
Producto fuerte de grafos: invariantes de convexidad y conjuntos fronterizos

J. Cáceres^{1*}, C. Hernando^{2**}, M. Mora^{2**}, I. Pelayo^{2***} y M.L. Puertas^{1*}

¹ Universidad de Almería. {jcaceres,mpuertas}@ual.es

² UPC {carmen.hernando,merce.mora,ignacio.m.pelayo}@upc.edu

Resumen. Este trabajo se enmarca dentro de la línea de investigación que desarrollamos en nuestro grupo desde hace varios años, alrededor de la idea de la reconstrucción de grafos mediante herramientas de convexidad. Dentro de este campo hemos estudiado distintos conjuntos de tipo fronterizo que pueden reconstruir la totalidad de un grafo utilizando bien la operación intervalo o bien la envolvente convexa.

En este trabajo ahondamos en estas ideas dentro de la clase de los grafos definidos mediante el producto fuerte. Nuestro estudio se centra en el comportamiento de los números geodético y envolvente, así como de la relación de distintos conjuntos frontera en el producto fuerte con sus homólogos en los factores.

Palabras clave: Producto fuerte, número geodético, número envolvente, conjuntos fronterizos.

1. Introducción

Este trabajo sigue la línea que nuestro grupo ha desarrollado en los últimos años alrededor de la idea de reconstrucción de un grafo mediante herramientas relacionadas con la convexidad, entendida esta de distintas formas: geodética, monofónica, o de tipo Steiner.

Así hemos estudiado distintos conjuntos, en general de tipo “fronterizo”, y distintas operaciones, de tipo “envolvente”, que permiten recuperar la totalidad del grafo. En este contexto es también habitual el estudio de ciertos invariantes asociados al grafo que reflejan el mínimo número de vértices necesarios para llevar a cabo dichas operaciones de reconstrucción. Los principales resultados que hemos obtenido en este tema puede verse en [2,3,4,5,12,15].

En este trabajo utilizaremos la convexidad geodésica, que se desarrolla alrededor de la idea de camino mínimo entre vértices. Estos conceptos fueron introducidos por Harary et al. en [11] y por Chartrand et al. en [9,10].

* Investigación financiada parcialmente por J.A. FQM305, MTM2005-08441-C02-01

** Investigación financiada parcialmente por DURSI 2005SGR00692 y MTM2006-01267

*** Investigación financiada parcialmente por MTM2005-08990-c02-01

Una primera tentativa de reconstrucción con herramientas de convexidad es la que se realiza mediante intervalos. Dado un grafo conexo G y dos vértices u, v en $V(G)$, el conjunto $I_G[u, v]$ se denomina *intervalo* y consiste en los vértices que pertenecen a algún camino mínimo entre u y v . Para un conjunto $S \subseteq V(G)$, el intervalo de S se define como $I_G[S] = \bigcup_{u, v \in S} I_G[u, v]$. Además se dice que S es *geodético* si se verifica que $I_G[S] = V(G)$ y se define $g(G)$, el *número geodético* de G , como el cardinal de un conjunto geodético mínimo.

Así pues podemos fijar nuestra atención en dos vertientes diferentes, por una parte está el problema de encontrar conjuntos geodéticos para familias de grafos concretas y por otro el calcular el número mínimo de vértices que se necesitan para obtener un conjunto de este tipo.

Esta misma línea de actuación puede llevarse a cabo mediante otra herramienta más compleja que el intervalo, como es la envolvente convexa. Un conjunto $C \subseteq V(G)$ es *convexo* si para cualquier par de vértices $u, v \in C$ se verifica que $I_G[u, v] \subseteq C$. La *envolvente convexa* de $S \subseteq V(G)$ es $co(S)$, el menor convexo que contiene a S . Así se dice que S es un *conjunto envolvente* si $co(S) = V(G)$ y el *número envolvente* $h(G)$ de G es el cardinal de un conjunto envolvente mínimo. Al igual que en el caso anterior, también aquí podemos centrarnos tanto en la búsqueda de conjuntos envolventes, como en el estudio del número envolvente del grafo.

Ambas vertientes, tanto con intervalos como con la envolvente convexa, las vamos a desarrollar en este trabajo para la familia de grafos construidos mediante el producto fuerte. Ambos puntos de vista ya se han estudiado en el contexto del producto cartesiano de grafos en [1,6,14], así como en grafos construidos con otras operaciones, como son la suma y la composición, en [7,8].

El producto fuerte $G \boxtimes H$ de dos grafos G y H es el grafo con conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ en el cual $(g, h), (g', h')$ son adyacentes si:

- $gg' \in E(G), h = h'$, o bien
- $g = g', hh' \in E(H)$, o bien
- $gg' \in E(G), hh' \in E(H)$

Una consecuencia inmediata es la relación de la distancia entre vértices del producto fuerte con las respectivas distancias en los factores:

$$d_{G \boxtimes H}((g, h), (g', h')) = \max\{d_G(g, g'), d_H(h, h')\}$$

De esta relación se deduce fácilmente que el diámetro del producto fuerte es el máximo del diámetro de los factores. Más información sobre esta operación de grafos puede encontrarse en [13].

2. Números geodético y envolvente del producto fuerte de grafos.

En esta sección nos vamos a ocupar del estudio de los números geodético y envolvente del producto fuerte. Para ambos invariantes encontramos cotas

tanto superiores como inferiores, y además el estudio de algunos ejemplos concretos nos proporcionará valores exactos que reflejan lo ajustado de dichas cotas.

Una primera observación sobre la relación de los conjuntos geodéticos en el producto fuerte y en sus factores nos deja el siguiente resultado.

Proposición 1. *Sean G y H dos grafos. Si $S_1 \subseteq V(G)$ es geodético en G y $S_2 \subseteq V(H)$ es geodético en H , entonces $S_1 \times S_2$ es geodético en $G \boxtimes H$.*

Esta relación no se conserva cuando hablamos de conjuntos geodéticos mínimos, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. El número geodético del producto de K_3 y C_4 es $g(K_3 \boxtimes C_4) = 4$, sin embargo $g(K_3) = 3$ y $g(C_4) = 2$. Por lo tanto el producto de conjuntos geodéticos mínimos no es mínimo en este caso.

La relación entre los intervalos del producto fuerte con los de sus factores va a resultar clave para abordar el estudio de ambos números, geodético y envolvente. Dicha relación se expresa en el siguiente Lema.

Lema 1. *Sean G y H dos grafos y $S_1 \subseteq V(G)$, $S_2 \subseteq V(H)$, entonces:*

$$I_G(S_1) \times I_H(S_2) \subseteq I_{G \boxtimes H}(S_1 \times S_2)$$

En una primer aplicación de este Lema, establecemos una cota superior y otra inferior del número geodético del producto fuerte de grafos, en función de los respectivos números de los factores.

Teorema 1. *Sean G y H dos grafos. Entonces:*

$$\min\{g(G), g(H)\} \leq g(G \boxtimes H) \leq g(G)g(H)$$

Dado que el producto fuerte de grafos completos es completo, la cota superior es ajustada, aunque dicha cota se alcanza en otros casos, como son el producto de dos caminos y el de un completo y un camino. Además el producto de un grafo completo y un ciclo, proporciona un ejemplo general de cómo el producto de conjuntos geodéticos mínimos no es necesariamente mínimo. Esto se recoge en el siguiente resultado.

Proposición 2. *Dados P_m, P_n caminos de longitud m y n respectivamente, K_m grafo completo con $m \geq 3$ vértices y C_n ciclo de longitud n , se verifica:*

$$1. g(P_m \boxtimes P_n) = g(P_m)g(P_n) = 4$$

$$2. g(K_m \boxtimes P_n) = g(K_m)g(P_n) = 2m$$

$$3. g(K_m \boxtimes C_n) = \begin{cases} 4 & \text{si } n \text{ es par} \\ 5 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Respecto el número envolvente del producto fuerte, se obtienen cotas inferior y superior similares el caso anterior.

Teorema 2. *Sean G y H dos grafos. Entonces:*

$$\min\{h(G), h(H)\} \leq h(G \boxtimes H) \leq h(G)h(H)$$

Algunos casos sencillos que nos indican la exactitud de las cotas. Al igual que para el número geodético, la cota superior es ajustada para el producto de dos grafos completos. Además el caso 2 de la siguiente Proposición muestra que la cota inferior también es ajustada.

Proposición 3. *Dados P_m camino de longitud m , K_m grafo completo con m vértices, $m \geq 3$ y C_n ciclo de longitud n , se tienen las siguientes igualdades:*

1. $h(P_m \boxtimes C_n) = h(C_n)$
2. $h(K_m \boxtimes C_n) = h(C_n)$

3. Conjuntos fronterizos del producto fuerte de grafos.

Esta sección la vamos a dedicar al estudio de los conjuntos de tipo frontera del producto fuerte. Este tipo de conjuntos ha demostrado su interés en las labores de reconstrucción, como puede verse en [2,3,4].

Para un grafo G , la *excentricidad* de un vértice $u \in V(G)$ se define como $ecc(u) = \max\{d(u, v) : v \in V(G)\}$. Además un vértice v se dice que es *excéntrico* de otro vértice u , si no hay otro vértice en $V(G)$ más alejado de u que v , esto es $ecc(u) = d(u, v)$. La relación de la excentricidad de un vértice en el producto fuerte con las respectivas excentricidades de sus proyecciones a los factores, se expresa de la siguiente forma

$$ecc_{G \boxtimes H}(g, h) = \max\{ecc_G(g), ecc_H(h)\}$$

Como es habitual, denotamos por $N_G(v)$ al conjunto de los vecinos de $v \in V(G)$. La frontera $\partial(G)$ de un grafo G es el conjunto

$$\partial(G) = \{v \in V(G) : \exists u \in V(G) \text{ tal que } \forall w \in N_G(v) : d(u, w) \leq d(u, v)\}$$

El contorno $Ct(G)$ de G se define como

$$Ct(G) = \{v \in V(G) : ecc(u) \leq ecc(v), \forall u \in N_G(v)\}$$

La excentricidad $Ecc(G)$ de G es el conjunto

$$Ecc(G) = \{v \in V(G) : \exists u \in V(G) \text{ tal que } ecc(u) = d(u, v)\}$$

Por último, la periferia $Per(G)$ de G es

$$Per(G) = \{v \in V(G) : ecc(u) \leq ecc(v), \forall u \in V(G)\}$$

Para estos conjuntos de tipo fronterizo, podemos analizar la relación entre los del producto fuerte y los de los factores.

Teorema 3. Sean G y H dos grafos con radios r_G y r_H respectivamente, entonces:

1. $\partial(G \boxtimes H) = (\partial(G) \times V(H)) \cup (V(G) \times \partial(H))$
2. $Per(G \boxtimes H) = (Per(G) \times V(H)) \cup (V(G) \times Per(H))$
3. $Ct(G \boxtimes H) = \{(x, y) \in G \boxtimes H : x \in Ct(G), ecc(y) < ecc(x)\} \cup \{(x, y) \in G \boxtimes H : y \in Ct(H), ecc(x) < ecc(y)\} \cup (Ct(G) \times Ct(H))$
4. $Ecc(G \boxtimes H) = \left[\left(\bigcup_{e(x) \geq r_H} Ecc(x) \right) \times V(H) \right] \cup \left[V(G) \times \left(\bigcup_{e(y) \geq r_G} Ecc(y) \right) \right]$

Como consecuencia obtenemos los siguientes casos particulares.

Corolario 1. Sean G y H dos grafos con radios r_G y r_H respectivamente y sea d_H el diámetro de H , entonces:

1. si $r_G > d_H$, entonces $Ct(G \boxtimes H) = Ct(G) \times V(H)$,
2. si $r_G = r_H$, entonces $Ecc(G \boxtimes H) = (Ecc(G) \times V(H)) \cup (V(G) \times Ecc(H))$.

Además, combinando el apartado 1 del Corolario anterior con el Lema 1, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4. Sea G un grafo con radio r_G y H un grafo con diámetro d_H .

1. Si $Ct(G)$ y $Ct(H)$ son geodéticos en G y H respectivamente, entonces $Ct(G) \times Ct(H)$ es geodético y por lo tanto también lo es $Ct(G \boxtimes H)$, que lo contiene como subconjunto.
2. Si $r_G > d_H$ y $Ct(G)$ es geodético si y sólo si $Ct(G \boxtimes H)$ es geodético.

4. Conjeturas y problemas abiertos.

En la Proposición 2, podemos observar el comportamiento del número geodético de productos donde uno de los factores es un camino. Esto nos lleva a plantearnos la siguiente conjetura, de una situación más general.

Conjetura 1. Si G es un grafo y P_n un camino de longitud n , se verifica:

$$g(G \boxtimes P_n) = g(G)g(P_n) = 2g(G)$$

También conjeturamos que la cota inferior para el número geodético que aparece en el Teorema 1 no es ajustada.

Conjetura 2. Sean G y H dos grafos, entonces

$$\min\{g(G), g(H)\} + 2 \leq g(G \boxtimes H)$$

Respecto al estudio de los conjuntos fronterizos, Bresat et al. muestran en [1] que el contorno del producto cartesiano de dos grafos es geodético si y sólo si el contorno en ambos factores también lo es. En esta misma línea, nosotros hemos obtenido en la Proposición 4, una equivalencia similar en un caso particular y condiciones suficientes para que el contorno del producto sea geodético en el caso general. Nos preguntamos si, dada la estructura compleja de este conjunto, es posible encontrar también condiciones necesarias generales.

Referencias

- [1] B. Bresar, S. Klavzar y A. Tepeh Horvat. On the geodetic number and related metric sets in Cartesian product graphs. *Discrete Mathematics*, in press.
- [2] J. Cáceres, C. Hernando, M. Mora, I. Pelayo, M.L. Puertas y C. Seara. On geodetic sets formed by boundary vertices. *Discrete Math.*, 306:188–198, 2006.
- [3] J. Cáceres, C. Hernando, M. Mora, I. Pelayo, M.L. Puertas y C. Seara. Geodeticity of the contour of chordal graphs *Discrete Applied Math.*, 156(7):1132–1142, 2008.
- [4] J. Cáceres, A. Márquez, O.R. Oellermann y M.L. Puertas. Rebuilding convex sets in graphs. *Discrete Mathematics*, 297:26–37, 2005.
- [5] J. Cáceres, A. Márquez y M.L. Puertas. Steiner distance and convexity in graphs. *European Journal of Combinatorics*, 29(3):726–736, 2008.
- [6] G.B. Cagaanan y S.R. Canoy. On the hull sets and hull number of the cartesian product of graphs *Discrete Mathematics*, 287(1–3):141–144, 2004.
- [7] S.R. Canoy y G.B. Cagaanan. On the hull number of the composition of graphs. *Ars Combinatoria*, 75:113–119, 2005.
- [8] S.R. Canoy, G.B. Cagaanan y S.V. Gervacio. Convexity, geodetic and hull numbers of the join of graphs. *Utilitas Mathematica*, 71:143–159, 2006.
- [9] G. Chartrand, F. Harary y P. Zhang. On the hull number of a graph. *Ars Combinatoria*, 57:129–138, 2000.
- [10] G. Chartrand, F. Harary y P. Zhang. On the geodetic number of a graph. *Networks*, 39(1):1–6, 2002.
- [11] F. Harary, E. Loukakis y C. Tsouros. The geodetic number of a graph. *Mathematical and Computer Modelling*, 17(11):89–95, 1993.
- [12] C. Hernando, T. Jiang, M. Mora, I. Pelayo y C. Seara. On the Steiner, geodetic and hull numbers of graphs. *Discrete Mathematics*, 293(1–3):139–154, 2005.
- [13] W. Imrich y S. Klavzar. *Product graphs: Structure and Recognition*. Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [14] T. Jiang, I. Pelayo y D. Pritikin. Geodesic convexity and cartesian products in graphs. *Preprint*
- [15] O.R. Oellermann y M.L. Puertas. Steiner intervals and Steiner geodetic numbers in distance-hereditary graphs. *Discrete Mathematics*, 307:88–96, 2007.