

Estudio del contorno en grafos cordales *

J. Cáceres[†] C. Hernando[‡] M. Mora[§] I. M. Pelayo[¶]
M. L. Puertas^{||} C. Seara^{**}

Resumen

La convexidad usual se puede trasladar a grafos de forma natural considerando caminos de longitud mínima. Un conjunto S de vértices de un grafo es geodético si todo vértice del grafo está en algún camino mínimo que conecta vértices de S . Un problema interesante es encontrar conjuntos geodéticos de cardinal mínimo, ya que nos permiten reconstruir el grafo considerando caminos mínimos entre sus vértices. En este trabajo se demuestra que en la clase de grafos cordales el contorno de un grafo, introducido en [2], es geodético.

1 Introducción

La convexidad usual de R^n se puede trasladar a grafos de forma natural considerando caminos de longitud mínima, de modo que un conjunto S de vértices de un grafo será convexo si los vértices que están en caminos mínimos que unen vértices de S , son también de S . Supondremos, si no se indica lo contrario, que G es un grafo finito conexo G . Si dos vértices $u, v \in V(G)$ son adyacentes, o vecinos, lo escribiremos $u \sim v$. Una *geodésica* es un camino de longitud mínima entre dos vértices. El intervalo geodético cerrado de u, v , $I[u, v]$, es el conjunto de vértices

*Parcialmente subvencionado por los proyectos Gen Cat DURSI201SGC00224, MCYT BFM203-0368, MCYT-FEDER TIC-2001-2171.

[†]Depto. de Estadística y Matemática Aplicada, Univ. de Almería, e-mail: jcaceres@ual.es

[‡]Depto de Matemática Aplicada I, U.P.C., e-mail: carmen.hernando@upc.es

[§]Depto. de Matemática Aplicada II, U.P.C., e-mail: merce.mora@upc.es

[¶]Depto. de Matemática Aplicada III, U.P.C., e-mail: ignacio.m.pelayo@upc.es

^{||}Depto. de Estadística y Matemática Aplicada, Univ. de Almería, e-mail: mpuertas@ual.es

^{**}Depto. de Matemática Aplicada II, U.P.C., e-mail: carlos.seara@upc.es

que están en alguna geodésica que conecte u y v . Para $S \subset V(G)$, definimos la *clausura convexa* de S como $I[S] = \cup_{u,v \in S} I[u, v]$. Con estas notaciones, un conjunto $S \subset V(G)$ es *convexo* si $I[S] = S$, y es *geodético* si $I[S] = V(G)$. La *envolvente convexa* de $S \subset V(G)$, $[S]$, es el menor convexo que lo contiene. La envolvente convexa de S es la unión de las clausuras convexas sucesivas de S , $[S] = \bigcup_{k \geq 1} I^k[S]$.

Un problema interesante es encontrar conjuntos de vértices de cardinal mínimo que sean geodéticos, ya que los caminos mínimos entre sus vértices generan todos los vértices del grafo. En [2] se define el *contorno* de un grafo, $Ct(G)$, y se deduce que la envolvente convexa de $Ct(G)$ es $V(G)$. En [4] se demuestra que todo vértice de un grafo está en algún camino sin cuerdas con extremos en el contorno. Recordemos que la *excentricidad* de un vértice $u \in V(G)$ se define como $ecc(u) = \max\{d(u, x) : x \in V(G)\}$. El *contorno* de G está formado por los vértices que tienen excentricidad mayor o igual que la de todos sus vecinos, $Ct(G) = \{u \in V(G) : ecc(u) \geq ecc(x), \forall x \in V(G), x \sim u\}$. Diremos que un vértice v es *excéntrico* de u si $d(u, v) = ecc(u)$. Un vértice u es *simplicial* o *extremo* si u y sus vecinos forman un subgrafo completo.

Es fácil comprobar que los vértices extremos son del contorno. Un conjunto geodético contiene siempre los vértices extremos, aunque, en general, no bastan para obtener un conjunto geodético. De hecho, en algunos grafos no existen vértices extremos. El contorno no es en general un conjunto geodético, pero es natural preguntarse si lo es en alguna clase concreta de grafos.

En este trabajo se demuestra que *en la clase de grafos cordales el contorno es geodético*. Los grafos cordales son importantes por sus aplicaciones y han sido extensamente estudiados [1], [3]. Un grafo es *cordal* si no tiene ciclos inducidos de longitud mayor o igual que cuatro. Los grafos cordales se pueden representar mediante grafos intersección [5]. Dada una familia $\mathcal{F}$ de objetos, no necesariamente distintos, para los cuales tiene sentido la intersección, el grafo intersección $\Omega(\mathcal{F})$ tiene $\mathcal{F}$ por conjunto de vértices y dos vértices $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}$ son adyacentes si, y sólo si, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Los grafos cordales se pueden representar como grafo intersección de subárboles de un árbol. Un caso particular de los grafos cordales son los grafos intervalo, que se obtienen como grafo intersección de subcaminos de un camino.

Por razones de claridad, se demuestra primero, en la Sección 2, que el contorno de un grafo intervalo es geodético. A continuación, en la Sección 3 se prueba, utilizando técnicas similares, que el contorno de un grafo cordal es geodético.

2 Contorno en grafos intervalo

Para demostrar que el contorno de un grafo intervalo es geodético, probaremos en primer lugar un resultado válido para cualquier grafo conexo.

Lema 2.1. *Sea G un grafo conexo y $u \in V(G)$. Supongamos que $u = u_0 \sim u_1 \sim \dots \sim u_n$ es un camino de G tal que $\text{ecc}(u_{i+1}) = \text{ecc}(u_i) + 1$ para $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Entonces, para cada vértice x excéntrico de u_n existe un camino mínimo entre x y u_n que contiene u .*

Demostración. Sea x un vértice excéntrico de u_n y $d(u_n, x) = \text{ecc}(u_n) = k$. Por hipótesis, $\text{ecc}(u) = k - n$. Supongamos que el vértice x no es excéntrico de u . Consideremos un camino mínimo entre x y u de longitud $d(x, u) < k - n$. El camino $x \sim \dots \sim u \sim u_1 \sim u_2 \sim \dots \sim u_n$ tiene longitud $d(x, u) + n < k - n + n = k$, lo cual contradice que x es excéntrico de u_n . Por tanto, $d(x, u) = \text{ecc}(u) = k - n$ y u está en un camino mínimo entre x y u_n . $\square$

Los grafos intervalo son un caso particular de los grafos cordales. Un grafo intervalo es el grafo intersección de subintervalos de un intervalo de la recta real. En esta sección utilizaremos una representación equivalente como grafo intersección de subcaminos de un camino. Sea G un grafo intervalo dado como un grafo intersección de subcaminos del camino $P = p_1 \sim p_2 \sim \dots \sim p_n$. El camino P induce un orden en el conjunto de vértices $V(P)$: dados dos vértices $x, y \in V(P)$, $x \leq y$ si, y sólo si, $x = P_i$, $y = P_j$ con $i \leq j$, de forma que todo vértice u de G se puede representar como un subcamino $a(u) - b(u)$ de P , con $a(u) \leq b(u)$. Obsérvese que dos vértices $u, v \in G$ son adyacentes si, y sólo si, $a(u) \leq b(v)$ y $a(v) \leq b(u)$ (Figura 1).

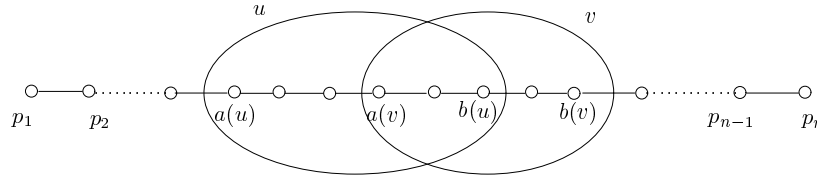


Figura 1: u, v vértices adyacentes.

Diremos que $v \in V(G)$ es un vértice *izquierdo* de G si $b(v) = \min\{b(u) : u \in V(G)\}$. Análogamente, $w \in V(G)$ es un vértice *derecho* si $a(w) = \max\{a(u) : u \in V(G)\}$.

Lema 2.2. *Todo vértice izquierdo (derecho) de un grafo intervalo G es del contorno de G .*

Demostración. Sea u un vértice izquierdo de un grafo intervalo G y x, y dos vecinos cualesquiera de u en G . Se tiene $a(x) \leq b(u) \leq b(x)$ y $a(y) \leq b(u) \leq b(y)$, es decir, x e y tienen en común el vértice $b(u)$ de P y, por tanto, son adyacentes en G . Esto prueba que u es un vértice extremo, y consecuentemente, del contorno de G . De forma similar se comprueba que los vértices derechos son del contorno. $\square$

Lema 2.3. *Todo vértice de un grafo intervalo tiene al menos un vértice excéntrico que es izquierdo o derecho.*

Demostración. Sea $u \in V(G)$ y x_u un vértice excéntrico de u que no es vértice izquierdo ni vértice derecho. Si $a(x_u) \leq a(u)$ y $b(u) \leq b(x_u)$, entonces $d(u, x_u) = ecc(u) = 1$, con lo cual todos los vértices del grafo son excéntricos de u . Supongamos que $b(x_u) < b(u)$. Consideremos un vértice izquierdo v y un camino mínimo P' entre v y u . Observemos que la unión de los vértices de P' forma un camino de P . Por ser $b(v) < b(x_u) < b(u)$ existe al menos un vértice $w \in V(P') \setminus v$ adyacente a x_u . Por tanto $d(x_u, u) \leq d(x_u, w) + d(w, u) \leq 1 + d(w, u) \leq d(v, u) \leq ecc(u) = d(x_u, u)$, de donde se deduce que v es excéntrico de u . Si $a(u) < a(x_u)$ se demuestra de forma análoga. $\square$

Teorema 2.4. *El contorno de un grafo intervalo es geodético.*

Demostración. Sea G un grafo intervalo y $u \in V(G)$. Veremos que si u no es del contorno, está en un camino mínimo que une vértices del contorno. Observemos que si un vértice x no es del contorno, tiene al menos un vecino y tal que $ecc(y) = ecc(x) + 1$. Si u no es del contorno, esta observación nos permite construir un camino $u = u_0 \sim u_1 \sim \dots \sim u_n$ tal que u_n es del contorno y $ecc(u_{i+1}) = ecc(u_i) + 1$ para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Por el Lema 2.3 existe un vértice v excéntrico de u_n que es vértice izquierdo o derecho, y que además es del contorno por el Lema 2.2. Por el Lema 2.1, u está en un camino mínimo entre los vértices v y u_n del contorno. $\square$

3 Contorno en grafos cordales

En esta sección se demuestra que el contorno de un grafo cordal es geodético con técnicas parecidas a las anteriores. Un grafo cordal G es un grafo intersección

$\Omega(\mathcal{F})$, donde $\mathcal{F}$ es una familia de subárboles, no necesariamente distintos, de un árbol T , que llamaremos *árbol base* de G . Por tanto, los vértices de G son subárboles de T , y dos vértices de G son adyacentes si los subárboles correspondientes tienen al menos un vértice común.

Si T es el árbol base de G , representamos por T_u el subárbol formado únicamente por el vértice u de T . Veremos que los subárboles T_u , donde u es una hoja de T , juegan un papel esencial. Sea $n(G)$ el número de hojas u de T tales que el subárbol T_u no es vértice de G . Demostraremos que siempre se puede representar un grafo cordal como grafo intersección G de subárboles de un árbol T de modo que para toda hoja u de T , T_u es vértice de G , es decir, $n(G) = 0$.

Lema 3.1. *Todo grafo cordal admite una representación como grafo G intersección de subárboles de un árbol T tal que $n(G) = 0$.*

Demostración. Consideremos un grafo intersección G de subárboles de un árbol base T . Si $n(G) > 0$, existe al menos una hoja u de T tal que T_u no es vértice de G . Consideremos el camino único en T , $u = u_0 \sim u_1 \sim u_2 \sim \dots \sim u_h \sim v$ tal que $g_T(v) \geq 3$ y $g_T(u_i) = 2$ para todo $i \in \{1, \dots, h\}$. Según el caso, modificaremos el árbol base T y los vértices de $G = \Omega(\mathcal{F})$ para obtener un grafo intersección $G' = \Omega(\mathcal{F}')$ que representará el mismo grafo cordal original, pero con $n(G') < n(G)$:

- Si $u_0, u_1, u_2, \dots, u_h$ no son de ningún vértice de G podemos suprimirlos de T sin que por ello se modifique el grafo intersección.
- Si no hay ningún vértice de G totalmente contenido en el camino inducido por $u_0, u_1, u_2, \dots, u_h$ en T , significa que todos los vértices de G que contienen alguno de estos vértices deben contener también el vértice v , ya que en caso contrario no podrían ser subárboles (conexos) de T . En este caso suprimimos los vértices $u_0, u_1, u_2, \dots, u_h$ de T y de los vértices de G correspondientes. Las adyacencias se mantienen en el nuevo grafo intersección ya que todos los vértices de G modificados contenían el vértice v (Figura 2a).
- Si hay al menos un vértice de G totalmente contenido en el camino inducido por $u_0, u_1, u_2, \dots, u_h$ en T , consideremos el mayor índice j , $0 \leq j < h$, tal que no hay ningún vértice de G totalmente contenido en el camino inducido por $u_0, u_1, u_2, \dots, u_j$. Es decir, para algún i , $0 \leq i \leq j$, el camino inducido por $u_i, \dots, u_{j+1}$ es un vértice de G . Por otra parte, todos los vértices de G que contienen alguno de los vértices de $u_0, u_1, u_2, \dots, u_j$ deben contener también el vértice u_{j+1} . Por tanto, si suprimimos los vértices

$u_0, u_1, u_2, \dots, u_j$ de T y de los vértices de G correspondientes, el nuevo grafo intersección es equivalente al anterior. Además, u_{j+1} es una hoja de $T \setminus \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_j\}$ y el subárbol $T_{u_{j+1}}$ es vértice del nuevo grafo intersección (Figura 2b).

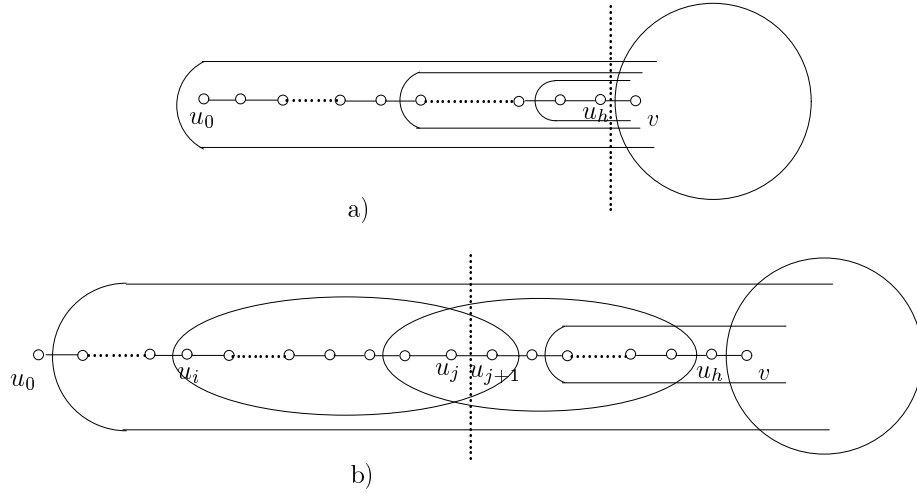


Figura 2:

En cualquiera de los tres casos se obtiene un grafo intersección G' isomorfo al anterior en el cual $n(G') = n(G) - 1$. Si $n(G') > 0$ repetimos el proceso, y así sucesivamente hasta obtener un grafo intersección equivalente, G^* , con $n(G^*) = 0$. $\square$

A partir de ahora, supondremos que G es un grafo cordal representado por un grafo intersección de subárboles de un árbol T que cumple la condición del lema anterior, $n(G) = 0$.

Lema 3.2. *Para toda hoja u de T , T_u es vértice del contorno de G .*

Demostración. Los vértices adyacentes a T_u son subárboles de T que contienen el vértice u , por lo cual todos ellos son adyacentes entre sí. Por tanto, T_u es un vértice extremo y, consecuentemente, del contorno de G . $\square$

Lema 3.3. *Todo vértice de G tiene al menos un vértice excéntrico de tipo T_u , donde u es una hoja de T .*

Demostración. Sea T_1 un vértice cualquiera de G y T_2 un vértice excéntrico de T_1 . Sea $d(T_1, T_2) = ecc(T_1) = k$. Tomemos dos vértices cualesquiera $x \in V(T_1)$ e $y \in V(T_2)$, y consideremos el camino único en T que une x e y . Si y no es una hoja de T , podemos alargar el camino hasta llegar a un vértice u que sea una hoja de T (Figura 3).

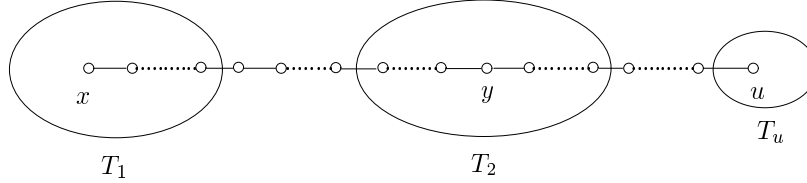


Figura 3:

Si y es una hoja, $u = y$. Denotamos por P este camino de x a u . Supongamos que $d(T_1, T_u) = h < k$, es decir, existe un camino $T_1 = S_0 \sim S_1 \sim S_2 \sim \dots \sim S_h = T_u$ en G . Observemos que el subgrafo inducido por $W = \bigcup_{i=0}^h V(S_i)$ en T es conexo. Por ser x y u vértices de W , esto sólo es posible si W contiene todos los vértices de P . Concretamente, $y \in V(P) \subset W$, es decir, $y \in V(S_j)$ para algún $j \in \{0, 1, \dots, h\}$. Si $j < h$, se obtendría un camino $T_1 = S_0 \sim S_1 \sim \dots \sim S_j \sim T_2$ de longitud $j+1 \leq h < k$, lo cual contradice que T_2 es excéntrico de T_1 . Si $j = h$, significa que $y \in V(S_j) = V(T_u)$, es decir, $y = u$. En este caso, $y = u \in S_{h-1}$ por ser S_{h-1} adyacente a $S_h = T_u$, con lo cual se puede construir el camino $T_1 = S_0 \sim S_1 \sim \dots \sim S_{h-1} \sim T_2$ de longitud $h < k$, y llegamos de nuevo a una contradicción. $\square$

Teorema 3.4. *El contorno de un grafo cordal es geodético*

Demostración. Sea S un vértice cualquiera del grafo cordal G . Si S no es del contorno tiene al menos un vecino S_1 de excentricidad estrictamente mayor. Procedemos de la misma forma con el nuevo vértice, y así sucesivamente, hasta obtener un camino $S = S_0 \sim S_1 \sim S_2 \sim \dots \sim S_k$, donde S_k es vértice del contorno. Por el Lema 3.3, S tiene al menos un vértice excéntrico de tipo T_u , con u hoja de T . Por el Lema 2.1 existe un camino mínimo entre T_u y S_k que contiene S . Es decir, S está en un camino mínimo que une vértices del contorno de G . $\square$

Referencias

- [1] A. Brandstädt, V. B. Le, J. P. Spinrad, *Graph Classes: A Survey*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Philadelphia, 1999.
- [2] J. Cáceres, A. Márquez, O. R. Oellerman, M. L. Puertas, *Rebuilding convex sets in graphs*, 19th European Workshop on Computational Geometry, Bonn, 2003, Discrete Mathematics, (sometido).
- [3] M. Farber, R. E. Jamison, *Convexity in graphs and hypergraphs*, SIAM J. Alg. Disc. Math., 7 (3), 1986, pp. 433–444.
- [4] C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, C. Seara, *On monophonic sets in graphs*, Journal of Combinatorics, Serie B (sometido).
- [5] T. A. McKee, F. R. McMorris, *Topics in Intersection Graph Theory*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Philadelphia, 1999.