

Coloración de grafos por vecindades diferentes[®]

Liliana Alcón^b, Marisa Gutierrez^b, Carmen Hernando^a, Mercè Mora^a,
Ignaci M. Pelayo^a

(a) *Departamento de Matemáticas, Universitat Politècnica de Catalunya.*
E-mail: carmen.hernando@upc.edu, merce.mora@upc.edu,
ignacio.m.pelayo@upc.edu

(b) *Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de la Plata*
E-mail: liliana@mate.unlp.edu.ar, marisa@mate.unlp.edu.ar

Resumen. En este trabajo introducimos $\chi_{NL}(G)$, el número de coloración de un grafo G por particiones que resuelven por vecindad y estudiamos propiedades generales, valores concretos en algunas familias de grafos y cotas ajustadas.

Palabras clave. dimension por particiones, particiones con vecindades diferentes

1 INTRODUCCIÓN

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo de orden n y $\Pi = \{S_1, \dots, S_k\}$ una partición de V , notamos $r(u|\Pi)$ al vector de distancias entre un vértice $u \in V$ y los elementos de Π , esto es, $r(u, \Pi) = (d(u, S_1), \dots, d(u, S_k))$. Se dice que una partición Π de G resuelve métricamente el grafo o que es una *partición métricamente resolutive* si, para cualquier par de vértices distintos $u, v \in V$, $r(u, \Pi) \neq r(v, \Pi)$.

La *dimension por particiones* $\beta_p(G)$ de G es el mínimo cardinal de una partición métricamente resolutive de G . Las particiones métricamente resolutivas y la dimensión por particiones fueron introducidas en [3] y posteriormente han sido muy estudiadas en diferentes artículos (ver [5] y su bibliografía).

A partir de $\beta_p(G)$ han aparecido diferentes parámetros que han recibido también notable interés en la bibliografía. Atendiendo al cardinal mínimo, según las restricciones que se les exijan a las particiones tenemos los siguientes variantes: $\eta_p(G)$, cuando a las particiones se exige que resuelvan y dominen (ver [6]); $\chi_{ML}(G)$, cuando se exige que las partes resuelvan y sean conjuntos independientes (ver [2, 4, 1]); $\lambda_p(G)$ cuando se pide que resuelva por vecindades (ver [6]).

[®] Parcialmente financiado por CONICET, MTM2014-60127-P, MTM2015-63791-R, Gen. Cat. DGR 2014SGR46 y H2020 de la UE en virtud del MSCA 734922.

El *número cromático* $\chi(G)$ de un grafo G es el mínimo número de colores que se necesitan para colorear los vértices de un grafo de forma que dos vértices adyacentes tengan colores diferentes. Las partes de vértices coloreadas con cada color da lugar a una partición del grafo con conjuntos independientes.

En el siguiente ejemplo ilustramos estos conceptos. Sea $G = (V, E)$ el grafo $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $E = \{12, 13, 23, 34, 45, 56\}$ y sea $\Pi_1 = \{S_1 = \{1, 2\}, S_2 = \{3, 4, 5\}, S_3 = \{6\}\}$. Observamos que Π_1 no es una partición resolutive ya que $r(1, \Pi_1) = (0, 1, 4) = r(2, \Pi_1)$. Tampoco es una partición dominante ya que no existe ninguna parte S de la partición tal que $d(4, S) = 1$. Tampoco verifica que las partes sean conjuntos independientes. Concretamente S_1 no lo es y S_2 tampoco. Finalmente, vemos que tampoco resuelve por vecindades ya que el entorno de 1 y 2 coincide: $N(1) = \{S_2\} = N(2)$.

Si consideramos la partición $\Pi_2 = \{S_1 = \{1\}, S_2 = \{2, 5\}, S_3 = \{3\}, S_4 = \{4, 6\}\}$, entonces es una partición que resuelve por vecindades (basta comprobar que las partes vecinas de 2 y 5 son diferentes y también las de 4 y 6. Además, en este caso las partes son conjuntos independientes).

En este trabajo estudiaremos la variante en que a las particiones se les pide que las partes sean conjuntos independientes y que resuelvan por vecindades.

2 DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS

Una partición Π de G se dice que es una *partición que colorea y resuelve por vecindades*, o χ_{NL} -*partición* para abreviar, si todas las partes de Π son conjuntos independientes y para cada vértice de una parte, el conjunto de partes vecinas es diferente. Llamamos *número cromático resolviendo por vecindades* o $\chi_{NL}(G)$ al cardinal mínimo de una χ_{NL} -partición. Obtenemos los siguientes resultados.

Proposición 1. *Sea G un grafo conexo, entonces:*

$$\beta_p(G) \leq \eta_p(G) \leq \lambda_p(G) \leq \chi_{NL}(G).$$

Proposición 2. *Sea G un grafo conexo y $\chi(G)$ su número cromático, entonces*

$$\chi(G) \leq \chi_{ML}(G) \leq \chi_{NL}(G).$$

Proposición 3. *Sea G grafo conexo de diámetro 2, entonces: $\chi_{ML}(G) \leq \chi_{NL}(G)$.*

Teorema 1. *Sea G un grafo conexo de orden $n \geq 3$. Entonces, $\chi_{NL}(G) = n$ si y sólo si G es un grafo multipartito completo.*

3 COTAS

En esta sección presentamos algunas cotas del orden del grafo G en función del grado máximo y de $\chi_{NL}(G)$.

Teorema 2. *Sea G grafo conexo de orden n , grado máximo Δ y $\chi_{NL}(G) = k$. Entonces,*

$$n \leq \min\{k(2^{k-1} - 1), \sum_{j=1}^{\Delta} \binom{k-1}{j}\}.$$

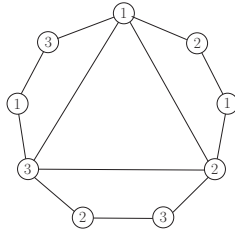


Figura 1.1: Grafo G_3 con $\chi_{NL}(G_3) = 3$ y orden máximo

Para grafos de grado máximo 2 (como son los caminos y los ciclos), y para árboles y grafos unicíclicos obtenemos cotas más ajustadas.

Corolario 1. *Sea G un grafo de orden n y $\chi_{NL}(G) = k$. Entonces,*

- (a) *Si G tiene grado máximo 2, entonces $n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)$.*
- (b) *Si G es un árbol, entonces $n \leq \frac{1}{2}(k^3 + k^2 - 2k - 4)$.*
- (c) *Si G es un grafo unicíclico, entonces $n \leq \frac{1}{2}(k^3 + k^2 - 2k)$.*

4 CAMINOS, CICLOS, ÁRBOLES Y UNICÍCLICOS

Fijado $\chi_{NL}(T) = k$, vemos que los árboles y los grafos unicíclicos que alcanzan orden máximo tienen grado máximo 3 y una distribución muy concreta de número de vértices de cada grado. Por otra parte, en [1] se da una cota ajustada del grado máximo de un árbol T en función de $\chi_{ML}(T)$. Nosotros hemos obtenido una cota ajustada en función de $\chi_{NL}(T)$.

Proposición 4. *Sea T un árbol de orden n , grado máximo Δ y $\chi_{NL}(T) = k$. Si $n = \frac{1}{2}(k^3 + k^2 - 2k - 4)$, entonces $\Delta = 3$ y $n = n_1 + n_2 + n_3$, donde n_i es el número de vértices de grado i de T , $i = 1, 2, 3$ y se verifica:*

$$n_1 = k(k-1), \quad n_2 = \frac{k(k-1)(k-2)}{2}, \quad n_3 = k(k-1) - 2.$$

Proposición 5. Sea G un grafo unicíclico de orden n , grado máximo Δ y $\chi_{NL}(T) = k$. Si $n = \frac{1}{2}(k^3 + k^2 - 2k)$, entonces $\Delta = 3$ y $n = n_1 + n_2 + n_3$, donde n_i es el número de vértices de grado i de G , $i = 1, 2, 3$ y se verifica:

$$n_1 = k(k-1), \quad n_2 = \frac{k(k-1)(k-2)}{2}, \quad n_3 = k(k-1).$$

Proposición 6. Sea T un árbol de grado máximo Δ y $\chi_{NL}(T) = k$, entonces: $\Delta \leq k \cdot (k-1)$.

Proposición 7. Sea T un árbol, $T \neq P_4$, entonces $\chi_{NL}(T) \neq n-1$.

Para caminos y ciclos, si $3 \leq n \leq 9$ entonces $\chi_{NL}(P_n) = 3$, $\chi_{NL}(C_n) = 3$ si n es impar y $\chi_{NL}(C_n) = 4$ si n es par. Para orden $n \geq 10$ hemos obtenido un algoritmo que nos permite obtener el siguiente resultado de forma constructiva.

Teorema 3. Sean $n \geq 10$ y $k \geq 4$ números naturales. Sean P_n y C_n el camino y el ciclo de orden n , respectivamente.

Si $(k-1) \cdot \binom{k-1}{2} < n \leq k \cdot \binom{k}{2}$, entonces $\chi_{NL}(P_n) = \chi_{NL}(C_n) = k$.

REFERENCIAS

- [1] Behtoei, A y Omoomi, B. A bound for the locating chromatic number of trees, *Transactions on Combinatorics*, **4** (2015), 31-41.
- [2] Chartrand, G., Erwin, D., Henning M. A., Slater P. J. y Zhang P. The locating-chromatic number of a graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, **36** (2002), 89-101.
- [3] Chartrand, G.; Salehi, E. y Zhang, P. The partition dimension of a graph, *Aequationes Mathematicae*, **59** (2000), 45-54.
- [4] Chartrand, G.; Erwin, D.; Henning, M. A.; Slater P. J. y P. Zhang, P. Graphs of order n with locating-chromatic number $n-1$, *Discrete Math.*, **269** (2003), 65-79.
- [5] Fernau, H.; Rodríguez-Velázquez J. A. y González-Yero, I. On the partition dimension of unicyclic graphs, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, **57(105)** (4) (2014), 381-391.
- [6] Hernando, C.; Mora, M. y Pelayo, I. M. Extremal values for metric-locating-dominating partition in graphs, *submitted* (2017).