
2.5 Consideramos la función $f(x) = e^{-x} \sin x$.

(a) Resuelve la integral $\int f(x) dx$.

(b) Calcula la primitiva F de la función f que cumple la condición $F(0) = \frac{3}{5}$.

SOLUCIÓN:

(a) $I = \int e^{-x} \sin x \cdot dx$.

Integración por partes:

$$\begin{cases} u = e^{-x} & \rightarrow du = -e^{-x} dx \\ dv = \sin 2x \cdot dx & \rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

$$I = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{2} \int e^{-x} \cos 2x \cdot dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{2} J$$

$$J = \int e^{-x} \cos 2x dx.$$

Integración por partes:

$$\begin{cases} u = e^{-x} & \rightarrow du = -e^{-x} dx \\ dv = \cos 2x \cdot dx & \rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$J = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x + \frac{1}{2} \int e^{-x} \sin 2x \cdot dx = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x + \frac{1}{2} I$$

Por tanto:

$$I = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x + \frac{1}{2} I \right) = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{4} e^{-x} \sin 2x - \frac{1}{4} I \Rightarrow$$

$$\frac{5}{4} I = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{4} e^{-x} \sin 2x \Rightarrow I = -\frac{1}{5} e^{-x} (2 \cos 2x + \sin 2x) + K$$

$$(b) F(0) = -\frac{2}{5} + K = \frac{3}{5} \Rightarrow K = 1 \Rightarrow -\frac{1}{5} e^{-x} (2 \cos 2x + \sin 2x) + 1$$
