

Grafos de orden máximo y mínimo con diámetro y dimensión métrica fijados*

Carmen Hernando, Mercè Mora,
Ignacio M. Pelayo, Carlos Seara, David R. Wood

Universitat Politècnica de Catalunya
carmen.hernando@upc.edu, merce.mora@upc.edu,
ignacio.m.pelayo@upc.edu, carlos.seara@upc.edu, david.wood@upc.edu

Abstract. A set of vertices S *resolves* a graph G if every vertex is uniquely determined by its vector of distances to the vertices in S . The *metric dimension* of G is the minimum cardinality of a resolving set of G . This paper studies the maximum and the minimum number of vertices in a graph with given metric dimension and diameter.

1. Introducción

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo de orden $|G| = |V| = n$. Dados dos vértices $x, y \in V$, la distancia entre x e y , $d(x, y)$, es el número de aristas de un camino corto entre x e y . El diámetro D de G es el máximo valor de la distancia entre dos vértices de G , $D = \max\{d(x, y), x, y \in V\}$. Un vértice $x \in V$ resuelve un par de vértices $u, v \in V$ si $d(x, u) \neq d(x, v)$. Un conjunto S , $S \subset V$, resuelve G , si para todo par de vértices de G existe un vértice de S que los resuelve. La dimensión métrica de G es el cardinal mínimo que tiene un conjunto S que resuelve G , $\beta = \min\{|S|, S \text{ resuelve } G\}$. Diremos que un conjunto S , $S \subset V$, es una base si S resuelve G y $|S| = \beta$.

Vamos a estudiar la relación entre el orden, el diámetro y la dimensión métrica de un grafo G . Unificamos resultados previos en el siguiente teorema.

Teorema 1. [1, 2, 3] *Sea G un grafo de orden n , diámetro D y dimensión métrica β . Se cumple que:*

- (i) $\beta \leq n - D$,
- (ii) $n \leq D^\beta + \beta$.

*Investigación realizada con la subvención de los siguientes proyectos: MCYT FEDER BFM 2003-00368, Gen Cat 2001SGR00224, MCYT HU2002-0010, MTM 2004-07891-C02-01, MEC SB2003 0270, MCYT FEDER BFM2003-00368 y Gen Cat 2001SGR00224.

Del resultado anterior, se obtiene que el orden de un grafo está acotado de la siguiente forma:

$$\beta + D \leq n \leq \beta + D^\beta. \quad (1)$$

En este trabajo vamos a ver si estas cotas se alcanzan. En la Sección 2 demostraremos que la cota inferior de (1) se alcanza para cualquier valor de β y D . No sucede lo mismo con la cota superior. Concretamente estudiaremos para que valores de β y D la cota superior dada en (1) es ajustada; para el resto de valores de β y D mejoraremos la acotación. En la Sección 3, dados β y D números enteros positivos cualesquiera, se caracterizan los grafos que tienen orden n , diámetro D , dimensión métrica β y que verifican $n = \beta + D$. Finalmente se plantean algunos problemas abiertos en la Sección 4. Se omiten algunas demostraciones debido al espacio reducido.

2. Acotación del orden

Sea $\mathcal{G}_{D,\beta}$ el conjunto de los grafos de diámetro D y dimensión métrica β . Usamos la siguiente notación:

$$A(\beta, D) = \min\{|G|, G \in \mathcal{G}_{D,\beta}\} \quad B(\beta, D) = \max\{|G|, G \in \mathcal{G}_{D,\beta}\}$$

Por (1), sabemos que: $\beta + D \leq A(\beta, D) \leq n \leq B(\beta, D) \leq \beta + D^\beta$.

Observación 1. $\beta + D = \beta + D^\beta$ si y solo si $\beta = 1$ o $D = 1$.

Se sabe que $\beta = 1$ si y solo si el grafo es un grafo camino, y que $D = 1$ si y solo si el grafo es un grafo completo. En ambos casos se alcanzan las cotas dadas.

2.1. Cota inferior

En cuanto a la cota inferior se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2. Para todo $\beta \geq 1$, $D \geq 1$, se verifica $A(\beta, D) = \beta + D$.

Demostración. Basta considerar el grafo $G_{r,s}$ que se obtiene del camino de longitud r , P_r , al substituir uno de los extremos por s hojas (ver Figura 1).

Se comprueba fácilmente que cualquier conjunto de s hojas es una base de $G_{r,s}$. Así pues la dimensión métrica de $G_{r,s}$ es s , su diámetro es r y su orden es $r + s$. $\square$

En la Sección 3 se estudian y caracterizan todos los grafos que verifican que su orden es $A(\beta, D)$.

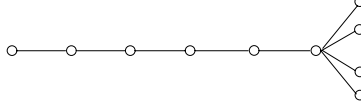


Figura 1: Grafo $G_{6,4}$.

2.2. Cota superior

En cuanto a la cota superior los resultados obtenidos son los siguientes.

Teorema 3. $B(\beta, D) = \beta + D^\beta$ si y solo si $D \leq 3$ o $\beta = 1$.

Demostración. Veamos primero que la cota no se alcanza si $D \geq 4$. Supongamos (para cualquier valor de β) que existe un grafo $G = (V, E)$ tal que $n = \beta + D^\beta$. Sea $S = \{a_1, \dots, a_\beta\}$ una base de G . Para todo $v \in V$, sea $\vec{v}$ el vector de las distancias de v a los vértices de S , es decir, $\vec{v} = (d(v, a_1), \dots, d(v, a_\beta))$.

Decir que $|G| = \beta + D^\beta$ es equivalente a decir que existen vértices en G con todas las posibles coordenadas; es decir, existe $v \notin S$ tal que $d(v, a_i) = j$, para todo $i = 1, \dots, \beta$ y para todo $j = 1, \dots, D$. En particular existen vértices $x, y, z \in V$ tales que sus vectores distancia a los vértices de S son: $\vec{x} = (1, 1, \dots)$, $\vec{y} = (1, 4, \dots)$ y $\vec{z} = (4, 1, \dots)$. En este caso

$$\begin{aligned} d(x, a_1) &= 1, & d(y, a_1) &= 1, & d(z, a_1) &= 4, \\ d(x, a_2) &= 1, & d(y, a_2) &= 4, & d(z, a_2) &= 1, \end{aligned}$$

pero entonces obtenemos la siguiente contradicción:

$$4 = d(z, a_1) \leq d(z, a_2) + d(a_2, a_1) \leq d(z, a_1) + d(a_2, x) + d(x, a_1) = 3.$$

Veamos ahora que para $D = 2$ y $D = 3$ si se alcanza la cota, esto es, que $B(\beta, D) = \beta + D^\beta$, para cualquier valor de β . Para ello, construimos los grafos $G(r, k)$, para $k = 2$ o $k = 3$, de la siguiente forma.

En una malla k -dimensional consideramos los vértices de coordenadas $(x_1, \dots, x_k)$ con $1 \leq x_i \leq r$ y los vértices u_i , $i = 1, \dots, k$ con coordenada i -ésima nula y todas las demás igual a 2. Estos son los vértices de $G(r, k)$. Las adyacencias son las siguientes: dos vértices $x, y \in G(r, k)$ son adyacentes si y solo si $|x_i - y_i| \leq 1$, $\forall i = 1, \dots, k$ (ver Figuras 2 y 3).

Se comprueba que el diámetro del grafo $G(r, k)$ es r y que el conjunto $S = \{u_1, \dots, u_k\}$ es una base de $G(r, k)$. De donde obtenemos que $D = r$, $\beta = k$, y $|G(r, k)| = k + r^k = \beta + D^\beta$. $\square$

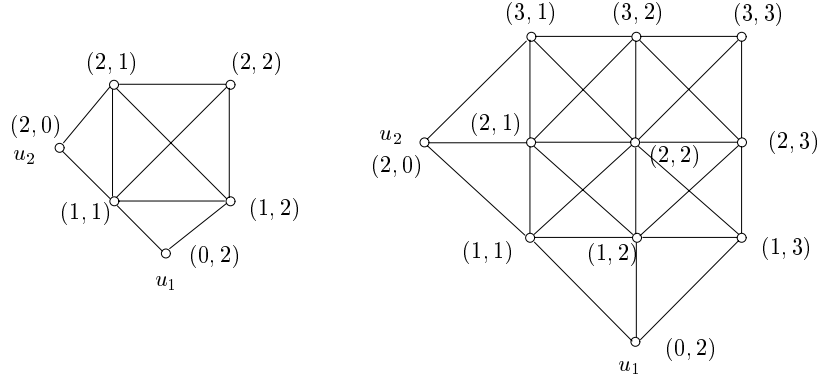


Figura 2: Grafos $G(2,2)$ (izquierda) y $G(3,2)$ (derecha).

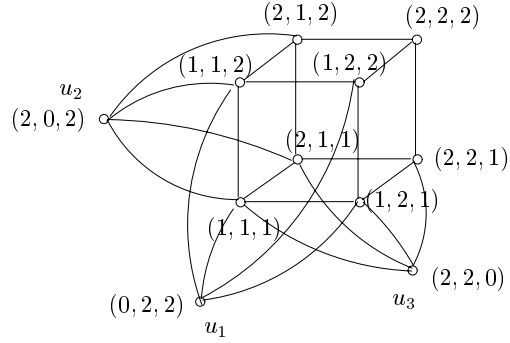


Figura 3: Grafo $G(2,3)$ (los vértices del cubo son todos adyacentes).

En la Tabla 1 se dan los valores de la función $f(\beta, D) = \beta + D^\beta$ para valores pequeños de β y D .

Para los valores $\beta \geq 2$ y $D \geq 4$ no existen grafos G con diámetro D , dimensión métrica β y $|G| = f(\beta, D)$. En general, para $D \geq 4$ hemos obtenido una cota superior del orden que es más ajustada que la dada en la ecuación (1).

Teorema 4. Sea G un grafo de orden n , diámetro $D \geq 4$ y dimensión métrica β . Entonces $B(\beta, D) \leq 2 \left(\frac{2D+4}{3} \right)^\beta$.

Para algunos valores de β y D se han obtenido resultados más precisos. Algunos de ellos se presentan en la Tabla 2.

$\beta \backslash D$	1	2	3	4	5	
1	2	3	4	5	6	$\rightarrow P_n$
2	3	6	11	18	27	
3	4	11	30	67	128	
4	5	20	85	260	629	
5	6	37	248	1029	3130	
6	7	70	735	4102	15631	
7	8	135	2194	16391	78132	
8	9	264	6569	65544	390633	
9	10	521	19692	262153	1953134	
	$\downarrow$					
	K_n	no se alcanza la cota				

Tabla 1: $f(\beta, D) = \beta + D^\beta$.

Diámetro	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$2 + D^2$	18	27	38	51	66	83	102	123	146	171	198	227
$B(2, D)$	17	24	33	43	54	67	81	96	113	131	150	171

Tabla 2: Tabla de valores para $\beta = 2$.

3. Familias de grafos con orden mínimo

En esta sección vamos a caracterizar todos los grafos G que con un diámetro D y una dimensión métrica β dada, tienen un mínimo número de vértices; esto es $|G| = n = \beta + D$. Si $D = 1$, entonces el grafo es un grafo completo K_n y la dimensión métrica es $n - 1$, luego se verifica $n = (n - 1) + 1 = \beta + D$. Análogamente, si $D = n - 1$, el grafo es un grafo camino P_n , cuya dimensión métrica es 1, cumpliendo también que $n = 1 + (n - 1) = \beta + D$.

Khuller et al. [1] caracterizaron los grafos de orden n y dimensión métrica $n - 2$ (y diámetro 2), obteniendo el siguiente resultado.

Teorema 5. [1] *Sea G un grafo conexo de orden n y dimensión métrica β . Entonces*

$$\beta = n - 2 \iff \begin{cases} 1) & G = K_{s,t} & (s, t \geq 1) \\ 2) & G = K_s + N_t & (s \geq 1, t \geq 2) \\ 3) & G = K_s + (K_1 \cup K_t) & (s, t \geq 1) \end{cases}$$

Vamos ahora a estudiar el caso general con $D \geq 3$. Notamos por $N(v)$ el conjunto de vecinos de $v \in V$. Diremos que $u, v \in V$ son *gemelos* si

y solo si $N(v) = N(u)$. Si además u y v son adyacentes diremos que son *gemelos adyacentes*.

Observación 2. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo, $u, v \in V$ vértices gemelos y $W \subset V$ un conjunto de vértices que resuelve G . Entonces:

1. $\forall x \in V, x \notin \{u, v\}, d(u, x) = d(v, x)$.
2. $u \in W$ o $v \in W$.
3. Si $u \in W$ y $v \notin W$ entonces $(W \setminus u) \cup \{v\}$ resuelve G .
4. Si $\{u_1, \dots, u_r\}$ es un conjunto de vértices gemelos, entonces

$$|\{u_1, \dots, u_r\} \cap W| \geq r - 1.$$

5. Si $\{u_1, \dots, u_r\}$ es un conjunto de vértices gemelos, $k \geq 3$, entonces la dimensión métrica de $G \setminus \{u_{i_1}, \dots, u_{i_{k-2}}\}$ es $\beta - (k - 2)$, siendo β la dimensión métrica de G .
6. Sean $S_1, \dots, S_r$ diferentes conjuntos de vértices gemelos y sea $T_i \subset S_i$ tal que $|T_i| = |S_i| - 2 \geq 0$ ($i = 1, \dots, r$). Sea $G^* = G \setminus \{T_1 \cup \dots \cup T_r\}$. Entonces $n - \beta = n^* - \beta^*$, siendo $n = |G|$, $n^* = |G^*|$, β y β^* las dimensiones métricas respectivas de G y G^* .

Dado $G = (V, E)$ podemos considerar en el conjunto V la siguiente relación de equivalencia: $u \equiv v$ si y solo si u, v son gemelos. Sea $V^* = \{V_1, \dots, V_k\}$ la partición de V inducida por esta relación de equivalencia. Definimos el *grafo de gemelos de G* , G^* , como el grafo que tiene por conjunto de vértices V^* y dos vértices $V_i, V_j \in V^*$ son adyacentes si y solo si u_i y u_j son adyacentes en G , siendo $u_i \in V_i$ y $u_j \in V_j$.

Hay tres tipos de vértices diferentes en G^* . Si $V_i \in V^*$ puede ser que $|V_i| = 1$ o bien que $|V_i| \geq 2$ y entonces el grafo que induce V_i es nulo o es un completo. Para diferenciar estas situaciones distinguimos los tres siguientes tipos de vértices V_i (ver Figura 4):

$$\begin{aligned} (1) & \iff |V_i| = 1 \\ (K) & \iff |V_i| = r \geq 2 \text{ y } \langle V_i \rangle \simeq K_r \\ (N) & \iff |V_i| = r \geq 2 \text{ y } \langle V_i \rangle \simeq N_r \end{aligned}$$

Vamos a caracterizar todos los grafos de diámetro D , orden n y dimensión métrica $n - D$ a partir del grafo de gemelos.

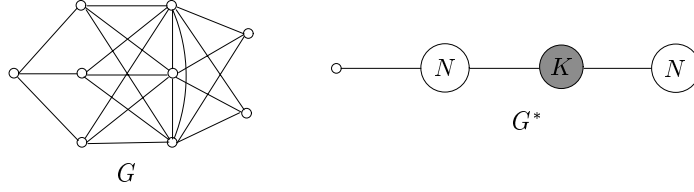


Figura 4: Un grafo G y su grafo de gemelos G^* .

Observación 3. Sea G un grafo de diámetro $D \geq 3$ y sea G^* su grafo de gemelos. Entonces el diámetro de G^* es también D .

Teorema 6. Sea G un grafo de orden n y diámetro D . Si la dimensión métrica de G es $n - D$, entonces el grafo de gemelos de G , G^* , es isomorfo a uno de los siguientes grafos (ver Figura 5):

G_1 : camino de longitud D : $P_{D+1} = u_0 \sim u_1 \sim \dots \sim u_D$.

G_2 : grafo obtenido al añadir al camino P_{D+1} un vértice de grado 1 adyacente a u_i , $2 \leq i \leq D - 2$.

G_3 : grafo obtenido al añadir al camino P_{D+1} un vértice adyacente a dos vértices consecutivos de P_{D+1} , u_i, u_{i+1} , $1 \leq i \leq D - 2$.

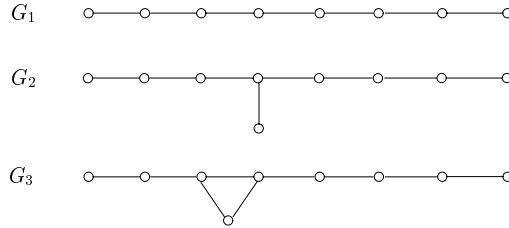


Figura 5: Grafos de gemelos del Teorema 6.

Teorema 7. Sea G un grafo de orden n y diámetro D . La dimensión métrica de G es $n - D$ si y solo si el grafo de gemelos G^* es uno de los siguientes grafos:

1. G^* es isomorfo a G_1 y se verifica una de las siguientes condiciones:
 - (a) Todos los vértices de V^* son del tipo (1), salvo a lo más un vértice (que puede ser del tipo (N) o (K)).

- (b) Hay exactamente dos vértices de V^* que no son de tipo (1). En este caso pueden suceder los siguientes casos:
- i. Son dos vértices consecutivos; ninguno de ellos es hoja.
 - ii. Son dos vértices consecutivos; uno de ellos es una hoja. Supuesto que la hoja sea el segundo, pueden ser del tipo: $(N)(N)$, $(K)(N)$ o $(K)(K)$.
 - iii. No son vértices consecutivos. En este caso tienen que estar a distancia 2 y ambos han de ser de tipo (N).
- (c) Hay exactamente tres vértices de V^* que no son de tipo (1). En este caso tienen que ser consecutivos: V_i, V_{i+1}, V_{i+2} ; siendo V_i y V_{i+2} del tipo (N), y V_{i+1} puede ser (N) o (K).
2. G^* es isomorfo a un grafo del tipo G_2 y todos los vértices son del tipo (1) excepto el vértice de grado 3 que puede ser del tipo (1), (N) o (K) y los vértices adyacentes a este, que pueden ser de tipo (1) o (N).
3. G^* es isomorfo a un grafo de tipo G_3 y todos los vértices son de tipo (1), excepto los dos vértices de grado 3 y el vértice adyacente a ambos, que puede ser de tipo (1) o (K).

4. Problemas abiertos

Después de caracterizar los grafos de orden mínimo, con diámetro y dimensión métrica dados, el trabajo inmediato es el siguiente.

- (i) Obtener cotas superiores más ajustadas.
- (ii) Probar la existencia de grafos donde $|G|$ sea del orden de $\left(\frac{2D}{3}\right)^\beta$.
- (iii) Caracterizar los grafos que alcanzan la cota superior.

Referencias

- [1] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, and O. R. Oellermann. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Appl. Math.*, 105(1-3): 99–113, 2000.
- [2] S. Khuller, B. Raghavachari, and A. Rosenfeld. Landmarks in graphs. *Discrete Appl. Math.*, 70(3): 217–229, 1996.
- [3] S. V. Yushmanov. Estimates for the metric dimension of a graph in terms of the diameters and the number of vertices. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, 103: 68–70, 1987.