

Conjuntos geodéticos formados por vértices fronterizos de un grafo *

J. Cáceres[†] C. Hernando[‡] M. Mora[§] I. M. Pelayo[¶]
M. L. Puertas^{||} C. Seara^{**}

Resumen

En este trabajo estudiamos diferentes conjuntos de vértices fronterizos de un grafo: el conjunto de vértices extremos, la periferia, el conjunto de vértices excéntricos, el contorno, el contorno extendido y la frontera. Se demuestra que, dado un grafo conexo G , de entre todos los conjuntos anteriores, en general son conjuntos geodéticos sólo los dos últimos. También se demuestra que bajo ciertas condiciones el contorno es geodético y bajo otras lo es su clausura. Finalmente se presenta un teorema de realización en el que intervienen la periferia, el conjunto de vértices excéntricos, el contorno y la periferia.

1 Introducción

Dados un grafo conexo $G = (V, E)$ y $W \subset V$, $I[W]$ es el conjunto de vértices que están en algún camino corto entre dos vértices de W y recibe el nombre de *clausura* (o clausura geodética) de W . Si $I[W] = W$, se dice que W es un conjunto convexo de G . Así se traslada de forma natural el concepto de conjunto

*Parcialmente subvencionado por MCYT BFM2003-0368, MCYT-FEDER TIC-2001-2171, Gen Cat DURSI2001SGC00224, BFM 2001-2474, FQM 305.

[†]Dpto. de Estadística y Matemática Aplicada, Univ. de Almería, e-mail: jcaceres@ual.es

[‡]Dept. de Matemàtica Aplicada I, U.P.C., e-mail: carmen.hernando@upc.es

[§]Dept. de Matemàtica Aplicada II, U.P.C., e-mail: merce.mora@upc.es

[¶]Dept. de Matemàtica Aplicada III, U.P.C., e-mail: ignacio.m.pelayo@upc.es

^{||}Dpto. de Estadística y Matemática Aplicada, Univ. de Almería, e-mail: mpuertas@ual.es

^{**}Dept. de Matemàtica Aplicada II, U.P.C., e-mail: carlos.seara@upc.es

convexo de grafos, permitiendo estudiar muchas nociones clásicas de convexidad desde una perspectiva discreta [4]. Si $I[W] = V$, se dice que W es un conjunto geodético de G . Es interesante encontrar conjuntos geodéticos de un grafo, puesto que esto nos permite generar todos los vértices del grafo a partir de los caminos mínimos entre sus vértices. En este trabajo estudiaremos si verifican o no esta propiedad varios conjuntos de vértices del grafo.

Sean $u, v \in V$ dos vértices del grafo G . Se dice que v es un *vértice fronterizo* de u si ningún vértice del entorno $N(v)$ de v está más lejos de u que v . Un vértice se denomina *vértice fronterizo* del grafo G si es vértice fronterizo de alguno de los vértices de G . Al conjunto de todos los vértices fronterizos, ∂G , se le denomina *frontera* del grafo. Estudiaremos diferentes subconjuntos de la frontera, mostrando que varios de ellos no son conjuntos geodéticos y otros sí lo son.

Un caso particular de conjunto de vértices fronterizos es el contorno de un grafo. Se definen el *contorno* $Ct(G)$ como el conjunto de vértices de G cuya excentricidad es mayor o igual que la de sus vecinos. Definiendo la clausura convexa de un conjunto de vértices como el menor convexo que lo contiene, en [1] Cáceres *et al.* demuestran que la clausura de $Ct(G)$ es $V(G)$, pero que el contorno no es un conjunto geodético en general. En la Sección 2 hemos demostrado que son geodéticos otros conjuntos formados por vértices fronterizos. En particular para cualquier grafo G demostramos que si al contorno le añadimos sus vértices excéntricos (v es *excéntrico* de u si $d(u, v) = e(u)$, siendo $e(u)$ la excentricidad de u) entonces obtenemos un conjunto que sí es geodético. Como consecuencia la frontera también es un conjunto geodético.

En la Sección 3 se obtienen resultados muy interesantes cuando hay pocas excentricidades diferentes en los vértices del contorno. Concretamente, demostramos que bajo ciertas condiciones el contorno es geodético y bajo otras condiciones lo es su clausura. Finalmente, en la sección 4 se obtiene un teorema de realización en el que aparecen los conjuntos de vértices fronterizos más destacados, generalizando un resultado de [3].

2 Conjuntos destacados de vértices fronterizos

Hemos mencionado en la sección anterior el contorno y la frontera de un grafo. Definimos ahora otros conjuntos destacados de vértices fronterizos.

Sean $u, v \in V$ dos vértices de un grafo conexo $G = (V, E)$. Se dice que v es un *vértice excéntrico* de u si ningún vértice de V está más lejos de u que v , es

decir, si la distancia entre ambos $d(u, v)$ coincide con la excentricidad de u , que notaremos $e(u)$. Un vértice v se denomina vértice excéntrico del grafo G si es *vértice excéntrico* de alguno de los vértices de G . Ciertamente, todos los vértices excéntricos son fronterizos. La *excentricidad* $Ecc(G)$ de un grafo G es el conjunto de sus vértices excéntricos.

Se dice que $v \in V$ es un *vértice periférico* de un grafo G si ningún vértice de G tiene excentricidad mayor que él. Esto es, los vértices periféricos son aquéllos cuya excentricidad coincide con el diámetro de G , que notaremos D . El conjunto de todos estos vértices recibe el nombre de *periferia* de G .

Diremos que $v \in V$ es un vértice extremo (también se les llama simpliciales o completos) si el subgrafo inducido por sus vecinos es completo. Al conjunto de estos vértices lo notaremos $Ext(G)$.

Resumiendo, dado un grafo $G = (V, E)$ conexo consideramos los siguientes conjuntos de vértices:

1. Conjunto extremo de G : $Ext(G) = \{v \in V : G[N(v)] \text{ es un clique}\}$
2. Periferia de G : $Per(G) = \{v \in V : e(v) \geq e(u), \forall u \in V\}$
3. Contorno de G : $Ct(G) = \{v \in V : e(v) \geq e(u), \forall u \in N(v)\}$
4. Excentricidad de G : $Ecc(G) = \{v \in V : \exists u \in V : d(u, v) = e(u)\}$
5. Contorno extendido de G : $\Omega(G) = Ct(G) \cup Ecc_G(Ct(G))$
donde $Ecc_G(Ct(G)) = \{v \in V : \exists u \in Ct(G) : d(u, v) = e(u)\}$.
6. Frontera de G : $\partial(G) = \{v \in V : \exists u \in V : d(w, u) \leq d(v, u), \forall w \in N(v)\}$

Los cuatro primeros juegan un papel destacado y han sido ampliamente estudiados ([2, 3, 1, 5]). El contorno extendido de un grafo juega un papel importante en la subsección 2.2, donde veremos que dado un grafo conexo, su contorno extendido es un conjunto geodético, minimal en algunos casos.

En la Figura 1 y 2 mostramos estos conjuntos sobre dos grafos concretos.

Observamos que, dado un grafo G conexo, se verifica $Ecc_G(Per(G)) = Per(G)$ y por lo tanto $Per(G) \subset Ecc_G(Ct(G))$. También observamos que el contorno y el conjunto de vértices excéntricos de un grafo están incluidos en su frontera. En el diagrama de la Figura 3 se muestra la relación que existe en general entre los conjuntos anteriormente nombrados.

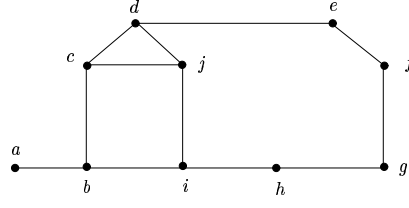


Figura 1: $Per(G) = \{a, f\}$, $Ct(G) = \{a, c, f\}$, $Ecc(G) = \{a, c, d, e, g, h\}$, $\partial(G) = V \setminus \{b\}$, $Ecc_G(Ct(G)) = \{a, f, g\}$, $\Omega(G) = \{a, c, f, g\}$, $I[Ct(G)] = V \setminus \{j\}$.

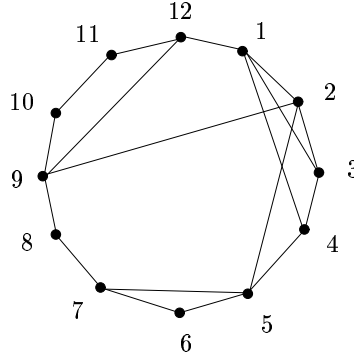


Figura 2: $Per(G) = \{6, 11\}$, $Ct(G) = \{4, 6, 11\}$, $Ecc(G) = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11\}$, $\partial(G) = Ecc(G)$, $Ecc_G(Ct(G)) = \{6, 10, 11\}$, $\Omega(G) = \{4, 6, 10, 11\}$, $I[Ct(G)] = V \setminus \{3\}$.

En la subsección 2.2 se demuestra que $\Omega(G)$ es conjunto geodético y, como consecuencia, también lo es $\partial(G)$. En los ejemplos de las Figuras 1 y 2 se observa que $|\Omega(G)|$ es sensiblemente menor que $|\partial(G)|$.

2.1 Conjuntos fronterizos que no son geodéticos

En los grafos que se muestran en las Figuras 1 y 2 se observa que ni el conjunto de vértices extremos, ni la periferia, ni el contorno son, en general, conjuntos geodéticos. En la Figura 4 se muestra un grafo en que el conjunto de vértices excéntricos no es un conjunto geodético. De hecho, en este ejemplo, $Ext(G) \not\subset Ecc(G)$, que es una condición mucho más fuerte que la anterior.

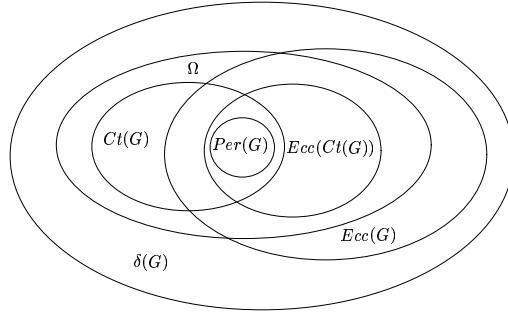


Figura 3: Inclusiones.

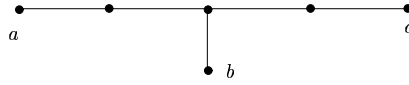


Figura 4: $Per(G) = Ecc(G) = \{a, c\}$, $Ext(G) = Ct(G) = \Omega(G) = \partial(G) = \{a, b, c\}$.

2.2 El contorno extendido y la frontera son conjuntos geodéticos

En esta sección demostramos que el contorno extendido de un grafo, así como su frontera, son conjuntos geodéticos. Para probar estos resultados necesitamos un lema previo.

Lema 2.1. Sean $G = (V, E)$ un grafo conexo y $x \in V$, $x \notin Ct(G)$. Entonces existen $x_0 = x, x_1, \dots, x_r \in V$ tales que $e(x_i) = e(x_{i-1}) + 1$, $i = 1, \dots, r$, $d(x, x_r) = r$ y $x_r \in Ct(G)$.

Teorema 2.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. Entonces, $\Omega(G)$ es un conjunto geodético.

Observación 2.3. Existen grafos G tales que el contorno extendido es un conjunto geodético de cardinal mínimo (ver ejemplo de la Figura 4, donde $\Omega(G) = Ct(G) = Ext(G)$).

Consecuencias del teorema anterior son:

Corolario 2.4. Sea G un grafo conexo. Entonces $\partial(G)$ es un conjunto geodético.

Corolario 2.5. *Sea G un grafo conexo. Si $Ecc_G(Ct(G)) \subseteq I[Ct(G)]$, entonces $I^2[Ct(G)] = V$. Esto es, $I[Ct(G)]$ es un conjunto geodético.*

Observación 2.6. En general $Ecc_G(Ct(G)) \not\subseteq Ct(G)$ (ver Figura 1) y $Ecc(G) \not\subseteq I[Ct(G)]$ (ver Figura 2).

En la siguiente sección se estudian bajo qué condiciones se puede asegurar que se verifica $Ecc_G(Ct(G)) \subseteq I[Ct(G)]$ y por lo tanto $I^2[Ct(G)] = V$.

3 Estudio del número de iteración del contorno de un grafo

Dado un grafo conexo $G = (V, E)$ y dado un conjunto de vértices $W \subseteq V$ se llama número de iteración de W al mínimo número k tal que $I^k[W] = V$. Los conjuntos geodéticos son aquéllos tales que su número de iteración es uno. Hemos visto que, en general, el contorno de un grafo no es un conjunto geodético. En esta sección vamos a dar una cota sobre el número de iteración del contorno de un grafo cualquiera, así como condiciones en que el contorno es geodético y condiciones en que $I^2[Ct(G)] = V$.

Los primeros resultados de esta sección los obtenemos cuando el contorno difiere poco de la periferia del grafo.

Proposición 3.1. *Sea G grafo conexo. Si $Ct(G) = Per(G)$, entonces $Ct(G)$ es un conjunto geodético.*

Si G es un grafo tal que $|Ct(G)| = 2$, entonces $Ct(G) = Per(G)$, de donde se concluye que un caso particular del resultado anterior es el siguiente.

Corolario 3.2. *Sea $G = (V, E)$ grafo conexo. Si $|Ct(G)| = 2$, entonces $Ct(G)$ es un conjunto geodético.*

Por otra parte, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3. *Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo tal que $Ct(G) \setminus Per(G) = \{v_1, \dots, v_r\}$ y tal que $e(v_i) = e(v_j)$, $\forall i \neq j, i, j = 1, \dots, r$. Entonces $I^2[Ct(G)] = V$.*

Como casos particulares del teorema anterior tenemos las siguientes consecuencias.

Corolario 3.4. Si $G = (V, E)$ es un grafo conexo tal que $|Ct(G)| = |Per(G)| + 1$, entonces $I^2[Ct(G)] = V$.

Corolario 3.5. Si $G = (V, E)$ es un grafo conexo tal que $|Ct(G)| = 3$, entonces $I^2[Ct(G)] = V$.

Con las mismas técnicas se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.6. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo tal que

$$Ct(G) = \{a_1, \dots, a_{r_1}, a_{r_1+1} \dots a_{r_2}, \dots, a_{r_{s-1}+1} \dots a_{r_s}\}$$

con

$$\begin{aligned} e(a_i) &= D = d_1 & i &= 1, \dots, r_1 \\ e(a_i) &= d_2 & i &= r_1 + 1, \dots, r_2 \\ &\vdots & & \\ e(a_i) &= d_s & i &= r_{s-1} + 1, \dots, r_s \end{aligned}$$

con $D = d_1 > d_2 > \dots > d_s$. Entonces $I^s[Ct(G)] = V$.

Como consecuencia, dado que a lo sumo en un grafo G hay $D/2$ excentricidades diferentes, siendo D el diámetro de G , obtenemos el siguiente

Teorema 3.7. Sea G un grafo conexo. Entonces $I^k[Ct(G)] = V$, con $k \leq \min \left\{ |Ct(G)| - 1, \frac{D}{2} + 1 \right\}$.

4 Teorema de realización

En esta Sección presentamos un teorema de realización donde se muestra la existencia de grafos G con periferia, contorno, excentricidad y frontera de cardinales arbitrarios, con la única restricción de que se verifiquen las inclusiones que se indican en la Figura 3.

Teorema 4.1. Dados $a, b, c, d, n \in \mathbb{N}$ con $a \leq b, c \leq d \leq n$, existe un grafo $G = (V, E)$ conexo tal que $|V(G)| = n$ y $|Per(G)| = a, |Ct(G)| = b, |Ecc(G)| = c, |\partial(G)| = d$.

En la Figura 5 los números escritos entre paréntesis indican la multiplicidad de cada vértice. Para el grafo H de la Figura se verifica: $Per(H) = \{f\} \cup M$,

$Ct(H) = \{a, f\} \cup M \cup J$, $Ecc(H) = \{a, f, e, n, l\} \cup M \cup G$ y $\partial(H) = \{a, f, e, n, l\} \cup M \cup J \cup G \cup O$.

Como ejemplo de grafo en el que se verifica: $|Per(H)| < |Ct(H)| < |Ecc(H)| < |\partial(H)|$ basta tomar el grafo de la Figura 5 con $|G| < |M|$. En caso de ser $|G| > |M|$, se obtiene un grafo con $|Per(H)| < |Ecc(H)| < |Ct(H)| < |\partial(H)|$.

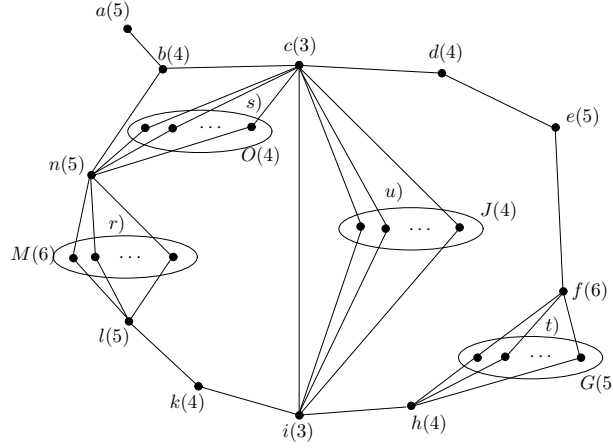


Figura 5: Grafo H .

Referencias

- [1] J. Cáceres, A. Márquez, O. R. Oellerman, M. L. Puertas, *Rebuilding convex sets in graphs*, 19th European Workshop on Computational Geometry, Bonn, 2003, submitted to Discrete Mathematics.
- [2] G. Chartrand, W. Gu, M. Schultz, S. J. Winters *Eccentric Graphs*, Networks 34, n§ 2, 1999, pp. 115–121.
- [3] G. Chartrand, D. Erwin, G. L. Johns, P. Zhang, *Boundary vertices in graphs*, Disc. Math., 263, 2003, pp. 25–34.
- [4] M. Farber, R. E. Jamison, *Convexity in graphs and hypergraphs*, SIAM J. Alg. Disc. Math., 7 (3), 1986, pp. 433–444.
- [5] C. Hernando, T. Jiang, M. Mora, I. M. Pelayo, C. Seara, *On the Steiner, geodetic and hull numbers of graphs*, 19th British Combinatorial Conference, Bangor 2003; aceptado en Discrete Mathematics.