty,\infty}$ a la izquierda, y la *mall*a *2-dimensional* a la derecha. Tradicionalmente los grafos infinitos no han atraído tanta atención como su contraparte finita, posiblemente porque los argumentos que se utilizan pertenecen tanto a la combinatoria como a la teoría de conjuntos, aunque varios autores prominentes como D. König [2], C. St. J. A. Nash-Williams [3], R. Halin y C. Thomassen han publicado numerosos trabajos sobre el tema.

El resultado más antiguo, y seguramente el más conocido, sobre grafos infinitos es el siguiente, conocido como Lema de König [2].

[§] Parcialmente financiado por JA-PAI-FQM-305 y MTM2005-08441-C02-01

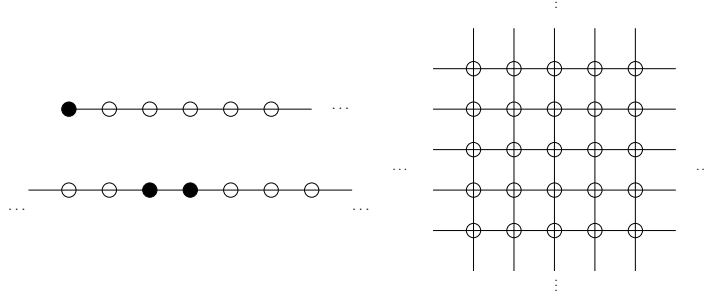


Figura 1.1: Varios grafos infinitos con dimensión métrica finita o infinita.

Lema 1. [2] (*Lema de König*) Desde cada vértice u_0 de un grafo infinito localmente finito G , existe un 1-rayo $P = \{u_0 u_1 u_2 \dots\}$ tal que la distancia desde u_k hasta u_0 en G es k .

A aquellos 1-rayos que verifican las condiciones del Lema de König los llamaremos *1-rayos métricos*.

El otro concepto que pretendemos desarrollar aquí es el de dimensión métrica. Dados tres vértices u, v y x en un grafo conexo (finito o infinito), diremos que x *resuelve* a u y v si $d(u, x) \neq d(v, x)$. Un subconjunto de vértices S se dice que es *resolutivo* para G , si para cualquier pareja de vértices existe un elemento de S que los resuelve. Análogamente se puede decir que S es resolutivo para $U \subseteq V(G)$ si cada pareja de vértices de U es resuelto por algún vértice de S . Para cualquier $u \in V(G)$, denotaremos como $r(u|S)$ al vector ordenado de distancias $d(u, x_i)$ donde $x_i \in S$. Un conjunto resolutivo del grafo que tenga cardinal mínimo se llama una *base métrica* de G y a ese cardinal cuando es finito, se dice que es la *dimensión métrica* $\beta(G)$ del grafo. Diremos que la dimensión métrica de un grafo es infinita si no contiene un conjunto resolutivo finito. La dimensión métrica de un grafo no conexo es la suma de las dimensiones de sus componentes conexas, por lo que a partir de este punto, asumiremos que todos los grafos que consideremos son conexos. Para aquellos conceptos de teoría de grafos que no se definan aquí, el lector puede consultar [4].

Del Lema de König (Lema 1), se puede deducir el siguiente resultado.

Lema 2. Sea S un subconjunto finito de vértices de un grafo infinito G y sea $P = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$ un 1-rayo métrico tal que $S \cap V(P) = \emptyset$. Entonces siempre existe un vértice u_i en P tal que, para cualquier entero $k > 0$, se tiene que $r(u_{i+k}|S) = r(u_i|S) + k$.

Demostración. Siempre se tiene que cumplir que $d(u_i, x) + d(u_0, x) \geq d(u_i, u_0) = i$ para cualquier $x \in S$ ya que de lo contrario P no sería un 1-rayo métrico. En otras palabras, $d(u_i, x) \geq i - d(u_0, x)$.

Supongamos que la hipótesis no es cierta para un cierto entero fijo $k > 0$. Dado un vértice u_i cualquiera del rayo, la distancia $d(u_{i+k}, x)$ con $x \in S$ debe ser más corta que $k + d(u_i, x)$. Pero lo mismo debe ocurrir para todas las parejas u_{i+j} y u_{i+k+j} con $j > 0$, y según la desigualdad anterior esto sólo puede suceder un número finito de veces para cada $x \in S$. Como S es finito, tenemos por tanto una contradicción. $\square$

Cada 1-rayo métrico P tiene al menos un vértice en las condiciones del Lema 2 que denotaremos como $u(P)$.

A primera vista un grafo infinito puede tener dimensión métrica finita o finita como se muestra en la Figura 1.1. Por ejemplo el 1-rayo P_∞ y el 2-rayo $P_{\infty, \infty}$ tienen dimensiones 1 y 2 respectivamente (las correspondientes bases en cada uno de ellos se muestran en la figura como vértices negros).

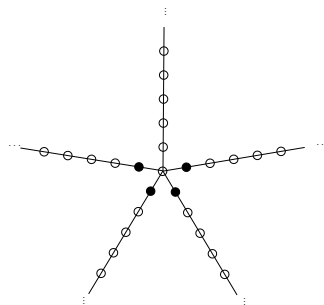


Figura 1.2: Un grafo infinito de dimensión cuatro. Los vértices negros forman una base métrica del grafo.

Por otro lado, vamos a demostrar brevemente que la dimensión de la malla 2-dimensional (a la derecha en la Figura 1.1) no es finita. Supongamos que cada vértice de la malla está asociado a un par de coordenadas enteras (i, j) . Cualquier conjunto finito S se puede encerrar en un cuadrado acotado, y es inmediato comprobar que aquellos vertices en el exterior del cuadrado con coordenadas $(i, i + 1)$ e $(i + 1, i)$ con $i \in \mathbb{Z}$ tendrían el mismo vector de distancias con S . Por tanto, S no puede ser un conjunto resolutivo en la malla 2-dimensional.

Es natural por tanto plantearse como primer problema el de caracterizar aquellos grafos infinitos que tienen dimensión métrica finita. Podemos dar un resultado parcial de esta caracterización utilizando el concepto de doblemente

resolutivo introducido en [1]. Dos vértices x e y en un grafo conexo G (finito o infinito) *resuelven doblemente* a otro par u y v si $d(u, x) - d(v, x) \neq d(u, y) - d(v, y)$. Si S y U son dos subconjuntos de vértices de G , tales que cualquier par de vértices $u, v \in U$ son resueltos doblemente por alguna pareja de elementos de S entonces S es un conjunto *doblemente resolutivo* de U .

En el caso de que U sea infinito, entonces S no puede ser finito como se demuestra a continuación.

Lema 3. *Sea G un grafo infinito y U un subconjunto infinito de sus vértices. Entonces no existe otro subconjunto finito S de vértices que resuelva doblemente a U .*

Demostración. Supongamos que G es infinito y que existe un conjunto finito S doblemente resolutivo de un conjunto infinito de vértices U . Denotemos $D = \max\{d(x, y); x, y \in S\}$ y m como el número de pares ordenados de vértices en S .

Fijado uno de esos pares (x, y) , definimos $f_{xy}(u) = d(u, x) - d(u, y)$ para cualquier otro vértice $u \in U$. Este $f_{xy}(u)$ es un entero en el intervalo $[-D, D]$ ya que $d(u, x) \leq d(u, y) + D$ ó $d(u, y) \leq d(u, x) + D$. Denotaremos como $f_S(u)$ al vector de componentes $f_{xy}(u)$ para cada par ordenado (x, y) . El número de posibles valores de $f_S(u)$ está acotado superiormente por $(2D + 1)^m$ y por tanto es finito. Necesariamente, $f_S(u) = f_S(v)$ para algún par de vértices $u, v \in U$. Está claro que u y v son doblemente resueltos por S si y sólo si $f_S(u) \neq f_S(v)$, y por tanto S no es un conjunto doblemente resolutivo de U y tenemos una contradicción. $\square$

Este resultado nos va a permitir obtener una caracterización parcial de aquellos grafos infinitos con dimensión finita, ya que los conceptos doblemente resolutivo y resolutivo está ligados íntimamente.

Lema 4. *Sea G un grafo infinito de dimensión finita y sea S un conjunto resolutivo de G . Supongamos que $\mathbb{P}$ es un conjunto finito o infinito de 1-rayos métricos de G disjuntos dos a dos y tales que $V(P_i) \cap S = \emptyset, \forall P_i \in \mathbb{P}$. Entonces S resuelve doblemente a los vértices del conjunto $\{u(P_i) : P_i \in \mathbb{P}\}$.*

Demostración. Supongamos que no es así y que $u = u(P_i)$ y $v = u(P_j)$ no son resueltos doblemente por S . En ese caso $r(v|S) = r(u|S) + k$ y por el Lema 2, existe $u' \in V(P_i)$ tal que $r(u'|S) = r(u|S) + k = r(v|S)$. Por tanto S no puede ser un conjunto resolutivo de G . $\square$

Teorema 1. *Si G es un grafo infinito de dimensión finita entonces no puede contener un número infinito de 1-rayos métricos disjuntos dos a dos.*

Demostración. Si por el contrario, existieran infinitos 1-rayos métricos disjuntos dos a dos, el conjunto $\mathbb{P}$ de estos que intersecan con un conjunto finito S es también infinito. Pero si S es resolutivo, por el Lema 4, S debe resolver doblemente a $\{u(P_i) : P_i \in \mathbb{P}\}$, algo que no puede ocurrir porque es un conjunto infinito como se demostró en el Lema 3. $\square$

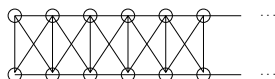


Figura 1.3: Un grafo infinito de dimensión infinita y con a lo sumo dos 1-rayos métricos disjuntos.

Como corolario de este resultado se obtiene una demostración alternativa de que la malla 2-dimensional tiene dimensión infinita. Aún así, no es una caracterización completa ya que existen grafos sin un número infinito de 1-rayos métricos disjuntos dos a dos que también tienen dimensión métrica infinita (ver Figura 1.3).

El siguiente resultado puede verse como el recíproco de la caracterización que estamos buscando.

Teorema 2. *Para cualquier entero $k > 0$, existe un grafo infinito G tal que $\beta(G)$.*

Demostración. Ya hemos visto que el 1-rayo y el 2-rayo tienen dimensión 1 y 2 respectivamente. Para cualquier otro entero $k \geq 3$, se puede construir un árbol infinito identificando el primer vértice de $k + 1$ copias de un 1-rayo, (ver Figura 1.2). Una base del grafo así construido estaría formado por el primer vértice no central de k rayos cualesquiera. $\square$

Una técnica habitual para intentar extender propiedades o parámetros de grafos finitos a grafos infinitos es estudiar esas propiedades en los subgrafos finitos de un grafo finito. Sin embargo, en este caso no parece de utilidad. Por ejemplo, cualquier subgrafo finito de $P_{\infty, \infty}$ tiene dimensión uno aunque el grafo infinito tenga dimensión 2. Otro ejemplo es el de la Figura 1.4 que tiene una base de dos elementos y sin embargo el subgrafo formado por el hipercubo y el 1-rayo tiene dimensión 3.

2 DIMENSIÓN MÉTRICA DE PRODUCTOS CARTESIANOS

El *producto cartesiano* de G y H , denotado como $G \square H$, es el grafo que tiene como conjunto de vértices $V(G) \times V(H) = \{(x, u) : x \in V(G), u \in V(H)\}$, y

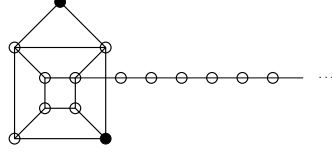


Figura 1.4: Un grafo infinito que contiene varios subgrafos de mayor dimensión.

donde (x, u) es adyacente con (y, v) si y sólo si $x = y$ y $uv \in E(H)$ ó $u = v$ y $xy \in E(G)$. Nótese que si G y H son conexos entonces $G \square H$ también lo es, y en particular $d((x, u), (y, v)) = d_G(x, y) + d_H(u, v)$.

Dado un subconjunto S de vértices de $G \square H$, la *proyección* de S en G es el conjunto de los vértices $x \in V(G)$ tales que $\exists u \in V(H) / (x, u) \in S$. Análogamente se define la proyección de S en H .

En este contexto, la malla 2-dimensional no es sino $P_{\infty, \infty} \square P_{\infty, \infty}$ y ya hemos probado de diferentes maneras que su dimensión es infinita. Este no es un caso aislado ya que la dimensión métrica de un producto cartesiano de dos grafos infinitos es siempre infinita debido a que tiene infinitos 1-rayos métricos disjuntos dos a dos y podemos aplicar el Teorema 1.

Corolario 1. Sean G y H dos grafos infinitos. Entonces, $\beta(G \square H) = +\infty$.

En cualquier caso existe una gran cantidad de ejemplos interesantes que pueden obtenerse como el producto cartesiano de un grafo infinito y otro finito. Por ejemplo, el cilindro $C_n \square P_\infty$ y $K_m \square P_\infty$ cuyas dimensiones métricas se determinan a continuación.

Proposición 1. Se verifica que:

$$\beta(C_n \square P_\infty) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 3 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad \beta(K_n \square P_\infty) = n - 1 \text{ si } n \geq 3$$

Demostración. En [1], se demuestra que una base métrica S de $\beta(C_n \square P_m)$ es $S = \{(x, v) : x \in S'\}$ donde S' es a su vez una base de C_n y v es un extremo de P_m .

Análogamente consideremos $S = \{(x, v) : x \in S'\}$ donde S' es una base de C_n y v es el extremo de P_∞ . Si existieran dos vértices que no son resueltos por ningún elemento de S , esos dos vértices y S estarían contenidos en un subgrafo homeomorfo a cierto $C_n \square P_m$. Como este subgrafo hereda las distancias de $C_n \square P_\infty$, entonces obtendríamos la contradicción de que S tampoco sería un conjunto resolutorio en dicho grafo. Finalmente la minimalidad de S se desprende del hecho de ser una base en $C_n \square P_m$.

Un razonamiento análogo se puede hacer en $K_n \square P_\infty$ sabiendo que una base de $K_n \square P_m$ con $n \geq 3$ es $S = \{(x, v) : x \in V(K_n), x \neq r\}$ donde r es un vértice fijo de K_n y v es un extremo de P_m . $\square$

Finalmente, es posible dar una cota superior a la dimensión de $G \square H$ cuando G es infinito, y H finito y distinto de K_1 y P_2 .

Teorema 3. *Dado un grafo infinito G y otro finito $H \neq K_1, P_2$. Entonces se tiene que:*

$$\beta(G \square H) \leq \beta(G) + |V(H)| - 2$$

Demostración. Sea $S = \{x_1, \dots, x_m\}$ una base de G y sean a y b dos vértices fijos de H donde $\delta(b) \geq 2$ (la existencia de b está asegurada porque $H \neq K_1, P_2$ siempre existe un vértice de valencia mayor o igual que 2 en un grafo conexo distinto de K_1 y P_2). El objetivo de la demostración es comprobar que $U = \{(x_i, a) : x_i \in S\} \cup \{(x_1, u) : u \in V(H), u \neq a, b\}$ resuelve a dos vértices cualesquiera $(x, u), (y, v) \in V(G \square H)$. Para ello estudiaremos todas las posibilidades, asumiendo de partida que ninguno de estos vértices pertenecen a U ya que de lo contrario el resultado sería inmediato.

Caso 1: Si $u = v$ entonces debe existir $x_i \in S$ que resuelva a x e y en G . Entonces tenemos $d((x, u), (x_i, a)) = d_G(x, x_i) \neq d_G(y, x_i) = d((y, u), (x_i, a))$ y por tanto (x_i, a) resuelve a (x, u) e (y, v) .

Caso 2: $v \neq b$. Si ambos vértices tienen la misma distancia a (x_1, u) entonces $d((x, u), (x_1, u)) = d_G(x, x_1) = d_G(y, x_1) + d_H(u, v) = d((y, v), (x_1, u))$. Pero la distancia a (x_1, v) tiene que ser distinta: $d((x, u), (x_1, v)) = d_G(x, x_1) + d_H(u, v) = d_G(y, x_1) + 2d_H(u, v) \neq d_G(y, x_1) = d((y, v), (x_1, v))$.

Caso 3: $u \neq b, v = b$. Aquí se pueden plantear tres situaciones:

Subcaso 3.1: Sea $d_H(u, v)$ par. Escojamos un camino mínimo entre u y v en H y sea w su vértice central, es decir $d_H(u, w) = d_H(v, w)$. Los vértices (x, u) e (y, v) tienen la misma distancia a (x_1, w) , esto es: $d((x, u), (x_1, w)) = d_G(x, x_1) + d_H(u, w) = d_G(y, x_1) + d_H(v, w) = d((y, v), (x_1, w))$ de lo que se deduce que $d_G(x, x_1) = d_G(y, x_1)$.

Sin embargo, entonces no pueden tener la misma distancia con (x_1, u) , ya que $d((x, u), (x_1, u)) = d_G(x, x_1) = d_G(y, x_1) \neq d_G(y, x_1) + d_H(v, u) = d((y, v), (x_1, u))$

Subcaso 3.2: Sea $d_H(u, v) \neq 1$ e impar. Escogemos de nuevo un camino mínimo en H entre u y v , y sean w_1 y w_2 los dos vértices centrales y adyacentes de ese camino de manera que $d_H(u, w_1) = d_H(v, w_2)$.

Si (x, u) e (y, v) distan lo mismo de (x_1, w_1) entonces: $d((x, u), (x_1, w_1)) = d_G(x, x_1) + d_H(u, w_1) = d_G(y, x_1) + d_H(v, w_1) = d((y, v), (x_1, w_1))$ de lo que se deduce que $d_G(x, x_1) = d_G(y, x_1) + 1$.

La distancia de ambos vértices con (x_1, w_2) tiene que ser distinta ya que:
 $d((x, u), (x_1, w_2)) = d_G(x, x_1) + d_H(u, w_2) = d_G(y, x_1) + d_H(u, w_2) + 1 = d_G(y, x_1) + d_H(v, w_2) + 2 \neq d_G(y, x_1) + d_H(v, w_2) = d((y, v), (x_1, w_2))$

Subcaso 3.3: Sea $d_H(u, v) = 1$. Se puede deducir fácilmente que $d_G(y, x_1) + 1 = d_G(x, x_1)$. Sea w un vértice adyacente a v y distinto de u . En ese caso la distancia de (x, u) e (y, v) hasta (x_1, w) será distinta. Veamos por qué: $d((y, v), (x_1, w)) = d_G(y, x_1) + 1 = d_G(x, x_1) \neq d_G(x, x_1) + d_H(u, w) = d((x, u), (x_1, w))$

Por tanto siempre se encuentra un vértice de U que resuelve a otros dos vértices dados, por tanto el conjunto U es un conjunto resolutivo de $G \square H$ y así $\beta(G \square H) \leq |U| = \beta(G) + |V(H)| - 2$. $\square$

3 CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

Queda todavía abierta la cuestión de dar una caracterización completa de los grafos infinitos con dimensión finita. Para ello, quizá podría ser interesante comprobar si la existencia de un subgrafo H en un grafo infinito G tal que $\beta(H) = +\infty$ asegura que $\beta(G) = +\infty$. Hasta la fecha no se conoce un contraejemplo aunque hemos mostrado que si las dimensiones son finitas, no se puede asegurar nada.

Otro problema abierto interesante es el de encontrar cotas superiores para la dimensión de G cuando es infinito, de manera similar a la cota del Teorema 3. Por último, habría que determinar la dimensión métrica de otros productos de grafos infinitos y finitos como por ejemplo $C_n \square P_{\infty, \infty}$, $K_n \square P_{\infty, \infty}$, $K_n \square G$ y $P_n \square G$ con G infinito, y otros muchos.

REFERENCIAS

- [1] Cáceres, J., Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I.M., Puertas, M.L., Seara C. y Wood, D. On the Metric Dimension of Cartesian Products of Graphs. *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, aceptado para su publicación.
- [2] König, D. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936; reimpresso por Chelsea, New York, 1950.
- [3] Nash-Williams, C. St. J. A., Infinite graphs - A Survey. *Journal of Combinatorial Theory*, **3** (1967), 286–301.
- [4] Gross, J., Yellen, J. *Graph Theory and its Applications*. CRC Press, Boca Raton, 1999.