

Nuevas cotas para parámetros de dominación y localización en grafos[®]

C. Hernando^a, M. Mora^b, I. M. Pelayo^c

(a) *Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya,*
E-mail: carmen.hernando@upc.edu

(a) *Departament de Matemàtica Aplicada II, Universitat Politècnica de Catalunya,*
E-mail: merce.mora@upc.edu

(a) *Departament de Matemàtica Aplicada III, Universitat Politècnica de Catalunya,*
E-mail: ignacio.m.pelayo@upc.edu

Resumen. A dominating set S of a graph G is called *locating-dominating*, *LD-set* for short, if every vertex v not in S is uniquely determined by the set of neighbors of v belonging to S . Locating-dominating sets of minimum cardinality are called *LD-codes* and the cardinality of an LD-code is the *location-domination number* and denoted by $\lambda(G)$. An MLD-set (metric-locatic-dominating set) of a graph G is a dominating and locating set of G . The *metric-location-domination number* of G , denoted by $\eta(G)$, is the minimum cardinality of an MLD-set. In this work, we give some relations between the location-domination number and the metric-location-domination number in a graph.

Palabras clave. Dominación y localización en grafos.

1 INTRODUCCIÓN

Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo y $S \subset V(G)$. Decimos que S domina G , o que es un conjunto dominante de G , si se verifica que todo vértice de $V(G) \setminus S$ tiene algún vecino en S . El número de dominación de un grafo G es el mínimo cardinal de un conjunto que domina G y lo notaremos por $\gamma(G)$.

Sean u, v, z tres vértices de un grafo G . Se dice que z resuelve (o localiza) los vértices u y v si $d(u, z) \neq d(v, z)$. Un conjunto de vértices $S \subset V(G)$ se dice que resuelve G si para todo par de vértices de G existe uno de S que los resuelve. Se llama dimensión métrica de G al mínimo cardinal de un conjunto que resuelve G y lo notamos por $\beta(G)$.

[®] Partially supported by projects MTM2009-07242, MTM2012-30951, Gen. Cat. DGR 2009SGR1040, ESF EUROCORES programme EUROGIGA-ComPoSe IP04-MICINN, MTM2011-28800-C02-01, Gen. Cat. DGR 2009SGR1387

Siguiendo la notación introducida en [10], a los conjuntos que resuelven y dominan un grafo G los llamaremos *MLD*-conjuntos y notamos $\eta(G)$ al mínimo cardinal de uno de estos conjuntos.

Un conjunto dominante S de un grafo G que además verifica que $N(u) \cap S \neq N(v) \cap S$ para todo par $u, v \in V(G) \setminus S$ se dice que es un *LD*-conjunto y notamos $\lambda(G)$ al mínimo cardinal de un *LD*-conjunto de G .

Observamos que si S es *LD*-conjunto entonces S también resuelve y por tanto $\max\{\gamma(G), \beta(G)\} \leq \eta(G) \leq \lambda(G)$. Por otra parte, la reunión de un conjunto que resuelve y otro que domina es un *MLD*-conjunto, de donde $\eta(G) \leq \gamma(G) + \beta(G)$.

Los *LD*-conjuntos fueron introducidos por P.J. Slater en [19]. Estos conjuntos han sido estudiados en diferentes tipos de grafos (ver [2],[5],[7]). Una motivación para el estudio de estos conjuntos es el detectar fallos en la diagnosis de sistemas con multiprocesadores, en la detección de un intruso...Recientemente la generalización del concepto de localiza-dominación (*LD* para abreviar) ha sido estudiada desde diferentes puntos de vista: *LD* tolerante [20], *LD* abierta [18], *LD* fuerte [16], *LD* global [13], *LD* métrica [10], *r-LD* [14], códigos identificantes [15], sistemas de observación [1]. En este trabajo vamos a trabajar la *LD* habitual y la *LD* métrica.

La bibliografía sobre dominación en grafos es muy extensa, ver por ejemplo [9]. Los conjuntos que resuelven y la dimensión métrica de un grafo han sido largamente estudiados (ver [6], también ver [4] donde se da una larga lista de aplicaciones y una extensa biografía). En [10] M.A. Henning y O. Oellermann introducen los *MLD*-conjuntos. Estos conjuntos tienen la interesante propiedad de que todos los vértices del grafo son dominados o localizados por los vértices de un *MLD*-conjunto y su cardinal puede ser sensiblemente menor que el cardinal de un *LD*-conjunto.

En este trabajo estudiamos, dado un grafo G , la relación entre los parámetros $\eta(G)$ y $\lambda(G)$. En la siguiente sección damos un listado de los resultados obtenidos más recientemente, omitiendo las demostraciones por la brevedad del espacio. Y finalizamos el trabajo enumerando varios de los problemas que todavía quedan abiertos.

2 RESULTADOS

En [10] se muestra que existen grafos G donde la fracción $\lambda(G)/\eta(G)$ puede ser arbitrariamente grande.

Esto induce a plantearse las siguientes preguntas.

Dados tres números enteros positivos, a, k, n , con $1 \leq a \leq n$, ¿existe siempre un grafo G tal que el orden de G sea n , $\eta(G) = a$ y $\lambda(G) = ka$?

Y más en general:

Dados a, b, n números enteros positivos, con $1 \leq a \leq b \leq n$ ¿existe un grafo G tal que el orden de G sea n , $\eta(G) = a$ y $\lambda(G) = b$?

La respuesta a ambas preguntas es negativa. Vamos a ver varios ejemplos que lo muestran.

Empezamos por estudiar grafos G con valores pequeños de $\lambda(G)$ o $\eta(G)$. Es conocido [10] que dado un grafo G , $\eta(G) = 1$ si y sólo si $\lambda(G) = 1$. En [3] se muestran todos los grafos con $\eta(G) = 2$. Por inspección directa se comprueba que en todos esos grafos $2 \leq \lambda(G) \leq 4$. Cabe preguntarse lo siguiente: si un grafo G tiene $\eta(G) = 3$ ¿Cual es el valor máximo de $\lambda(G)$? Y en general para un valor fijado de $\eta(G)$, ¿Cual es el valor máximo de $\lambda(G)$?

El mejor resultado que hemos obtenido en esta línea es el siguiente.

Teorema 1. *Para cualquier número entero positivo a existe un grafo G con $\eta(G) = a$ y $\lambda(G) = a^2$.*

Por otra parte, analizando los grafos G con valores de $\lambda(G)$ o $\eta(G)$ cercanos al orden del grafo, tenemos los siguientes resultados.

Teorema 2 ([3]). *Sea G un grafo de orden $n \geq 3$. Entonces se verifica:*

- $\eta(G) = n - 1 \Leftrightarrow \lambda(G) = n - 1$.
- $\eta(G) = n - 2 \Leftrightarrow \lambda(G) = n - 2$.

Como siempre se verifica que $\eta(G) \leq \lambda(G)$, de los anteriores resultados se obtiene lo siguiente.

Corolario 1. *Sea G un grafo de orden $n \geq 4$. Se verifica*

$$\eta(G) = n - 3 \Rightarrow \lambda(G) = n - 3.$$

Nuestro resultado principal en este trabajo es el siguiente.

Teorema 3. *Sea G un grafo de orden $n \geq 6$. Se verifica*

$$\eta(G) \leq n - 5 \Rightarrow \lambda(G) \leq n - 4.$$

Corolario 2. *Sea G un grafo de orden $n \geq 4$. Se verifica*

$$\lambda(G) = n - 3 \Rightarrow n - 4 \leq \eta(G) \leq n - 3.$$

Y ambas cotas son ajustadas.

En la Tabla 1 resumimos los resultados obtenidos sobre la existencia de grafos G con orden n y valores de $\lambda(G)$ y $\eta(G)$ cercanos al orden del grafo.

$\eta \backslash \lambda$	$n - 1$	$n - 2$	$n - 3$	$n - 4$	$n - 5$
$n - 1$	✓				
$n - 2$		✓			
$n - 3$			✓		
$n - 4$			✓	✓	
$n - 5$				✓	✓
$n - 6$				✓	✓
$n - 7$				?	✓

Tabla 1: Valores posibles de $\eta(G)$ y $\lambda(G)$.

En el caso particular de árboles, los resultados son los siguientes.
M. Henning y O. Ollermann demuestran en [10] la siguiente cota.

Teorema 4. *Para cualquier árbol T se verifica*

$$\frac{1}{2}\lambda(T) < \eta(T) \leq \lambda(T)$$

En este trabajo hemos obtenido la existencia de árboles para todos los valores posibles que indica el anterior resultado, esto es, hemos obtenido el siguiente teorema de realización.

Teorema 5. *Dados dos enteros positivos a, b verificando que $\frac{1}{2}b < a \leq b$, existe un grafo G tal que $\eta(G) = a$ y $\lambda(G) = b$.*

3 CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

Son muchas las preguntas que quedan por responder en los temas tratados y mucho el trabajo por hacer.

El Teorema 2 es uno de los resultados más importantes de [3]. Con técnicas parecidas a las utilizadas allí hemos obtenido los resultados que se muestran en el Teorema 3 y Corolario siguiente, pero la dificultad de la demostración ha crecido notable. Estamos trabajando en la generalización de este tipo de resultados. Un primer paso sería cubrir el interrogante que queda en la Tabla 1.

Otra conjetura que queda abierta es la siguiente.

Conjetura 1. *Dados dos enteros positivos a, b , con $a \leq b \leq a^2$ siempre existe un grafo G con $\eta(G) = a$ y $\lambda(G) = b$.*

Por último, también sería interesante la obtención de un teorema de realización para grafos en general en la línea del obtenido para árboles.

REFERENCIAS

- [1] D. Auger, I. Charon, O. Hudry, A. Lobstein, Watching systems in graphs: an extension of identifying codes, *Discrete Appl. Math.*, **161** (2013) 1674–1685.
- [2] M. Blidia, M. Chellali, F. Maffray, J. Moncel and A. Semri, Locating-domination and identifying codes in trees, *Australas. J. Combin.*, **39** (2007) 219–232.
- [3] J. Cáceres, C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, M. L. Puertas, Locating-dominating codes: Bounds and extremal cardinalities, *Appl. Math. Comput.*, (2013), en prensa. Una versión disponible en <http://arxiv.org/abs/1205.2177>.
- [4] J. Cáceres, C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, M. L. Puertas, C. Seara and D. R. Wood, On the Metric Dimension of Cartesian Products of Graphs, *SIAM Journal on Discrete Math.*, **21** (2) (2007) 423–441.
- [5] I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Extremal cardinalities for identifying and locating-dominating codes in graphs, *Discrete Math.* **307** (3-5) (2007) 356–366.
- [6] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, O. R. Oellermann, Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph, *Discrete Appl. Math.*, **105** (1-3) (2000) 99–113.
- [7] A. Finbow and B. Hartnell, On locating dominating sets and well-covered graphs, *Congr. Numer.* **65** (1988) 191–200.
- [8] F. Harary and R. A. Melter, On the metric dimension of a graph, *Ars Combinatoria*, **2** (1976) 191–195.
- [9] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, *Fundamentals of domination in graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [10] M. A. Henning, O. Oellermann, Metric-locating-dominating sets in graphs, *Ars Combin.* **7** (2004) 129–141.

- [11] C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, C. Seara, D. R. Wood, Extremal graph theory for metric dimension and diameter, *Electron. J. Comb.* , **17** (2010) R30.
- [12] C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, Nordhaus-Gaddum bounds for locating domination, *Eur. J. Combin.*, (2012) en prensa. Una versión disponible en <http://arxiv.org/pdf/1207.2142v2.pdf>.
- [13] C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, Global locating domination in graphs, en preparación.
- [14] I. Honkala, On r -locating-dominating sets in paths, *European Journal of Combinatorics*, **30** (2009) 1022–1025.
- [15] M. G. Karpovsky, K. Chakrabarty, L. B. Levitin, On a new class of codes for identifying vertices in graphs, *IEEE Transactions on Information Theory*, bf IT-44 (1998) 599–611.
- [16] T. Laihonon, Optimal codes for strong identification, *European Journal of Combinatorics*, **23** (2002) 307–313.
- [17] A. Lobstein, Watching systems, identifying, locating-dominating and discriminating codes in graphs, <http://www.infres.enst.fr/~lobstein/debutBIBidetlocdom.pdf>
- [18] S. J. Seo, P. J. Slater, Open neighborhood locating-dominating sets, *Australasian Journal of Combinatorics*, **46** (2010) 109–119.
- [19] P. J. Slater, Dominating and reference sets in a graph, *J. Math. Phys. Sci.* **22** (1988) 445–455.
- [20] P. J. Slater, Fault-tolerant locating-dominating sets, *Discrete Mathematics*, **249** (2002) 179–189.