
1 Introducció als Productes Financers

Forwards, futurs, opcions

1. Quina diferència hi ha entre una posició llarga i una posició curta en un forward ?
2. Quines diferències hi ha entre cobertura, especulació i arbitratge ?
3. Quina és la diferència entre entrar a llarg en un contracte forward quan el preu forward és 50€ i prendre una posició llarga en una opció de compra amb preu d'exercici 50€ ?
4. Un inversor entra en un contracte de futurs en curt sobre cotó quan el preu futur és de 50 cèntims per lliura. El contracte és pel lliurament de 50000 lliures. Quan guanya/perd si el preu del cotó al final del contracte és de (a) 48.2 cèntims per lliura; (b) 51.3 cèntims per lliura ?
5. Suposem que un inversor escriu una opció de venda sobre 100 accions de IBM amb preu d'exercici de 120€ i data de venciment en tres mesos. El preu actual de l'acció de IBM és de 121€. Quines obligacions ha adquirit l'inversor ? Quan pot guanyar/perdre ?
6. Un agent vol especular sobre l'alça en el preu d'un actiu. El preu actual és de 29€ i una opció de compra amb strike 30€ costa 2.9€. L'agent disposa de 5800€ per invertir. Identifiqueu dues estratègies alternatives, una involucrant inversió en l'actiu i l'altra involucrant inversió en opcions. Quins són els guanys/pèrdues potencials ?
7. Suposem que un agent té 5000 accions valorades en 25€ cada una. Com pot usar opcions de venda per proveir-se d'una assegurança en contra de la caiguda del valor de les seves propietats en els propers quatre mesos ?
8. Perquè un contracte forward pot ser usat per especular o per cobertura ?
9. Suposem que una call europea per comprar una acció a 50€ costa 2.5€ i es manté fins a la data de venciment. En quines circumstàncies el propietari de l'opció en treurà un benefici ? En quines circumstàncies l'opció serà exercitada ? Feu la gràfica de benefici d'una posició llarga en l'opció en funció del preu de l'acció a la data de venciment de l'opció.
10. Suposem que una put europea per vendre una acció a 60€ costa 4€ i que es conserva fins al venciment. L'emissor quan en treurà un benefici ? Quan serà exercitada l'opció ? Feu la gràfica del benefici de la posició curta en l'opció en funció del preu de l'acció a la data de venciment de l'opció.
11. Un inversor escriu una call europea pel setembre amb strike 20€. Ara estem a maig, el preu de l'actiu subjacent és de 18€ i el preu de l'opció és 2€. Descriviu els moviments de caixa de l'inversor si l'opció es conserva fins al setembre i el preu de l'actiu és de 25€ en aquell moment.

- 12.** Un inversor emet una put europea pel desembre amb strike 30€. El preu de l'opció és de 4€. Quan l'inversor tindrà un benefici ?
- 13.** El 1986 la Standard Oil Company va emetre uns bonus dels quals els propietari no en rebia interessos. En el moment del venciment, però, la companyia pagava 1000\$ més un plus de 170 vegades l'escreix sobre 25\$ del preu del barril de petroli a la data de venciment. El plus es restringia, però, a 2550\$. Proveu que aquest producte és una combinació d'un bonus normal i de dues opcions.
- 14.** Una companyia sap que està obligada a rebre una certa quantitat de moneda estrangera en quatre mesos. Quin tipus de contracte opció és apropiat per a cobertura ?
- 15.** El preu de l'or és actualment de 500€ per unça. El preu forward pel lliurament en un any és de 700€. Un arbitrista pot demanar diners al 10% anual. Què hauria de fer ? Suposem que el cost d'emmagatzament de l'or és nul.
- 16.** El preu actual d'una acció és de 94€ i una call a tres mesos i preu d'exercici de 95€ es ven actualment a 4.7€. Un inversor que preveu que el preu de l'acció pujarà dubta entre comprar 100 accions o comprar 2000 calls (20 contractes). Ambdues estratègies impliquen un desemborsament inicial de 9.400€. Què és millor ? Quan ha de pujar l'acció per a que comprar opcions sigui més beneficiós ?
- 17.** Descriviu el payoff de la cartera següent: un contracte forward a llarg i una put europea a llarg sobre el mateix subjacent, amb la mateixa data de venciment i amb el preu d'exercici el preu forward de l'actiu en el moment en què es formalitza la cartera.
- 18.** El 1985 el Bankers Trust va desenvolupar els ICON, *index currency option notes*. Els ICON són bonus en què la quantitat que el propietari rep en data de venciment varia segons el tipus de canvi de moneda estrangera. S'especifiquen dos tipus de canvi X_1 i X_2 amb $X_1 < X_2$. Si el tipus de canvi en data de venciment és més gran que X_2 , el propietari cobra tot el valor. Si és menor que X_1 no cobra res. Entre X_1 i X_2 cobra una porció del valor. La primera emissió d'un ICON va ser per al Long Term Credit Bank of Japan. S'especificava que si el tipus de canvi ien-dòlar, X , era més gran que 169 iens per dòlar en data de venciment (el 1995), el propietari del bonus rebia 1000\$. Si era menor que 169 iens per dòlar, rebia $1000 - \max(0, 1000(169/X - 1))$. Quan el tipus de canvi estava per sota de 84.5, el propietari no rebia res. Proveu que els ICON són una combinació d'un bonus standard i de dues opcions.
- 19.** Els contractes forward flexibles (*range forward contracts*) són molt populars en els mercats de canvis de divises. Un d'aquest contractes fixa, per exemple, una banda $X_1 < X_2$. Si el valor de l'actiu subjacent en data de venciment és $S_T < X_1$ paga X_1 ; si $X_1 < S_T < X_2$, paga S_T ; si $S_T > X_2$ paga X_2 . Proveu que aquest contracte forward és una combinació de dues opcions. Com es pot construir un contracte forward flexible de manera que el seu valor sigui zero ?
- 20.** El 1 de juliol de 2000 una companyia entra a llarg en un contracte forward per a la compra de 10 milions de iens pel 1 de gener de 2001. El 1 de setembre de 2000 entra en curt en un contracte forward per a la venda de 10 milions de iens pel 1 de gener de 2001. Descriviu el payoff.

Mercats de futurs i cobertura amb futurs

21. Distingiu entre *interès obert* i *volum de contractació*.
22. Quina és la diferència entre un *agent local* i un *agent a comissió* ?
23. Quina diferència hi ha entre l'operativa dels comptes de garantia administrats per la cambra de compensació i els administrats pels agents ?
24. Quins són alguns dels aspectes més importants en del disseny de nous contractes de futurs ?
25. Com protegeixen les garanties als inversors de la possibilitat d'impagaments ?
26. Quan és apropiada una cobertura a llarg i una cobertura en curt ?
27. Què s'entén pel *risc base* quan s'usa un contracte de futurs per a cobertura ?
28. Una cobertura perfecte sempre dona lloc a un millor resultat que una cobertura imperfecte ?
29. Quan una cartera de cobertura de variància mínima dona lloc a no cobrir-se ?
30. Un agent entra en curt en un contracte de futurs per vendre plata el juliol a 5.2\$ per unça en el NYCE. El tamany del contracte és de 5000 unces. La garantia inicial és de 4000\$ i el saldo de manteniment de 3000\$. Quin canvi en el preu del futur donarà lloc a garanties addicionals ? Què passa si no s'ingressa la garantia addicional ?
31. La part en curt en un contracte de futurs té de vegades opcions alternatives sobre el lloc i el moment del lliurament de l'actiu. Aquestes opcions augmenten o disminueixen el preu del futur ?
32. Una companyia entra en curt en un contracte de futurs per vendre 5000 bushels de blat per 250 cèntims el bushel. La garantia inicial és de 3000\$ i el saldo de manteniment 2000\$. Quin canvi de preu provoca una garantia addicional ? Quan es podria retirar 1500\$ del compte de garantia ?
33. Un inversor entra a llarg en dos contractes de futurs sobre suc de taronja congelat. Cada contracte és pel lliurament de 15000 lliures. El preu actual del futur és de 160 cèntims la lliura; la garantia inicial és de 6000\$ per contracte i el saldo de manteniment és de 4500\$ per contracte. Quin canvi de preu donaria lloc a una garantia addicional ? Quan es podria retirar 2000\$ del compte de garantia ?
34. Al final del dia, un membre de la cambra de compensació està llarg de 100 contractes i el preu de liquidació és de 50000€ per contracte. La garantia *original* és de 2000€ per contracte. El dia següent, fa a llarg 20 contractes més al preu de 51000€. El preu de liquidació al final d'aquest dia és de 50200€. Quant ha d'afegir al seu compte de compensació ?
35. Suposem que la desviació standard del canvi trimestral en el preu d'una mercaderia és de 0.65€, la desviació standard en el canvi del preu de futur és de 0.81€, i el coeficient de correlació entre els dos canvis és 0.8. Quin és el ratio de cobertura òptim per a un contracte a tres mesos ? Què vol dir ?

36. La desviació standard del canvi mensual en el preu spot de bestiar viu (en cèntims per lliura) és 1.2. La desviació standard del canvi mensual en el preu del futur de bestiar viu pel contracte més proper és 1.4. La correlació entre els canvis en els preus de futurs i en els canvis dels preus al comptat és 0.7. És dia 15 d'octubre i un productor de carn de bou està compromès a comprar 200000 lliures de bestiar viu pel 15 de novembre. El productor vol usar el contracte de futur sobre bestiar viu pel desembre a fi de cobertura pel risc. Cada contracte de futurs és pel lliurament de 40000 lliures de bestiar. Quina estratègia ha de seguir el productor ?

37. L'abril de 1996 una companyia es compromet a vendre 100000 barrils de petroli pel juny de 1997 i vol cobrir el risc amb una ratio de cobertura 1. Suposem que el preu actual del barril és de 19€. La companyia entra en curt en 100 contractes de futurs (cada contracte és per a la venda de 1000 barrils) per a l'octubre de 1996. El setembre gira endavant (*rolls the hedge forward into*) la cobertura amb un contracte de futurs pel març de 1997. El febrer gira de nou la cobertura endavant amb un contracte de futurs pel juliol de 1997. Suposem que el preu del barril el juny de 1997 és de 16€; que el contracte de futurs per a l'octubre és negociat a 18.2€ per barril i tancat a 17.4 per barril; que el contracte de futurs per al març és negociat a 17€ per barril i tancat a 16.5€ per barril; i que el contracte de futurs pel juliol és negociat a 16.3€ per barril i tancat a 15.9€. Quin és el benefici/pèrdua d'aquesta cobertura ? I si el ratio de cobertura fos de 1.5 ?

Preus forward i de futurs

38. Un banc presta a un tipus d'interès del 14% anual compost trimestralment. Quin és el tipus d'interès equivalent (a) compost continu i (b) compost anual ?

39. Què passa quan un inversor ven una acció en curt ?

40. Usarem la notació següent per a contractes forwards: T data de venciment (en anys); t un instant de temps (en anys) amb $0 \leq t_0 \leq t \leq T$ on t_0 és el moment de signar-se el contracte; S_t valor de l'actiu subjacent; K preu de lliurament especificat en el contracte forward; f_t valor del contracte forward en t ; F_t preu forward en t ; $r = r_t$ tipus d'interès anual compost continu en t per a una inversió amb venciment en T . Finalment, I_t és el valor en t dels ingressos coneguts que reporta l'actiu des del moment t fins al venciment T i q és la ratio anual coneguda de dividend pagat de forma contínua i per any. Proveu les fórmules següents:

Actiu	Preu forward	Valor del contracte forward
No reporta ingressos	$F_t = S_t e^{r(T-t)}$	$f_t = S_t - K e^{-r(T-t)}$
Reporta ingressos I_t	$F_t = (S_t - I_t) e^{r(T-t)}$	$f_t = S_t - I_t - K e^{-r(T-t)}$
Reporta dividend q	$F_t = S_t e^{(r-q)(T-t)}$	$f_t = S_t e^{-q(T-t)} - K e^{-r(T-t)}$
Qualsevol		$f_t = (F_t - K) e^{-r(T-t)}$

41. Suposem que un inversor entra en un contracte forward a sis mesos sobre accions que no paguen dividends quan el preu de l'acció és de 30€ i el tipus d'interès compost continu és del 12% anual. Quin és el preu forward ?

- 42.** Un índex borsari està actualment a 350. El tipus d'interès és del 8% anual compost continu i el rendiment dels dividends és del 4% anual. Quin ha de ser el preu del futur per a un contracte a 4 mesos ?
- 43.** Perquè el preu del futur de l'or pot ser calculat a partir del seu preu spot i d'altres variables observables mentre que el preu del futur del coure no ?
- 44.** Què volen dir *rendiments de conveniència* i *costos de manteniment* ? Quina és la relació entre el preu del futur, el preu al comptat, els rendiments de conveniència i els costos de manteniment ?
- 45.** Un inversor rep 1100€ al cap d'un any d'haver invertit 1000€. Quin és el tipus d'interès anual amb (a) compost anual; (b) compost semestral; (c) compost mensual i (d) compost continu ?
- 46.** Considerem un contracte forward a tres mesos sobre una acció que no paga dividends. Suposem que el preu de l'acció és de 40€ i que el tipus d'interès lliure de risc és del 5% anual (compost continu). Quin és el preu forward ?
- 47.** Considerem un contracte forward a sis mesos sobre un bonus de descompte a un any quan el preu de lliurament és de 950€. Suposem que durant aquests sis mesos el tipus d'interès compost continu és del 6% anual i que el preu actual del bonus és de 930€. Trobeu el preu forward i el valor actual del contracte forward a llarg. I el valor actual del contracte forward a curt ?
- 48.** Considerem un contracte forward a 10 mesos sobre una acció de preu 50€. Suposem que el tipus d'interès compost continu es manté constant al 8% anual. Suposem que l'acció paga dividends de 0.75€ als tres, sis i nou mesos. Calculeu el preu forward.
- 49.** Considerem un contracte forward que venç d'aquí a sis mesos sobre un títol que reporta un rendiment continu dels dividends del 4% anual. El tipus d'interès lliure de risc és del 10% anual compost continu. El preu del títol és de 25€ i el preu de lliurament és de 27€. Calculeu el valor d'una posició llarga en forward. Deduïu-ne el preu forward.
- 50.** Considerem un contracte de futurs a un any sobre or. Suposem que el preu d'emmagatzemar l'or per un any és de 2€ per unça, fent-se el pagament al final de l'any. El spot és de 450€ i el tipus d'interès del 7% anual. Calculeu el preu del futur.
- 51.** S'inicialitza un contracte forward a llarg amb data de lliurament d'un any sobre una acció que no paga dividends quan el preu de l'acció és de 40€ i el tipus d'interès és del 10% anual compost continu. Quin és el preu forward i el valor inicial del contracte forward ? Sis mesos després, el preu de l'acció és de 45€ i el tipus d'interès segueix sent del 10%. Quin és ara el preu forward i el valor del contracte forward ?
- 52.** Una acció ha de pagar un dividend de 1€ per unitat d'aquí a dos mesos i d'aquí a cinc mesos. El preu spot és de 50€ i el tipus d'interès lliure risc és del 8% anual compost continu. Un inversor acaba de prendre una posició curta en un contracte forward a sis mesos sobre l'acció. Quin és el preu forward i el valor inicial del contracte forward ? Tres mesos més tard, el preu de l'acció és de 48€ i el tipus d'interès és encara del 8%. Quin és ara el preu forward i el valor del contracte forward (en curt) ?

53. El tipus d'interès lliure de risc és del 7% anual compost continu i el rendiment dels dividends en un índex borsari és del 3.2% per any. El valor actual de l'índex és 150. Quin és el preu de futur a sis mesos ?

54. El tipus d'interès lliure de risc és del 9% anual compost continu i el rendiment dels dividends d'un índex borsari és del 5% anual els mesos de febrer, maig, agost i novembre i del 2% la resta de mesos de l'any. El valor de l'índex el 31 de juliol de 1999 és de 300. Quin és el preu del futur per a un contracte amb data de lliurament el 31 de desembre de 1999?

55. El tipus d'interès lliure de risc és del 10% anual compost continu i el rendiment dels dividends en un índex borsari és del 4% per any. El valor actual de l'índex és 400 i el preu del futur per a un contracte amb lliurament a quatre mesos és 405. Quines oportunitats d'arbitratge hi ha ?

56. Els tipus d'interès a dos mesos a Suïssa i als Estats Units són 3% i 8% anual compost continu, respectivament. El preu spot del franc suís és 0.6500\$. El preu del futur per a un contracte amb lliurament a dos mesos és 0.6600\$. Quines oportunitats d'arbitratge hi ha ?

57. El preu de la plata és actualment 9€ per unça. Els costos d'emmagatzament són de 0.24€ per unça anuals a pagar per trimestres avançats. Suposant que el tipus d'interès és del 10% anual compost continu, calculeu el preu del futur de plata a nou mesos.

Futurs sobre tipus d'interès

58. Considerem un bonus amb principal 100€, amb cupons del 8% que es paguen el 1 de març i el 1 de setembre. Calculeu l'interès guanyat entre el 1 de març i el 3 de juliol usant base actual/actual i base 30/360.

59. Estem a 5 de març de 2000 i considerem un bonus cupó del 11%, principal de 100€, amb venciment el 10 de juliol de 2013 i amb preu de cotització (preu net, *clean price*) de 95.50€. L'interès s'acumula amb base actual/actual i es paga semianualment. El cupó més recent és del 10 de gener de 2000 i el proper cupó és pel 10 de juliol. Calculeu el preu d'adquisició (preu cash, *dirty price*) d'aquest bonus.

60. El dia 4 de maig de 1996 un inversor es planteja l'adquisició d'un bonus de l'estat que cotitza al 108.6% (1086€). Els cupons són del 7.8% pagables el 15 d'abril de cada any i el venciment és pel 15 d'abril de 1999. Calculeu la rentabilitat al venciment (és a dir, la T.I.R.=*Tasa Interna de Retorn*).

61. El 15 de maig de 1996 es pacta una operació de venda amb pacte de recompra (*repo=repurchase agreement*) a 30 dies, sobre una lletra del tresor. El preu acordat de compra és de 913.7€ i el preu de venda és de 917.3€. Calculeu la rentabilitat obtinguda en base 30/360.

62. Considerem un bonus cupó del 10% a tres anys, nominal 100€ i rendiment al venciment (T.I.R.) del 12% anual compost continu. Els cupons es paguen semianualment. Calculeu-ne la duració.

63. Proveu que si B és el valor efectiu d'un bonus, r és el rendiment al venciment (compost continu, *continuously compounded yield*) i D és la seva duració, aleshores $\frac{\partial B}{\partial r} = -BD$. En altres paraules, $\Delta B = -BD\Delta r$.

64. Considerem un bonus del tresor a 5 anys de nominal 1000€, rendiment al venciment del 11% anual compost continu i que paga cupons del 8% al final de cada any. Calculeu el preu del bonus i la seva duració. Quin és el preu del bonus si es produeix una davallada del 0.2% del rendiment al venciment ?

65. Completeu la taula següent:

Any n	Tipus spot a n anys	Tipus forward per a l' n -èssim any
1	10	—
2	10.5	
3	10.8	
4	11	
5	11.1	

66. Completeu la taula següent pel Mètode del *Bootstrap*. Suposem que els cupons es paguen cada sis mesos, coincidint l'últim pagament amb el del principal.

Principal €	Venciment a n anys	Cupó anual €	Preu bonus €	Tipus Spot
100	0.25	0	97.5	
100	0.50	0	94.9	
100	1	0	90	
100	1.50	8	96	
100	2	12	101	
100	2.75	10	99.8	

67. Considerem un contracte FRA (*forward rate agreement*) pel qual ambdues parts acorden en t_0 un tipus d'interès R_K sobre un determinat capital S durant un període de temps futur especificat $t_1 < t_2$. És a dir, la part a llarg es compromet a pagar S a la part en curt en el moment t_1 i la part en curt es compromet a retornar $Se^{R_K(t_2-t_1)}$ en el moment t_2 . Proveu que $R_K = r(t_0, t_1, t_2)$, el tipus d'interès forward observat en t_0 pel període de temps futur $t_1 < t_2$.

68. Proveu que el valor en t de la posició llarga en un contracte FRA és

$$FRA_t = Se^{-r(t,t,t_1)(t_1-t)} \left[e^{(R_K - r(t,t_1,t_2))(t_2-t_1)} - 1 \right].$$

69. Qui està interessat a entrar a llarg en un contracte en FRA ? I en curt ?

70. La part en curt en un contracte de futurs sobre renda fixa pot escollir per lliurar entre els tres bonus següents:

Bonus	Preu cotitzat	Factor de conversió
1	99.5	1.0382
2	143.5	1.5188
3	119.75	1.2615

El preu de cotització del futur actual és de 93.25€. Quin bonus escollirà per lliurar ?

71. Considerem una lletra del tresor de nominal 1000€ que s'emeta en t_1 i té venciment en t_2 . Proveu que el preu futur en t , $t < t_1 < t_2$, sobre la lletra és de $F_t = 1000e^{-r(t,t_1,t_2)(t_2-t_1)}$.

72. El tipus spot a 1 any és del 5.5% anual compost continu i el tipus spot a mig any és del 5% anual compost continu. Quin és el preu del futur sobre una lletra del tresor de nominal 1000€ i venciment a sis mesos.

Swaps

73. El 1 de març de 1996 les companyies A i B signen un contracte swap per a tres anys pel qual A paga a B el LIBOR (London Interbank Offer Rate) a sis mesos sobre el principal nominal de 100 milions d'euros i B paga a A el 5% anual compost semianualment sobre el mateix principal. Els pagaments s'efectuen cada sis mesos. Completeu la taula de fluxes de caixa per a la companyia B .

Data	LIBOR	Cash flotant	Cash fix	Ingressos nets
1.3.96	4.2	–	–	–
1.9.96	4.8			
1.3.97	5.3			
1.9.97	5.5			
1.3.98	5.6			
1.9.98	5.9			
1.3.99	6.4			

74. A les companyies A i B , segons la seva qualificació creditícia (*Credit Rating*), els han ofert els tipus d'interès anuals següents en un préstec de C euros a n anys:

	Tipus fix	Tipus flotant
A	$a_1\%$	LIBOR+ $b_1\%$
B	$a_2\%$	LIBOR+ $b_2\%$

Suposem que A està interessada en pagar el tipus flotant i que B està interessada en pagar el tipus fix. Dissenyeu un contracte swap que reporti el mateix benefici per a A i per a B . Quin és aquest benefici ? Quan resulta beneficiós signar un contracte swap ?

75. A les companyies A i B els han ofert (poc real) els tipus d'interès anuals següents en un préstec de C euros a n anys:

	Tipus fix	Tipus flotant
A	5%	LIBOR+1%
B	7%	LIBOR+0.5%

La companyia A està interessada en un préstec a tipus flotant i B en un préstec a tipus fix. Dissenyeu un contracte swap que reporti el mateix benefici per a A i per a B . Quin és aquest benefici ?

76. A les companyies *A* i *B* els han ofert els tipus d'interès anuals següents en un préstec de 20 milions d'euros a cinc anys:

	Tipus fix	Tipus flotant
<i>A</i>	12%	LIBOR+0.1%
<i>B</i>	13.4%	LIBOR+0.6%

La companyia *A* està interessada en un préstec a tipus flotant i *B* en un préstec a tipus fix. Dissenyeu un contracte swap que reporti a un banc, actuant com a intermediari, un benefici del 0.1% anual i que resulti atractiu per igual a ambdues companyies.

77. Una institució financera, en un contracte swap, paga el LIBOR a sis mesos i rep el 8% anual (compost semianualment) sobre un principal nocional de 100 milions d'euros. El swap venç d'aquí a 1.25 anys. Els tipus de descompte a 3, 9 i 15 mesos són el 10%, 10.5% i el 11%, respectivament. El LIBOR a sis mesos l'últim dia de pagament va ser del 10.2% (compost semianualment). Calculeu el valor del contracte swap per a la institució financera (en termes de bonus i de FRAs).

78. Un swap sobre 100 milions d'euros, que venç d'aquí a 10 mesos, acorda l'intercanvi del LIBOR a sis mesos pel 12% anual (compost semianualment). La mitjana de l'oferta i la demanda en els swaps per al LIBOR a sis mesos i venciment qualsevol és actualment del 10% anual compost semianualment. Fa dos mesos el LIBOR a sis mesos va ser del 9.6% anual. Calculeu el valor actual del swap per a ambdues parts.

79. Una institució financera ha acordat en un contracte swap sobre tipus d'interès pagar el 10% anual i rebre el LIBOR a tres mesos sobre un nocional de 100 milions d'euros, efectuant-se els pagaments cada tres mesos. El swap venç en 14 mesos. La mitjana de l'oferta i la demanda en els swaps per al LIBOR a tres mesos i venciment qualsevol és actualment del 12% anual. El LIBOR a tres mesos era fa un mes del 11.8% anual. Tots els tipus són compostos trimestralment. Quin és el valor del swap ?

80. A les companyies *A* i *B* els han ofert els tipus d'interès anuals fixos a cinc anys:

	\$	€
<i>A</i>	8%	11.6%
<i>B</i>	10%	12%

La companyia *A* està interessada en un préstec en euros i *B* en un préstec en dòlars. Dissenyeu un contracte swap que reporti a una institució financera, actuant com a intermediària, un benefici del 0.4% anual i que resulti atractiu per igual a ambdues companyies.

81. A les companyies *A* i *B* els han ofert els tipus d'interès anuals fixos a cinc anys:

	Iens	Dòlars
<i>A</i>	5%	9.6%
<i>B</i>	6.5%	10%

La companyia *A* està interessada en un préstec en dòlars i *B* en un préstec en iens. Dissenyeu un contracte swap que reporti a una institució financera, actuant com a intermediària, un benefici de 50 punts base anuals i que resulti atractiu per igual a ambdues companyies.

82. Suposem que els tipus d'interès al Japó i als Estats Units són del 4% anual i del 9% anual compost continu, respectivament. Una institució financera ha entrat en un contracte swap de divises pel qual rep el 5% anual en iens i paga el 8% anual en dòlars un cop a l'any. Els principals són 1200 milions de iens i 10 milions de dòlars. El swap venç d'aquí a tres anys i el tipus de canvi vigent és 1 dòlar a 110 iens. Calculeu el valor del swap (en termes de bonus i de contractes forward).

Propietats dels preus de les opcions sobre accions

83. El preu d'una opció sobre una acció en el moment t depèn de les sis variables següents: el preu de l'acció en el moment t , S_t ; el preu d'exercici (*strike*) de l'opció, X ; la data de venciment de l'opció, T ; la volatilitat del preu de l'acció, σ ; el tipus d'interès lliure de risc compost continu per a una inversió a venciment en T , r ; i el valor en el moment t dels dividendes que reporta l'acció fins al venciment, D_t . Anomenarem c_t , C_t , el valor en el moment t de l'opció de compra europea, americana, de l'acció i p_t , P_t , el valor en el moment t de l'opció de venda europea, americana, de l'acció. Digueu quin és l'efecte produït en el preu de l'opció quan una de les sis variables puja de valor mentre les altres romanen igual.

Variable	c_t	p_t	C_t	P_t
S_t				
X				
T				
σ				
r				
D_t				

84. D'ara en endavant suposarem que en el mercat hi ha diversos participants pels quals no hi ha despeses de transaccions, els beneficis o pèrdues estan subjectes als mateixos impostos i els préstecs al tipus d'interès lliure de risc són possibles. Usant arguments d'arbitratge, proveu que:

$$c_t \leq C_t \leq S_t.$$

$$p_t \leq P_t \leq X.$$

$$p_t \leq X e^{-r(T-t)}.$$

85. Proveu que si l'acció no paga dividendes, aleshores $S_t - X e^{-r(T-t)} \leq c_t \leq S_t$. Podeu considerar una cartera A composta d'una opció de compra europea d'una acció més una quantitat en efectiu de $X e^{-r(T-t)}$ i una cartera B composta d'una acció.

86. Trobeu una cota inferior pel preu d'una opció de compra europea sobre una acció que no paga dividendes quan el preu de l'acció és de 51€, el preu d'exercici és 50€, el temps pel venciment són sis mesos i el tipus d'interès lliure de risc és del 12% anual.

87. Proveu que si l'acció no paga dividendes, aleshores $X e^{-r(T-t)} - S_t \leq p_t \leq X e^{-r(T-t)}$. Podeu considerar una cartera A composta d'una opció de venda europea d'una acció més una acció i una cartera B composta d'una quantitat en efectiu de $X e^{-r(T-t)}$.

- 88.** Trobeu una cota inferior pel preu d'una opció de venda europea sobre una acció que no paga dividends quan el preu de l'acció és de 38€, el preu d'exercici és 40€, el temps pel venciment són tres mesos i el tipus d'interès lliure de risc és del 10% anual.
- 89.** Proveu que una opció de compra americana sobre una acció que no paga dividends no s'exerceix mai abans del venciment. Podeu considerar una cartera A composta d'una opció de compra americana d'una acció més una quantitat en efectiu de $Xe^{-r(T-t)}$ i una cartera B composta d'una acció. En particular, $c_t = C_t$.
- 90.** Proveu la **paritat put-call** per opcions europees sobre accions que no paguen dividends: $c_t - p_t = S_t - Xe^{-r(T-t)}$, valor del contracte forward per comprar l'acció en data de venciment T pel preu de lliurament X .
- 91.** Proveu que si l'acció no paga dividends, aleshores $X - S_t \leq P_t \leq X$. Deduïu que, si $S_t < X(1 - e^{-r(T-t)})$, aleshores $p_t < P_t$. En particular, no sempre és convenient esperar al venciment per a l'exercici d'una opció de venda americana.
- 92.** Proveu les desigualtats següents per opcions americanes sobre accions que no paguen dividends: $S_t - X \leq C_t - P_t \leq S_t - Xe^{-r(T-t)}$.
- 93.** Proveu que si l'acció paga dividends, aleshores $S_t - D_t - Xe^{-r(T-t)} \leq c_t \leq S_t - D_t$. Podeu considerar una cartera A composta d'una opció de compra europea d'una acció més una quantitat en efectiu de $D_t + Xe^{-r(T-t)}$ i una cartera B composta d'una acció.
- 94.** Proveu que si l'acció paga dividends, aleshores $D_t + Xe^{-r(T-t)} - S_t \leq p_t \leq Xe^{-r(T-t)}$. Podeu considerar una cartera A composta d'una opció de venda europea d'una acció més una acció i una cartera B composta d'una quantitat en efectiu de $D_t + Xe^{-r(T-t)}$.
- 95.** Proveu la **paritat put-call** per opcions europees sobre accions que paguen dividends: $c_t - p_t = S_t - D_t - Xe^{-r(T-t)}$, valor del contracte forward per comprar l'acció en data de venciment T pel preu de lliurament X .
- 96.** Proveu les desigualtats següents per opcions americanes sobre accions que paguen dividends: $S_t - D_t - X \leq C_t - P_t \leq S_t - Xe^{-r(T-t)}$.
- 97.** Trobeu els payoff de les opcions de compra i venda europees, en posició llarga i curta.
- 98.** Un inversor compra una call europea amb preu d'exercici X i emet una put europea amb el mateix preu d'exercici. Descriviu la posició de l'inversor.
- 99.** Una opció de compra i una de venda europees sobre una acció tenen preu d'exercici de 20€ i data de venciment en tres mesos. Ambdues es venen per 3€. El tipus d'interès lliure de risc és del 10% anual, el preu actual de l'acció és de 19€ i s'espera un dividend de 1€ en un mes. Trobeu una oportunitat d'arbitratge.
- 100.** El preu d'una opció de compra americana sobre una acció que no paga dividends és de 4€. El preu de l'acció és de 31€, el preu d'exercici és de 30€ i la data de venciment és en tres mesos. El tipus d'interès lliure de risc és del 8%. Trobeu cotes inferior i superior pel preu d'una opció de venda americana sobre la mateixa acció amb el mateix preu d'exercici i data de venciment.

Estratègies de mercat usant opcions sobre accions

101. Dibuixeu la gràfica del benefici en funció del preu de l'acció de les carteres següents:

Una acció a llarg i una call europea sobre l'acció en curt. Aquesta estratègia s'anomena *emetre un call coberta*.

Una acció en curt i una call europea sobre l'acció a llarg.

Una acció a llarg i una put europea sobre l'acció a llarg. Aquesta estratègia s'anomena *put protegida*.

Una acció en curt i una put europea sobre l'acció en curt.

102. Usant la paritat put-call, compareu les gràfiques anteriors amb les gràfiques de benefici en funció del preu de l'acció de la call europea a llarg i en curt i de la put europea a llarg i en curt.

103. Una *spread trading strategy* consisteix en prendre una posició en dos o més opcions europees del mateix tipus. Calculeu el payoff d'una **bull spread**: comprar una call europea sobre una acció amb preu d'exercici X_1 i vendre una call europea sobre la mateixa acció amb preu d'exercici X_2 , $X_1 < X_2$. Dibuixeu la gràfica del benefici en funció del preu de l'acció.

104. Un inversor compra per 3€ una call europea amb preu d'exercici 30€ i ven per 1€ una call europea amb preu d'exercici 35€. Calculeu el payoff d'aquesta bull spread i dibuixeu la gràfica del benefici en funció del preu de l'acció.

105. Construïu una bull spread usant dues puts europees sobre la mateixa acció, una a llarg i l'altra en curt, amb diferents preus d'exercici.

106. Calculeu el payoff d'una **bear spread**: comprar una call europea sobre una acció amb preu d'exercici X_2 i vendre una call europea sobre la mateixa acció amb preu d'exercici X_1 , $X_1 < X_2$. Dibuixeu la gràfica del benefici en funció del preu de l'acció.

107. Un inversor compra per 1€ una call europea amb preu d'exercici 35€ i ven per 3€ una call europea amb preu d'exercici 30€. Calculeu el payoff d'aquesta bear spread i dibuixeu la gràfica del benefici en funció del preu de l'acció.

108. Construïu una bear spread usant dues puts europees sobre la mateixa acció, una a llarg i l'altra en curt, amb diferents preus d'exercici.

109. Qui està interessat en comprar una bull spread i qui ho està en comprar una bear spread ?

110. Calculeu el payoff d'una **butterfly spread**: comprar una call europea sobre una acció amb preu d'exercici X_1 ; comprar una call europea sobre la mateixa acció amb preu d'exercici X_3 , $X_1 < X_3$; vendre dues calls europees sobre la mateixa opció amb preu d'exercici $X_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_3)$. Dibuixeu la gràfica del benefici en funció del preu de l'acció.

111. Suposem que una acció val actualment 61€. Suposem que els preus de mercat de les calls europees a sis mesos sobre aquesta acció és el següent:

Preu d'exercici	Preu de la call
55	10
60	7
65	5

Un inversor que veu improbable una gran variació en el preu de l'acció, compra una call amb preu d'exercici 55, compra una call amb preu d'exercici 65 i ven dues calls amb preu d'exercici 60. Calculeu el payoff d'aquesta butterfly spread i dibuixeu la gràfica del benefici en funció del preu de l'acció.

112. Construïu una butterfly spread usant puts enlloc de calls.

113. Considerem $X_1 < X_2$, $a = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$, $b = \frac{Y_1 X_2 - Y_2 X_1}{X_2 - X_1}$, i un derivat el payoff del qual és el següent:

S_T	Payoff del derivat
$S_T \leq X_1$	Y_1
$X_1 \leq S_T \leq X_2$	$aS_T + b$
$X_2 \leq S_T$	Y_2

Construïu una cartera amb el mateix payoff.

114. Suposem que la gràfica del payoff d'un derivat sobre una acció en funció del preu de l'acció és una línia poligonal. Construïu una cartera que repliqui el mateix payoff.

115. Una *combinació* és una estratègia que involucra prendre posicions alhora en una call i en una put sobre la mateixa acció. Calculeu el payoff d'una **straddle**: comprar una call europea sobre una acció i comprar una put europea sobre la mateixa acció amb el mateix preu d'exercici X i la mateixa data de venciment. Dibuixeu la gràfica del benefici en funció del preu de l'acció.

116. Una call amb preu d'exercici 60€ costa 6€. Una put amb el mateix preu d'exercici i data de venciment costa 4€. Calculeu el benefici d'una straddle construïda usant aquesta call i aquesta put. Per a quins preus de l'acció la straddle dona lloc a pèrdues ?

117. Calculeu el payoff d'una **strangle**: comprar una call europea sobre una acció i comprar una put europea sobre la mateixa acció i mateixa data de venciment, amb preus d'exercici X_2 i X_1 , $X_1 < X_2$, respectivament. Dibuixeu la gràfica del benefici en funció del preu de l'acció.

118. Calculeu el payoff d'una strangle on el preu d'exercici de la put és més gran que el preu d'exercici de la call.

2 Models discrets

Informació, mesurabilitat, filtracions

119. Sigui (Ω, \mathcal{A}) un espai mesurable. Sigui $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ una partició finita de Ω , $B_i \in \mathcal{A}$. Sigui $\mathcal{B} = \sigma(B)$ la sub- σ -àlgebra (finita) de \mathcal{A} generada per B . Recíprocament, sigui \mathcal{B} una sub- σ -àlgebra de \mathcal{A} finita i considerem el conjunt $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$, de tots els $B_i \in \mathcal{B}$, $B_i \neq \emptyset$, tals que l'únic element no buit de \mathcal{B} que conté B_i és ell mateix (s'anomenen els **àtoms** de \mathcal{B}). Proveu que B és una partició finita de Ω i que correspondència entre particions finites B de Ω incloses en \mathcal{A} i sub- σ -àlgebres finites \mathcal{B} de \mathcal{A} definida per $B \rightarrow \sigma(B)$ i $\mathcal{B} \rightarrow \{\text{àtoms de } \mathcal{B}\}$ és bijectiva.

120. Sigui (Ω, \mathcal{A}) un espai mesurable i A i B dues particions finites, $A, B \subset \mathcal{A}$. Proveu que A és més fina que $B \Leftrightarrow \sigma(A) \supset \sigma(B)$.

121. Sigui (Ω, \mathcal{A}) un espai mesurable, B una partició finita de Ω , $B \subset \mathcal{A}$ i $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicació. Diem que X és B -mesurable si és constant sobre els elements de la partició. Proveu que si X és B -mesurable i si A és més fina que B , aleshores X és A -mesurable.

122. Sigui (Ω, \mathcal{A}) un espai mesurable finit i $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicació. Anomenem B_X a la partició més grollera per a la qual X és B_X -mesurable. Si $B \subset \mathcal{A}$ és una partició finita de Ω , proveu que X és B -mesurable si i només si B és més fina que B_X .

123. Sigui (Ω, \mathcal{A}) un espai mesurable i $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicació. Sigui \mathcal{B} una sub- σ -àlgebra finita de \mathcal{A} i B la partició dels àtoms de \mathcal{B} . Proveu que X és \mathcal{B} -mesurable si i només si X és B -mesurable.

124. Sigui (Ω, \mathcal{A}) un espai mesurable, \mathcal{B} una σ -àlgebra i $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicació. Proveu que si X és \mathcal{B} -mesurable i si $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$, aleshores X és \mathcal{A} -mesurable.

125. Sigui (Ω, \mathcal{A}) un espai mesurable finit i $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicació. Anomenem \mathcal{B}_X a la mínima σ -àlgebra per a la qual X és \mathcal{B}_X -mesurable. Proveu que X és \mathcal{B} -mesurable si i només si $\mathcal{B} \supset \mathcal{B}_X$.

Esperança condicionada. Martingales

126. Siguin (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicació \mathcal{A} -mesurable. Sigui \mathcal{B} una σ -àlgebra, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. En particular, X no té perquè ser \mathcal{B} -mesurable. Volem trobar la "millor" aproximació $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de X que sigui \mathcal{B} -mesurable. Usant el Teorema de Radon-Nikodym, proveu que, si X és integrable, aleshores existeix $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{B} -mesurable i integrable tal que $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_B) = \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_B)$ per a tot $B \in \mathcal{B}$. Si \tilde{Y} és una altra variable aleatòria complint aquestes tres propietats, aleshores $\tilde{Y} = Y$ quasi-segurament. Y s'anomena l'**esperança condicionada de X per \mathcal{B}** i es denota per $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})$.

127. Siguin (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicació \mathcal{A} -mesurable. Sigui \mathcal{B} una σ -àlgebra, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Proveu que si \mathcal{B} és una sub- σ -àlgebra de \mathcal{A} finita amb àtoms B_1, B_2, \dots, B_n , aleshores $\mathbb{E}(X | \mathcal{B}) = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{B_i})}{p(B_i)} \mathbf{1}_{B_i}$.

128. Siguin (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicació \mathcal{A} -mesurable. Sigui B una partició finita de Ω , $B \subset \mathcal{A}$. Definim l'esperança de X condicionada a B com $\mathbb{E}(X | B) = \mathbb{E}(X | \sigma(B))$. Proveu que si Ω és finit i $\omega \in \Omega$, aleshores $\mathbb{E}_p(X | B)(\omega) = \frac{\sum_{\xi \in B(\omega)} p(\xi) X(\xi)}{\sum_{\xi \in B(\omega)} p(\xi)}$, on $B(\omega)$ és l'únic $B_i \in B$ tal que $\omega \in B_i$.

129. Siguin (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicació \mathcal{A} -mesurable. Sigui \mathcal{B} una σ -àlgebra, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Proveu que:

- (a) Si $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathbb{E}(X | \mathcal{B}) = \mathbb{E}(X)$.
- (b) Si X és \mathcal{B} -mesurable $\mathbb{E}(X | \mathcal{B}) = X$ q.s.
- (c) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{B})) = \mathbb{E}(X)$.
- (d) $\mathbb{E}(aX + bY | \mathcal{B}) = a\mathbb{E}(X | \mathcal{B}) + b\mathbb{E}(Y | \mathcal{B})$ q.s..
- (e) Si $X \geq 0$, aleshores $\mathbb{E}(X | \mathcal{B}) \geq 0$ q.s. i si $X \geq Y$, aleshores $\mathbb{E}(X | \mathcal{B}) \geq \mathbb{E}(Y | \mathcal{B})$ q.s. En particular, $|\mathbb{E}(X | \mathcal{B})| \leq \mathbb{E}(|X| | \mathcal{B})$ q.s.. O sigui $\|\mathbb{E}(X | \mathcal{B})\|_{L^1(\Omega)} \leq \|X\|_{L^1(\Omega)}$.
- (f) Si \mathcal{C} és una sub- σ -àlgebra de \mathcal{B} , aleshores $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{B}) | \mathcal{C}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{C})$ q.s..
- (g) Si Y és \mathcal{B} -mesurable integrable, aleshores $\mathbb{E}(XY | \mathcal{B}) = Y\mathbb{E}(X | \mathcal{B})$.
- (h) Si X és independent de \mathcal{B} , aleshores $\mathbb{E}(X | \mathcal{B}) = \mathbb{E}(X)$ q.s..

130. Siguin (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat i $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicació \mathcal{A} -mesurable. Sigui \mathcal{B} una sub- σ -àlgebra. Proveu que X és independent de \mathcal{B} si i només si per a tot $u \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(e^{iuX} | \mathcal{B}) = \mathbb{E}(e^{iuX})$ q.s..

131. Considerem (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat finit, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ i $p(\{\omega\}) > 0$ per a tot $\omega \in \Omega$. Suposem que tenim una filtració $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ i un procés $X = (X_n)_{n=0}^N$ \mathcal{F} -adaptat. X és una **martingala** si $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$ per a tot $n \leq N - 1$. X és una **supermartingala** si $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq X_n$ per a tot $n \leq N - 1$. X és una **submartingala** si $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq X_n$ per a tot $n \leq N - 1$. Proveu que

- (a) X és una martingala si i només si $\mathbb{E}(X_{n+j} | \mathcal{F}_n) = X_n$ per a tot $j \geq 0$.
- (b) Si X és una martingala, aleshores $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$ per a tot $n \geq 0$.
- (c) La suma de martingales és una martingala.
- (d) Proveu les propietats similars per a les super(sub)martingales.

132. Siguin $X = (X_n)_{n=0}^N$ una martingala i $H = (H_n)_{n=0}^N$ un procés previsible respecte d'una filtració $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$. Denotem $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ i $Y_0 = H_0 X_0$ i $Y_n = H_0 X_0 + H_1 \Delta X_1 + \dots + H_n \Delta X_n$ per a tot $n \geq 1$. El procés $Y = (Y_n)_{n=0}^N$ s'anomena la **transformació de martingala** de X per H . Proveu que Y és una martingala respecte de \mathcal{F} .

133. Un procés adaptat $X = (X_n)_{n=0}^N$ és una martingala si i només si, per a tot procés previsible $H = (H_n)_{n=0}^N$, $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^N H_i \Delta X_i) = 0$.

134. Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és una variable aleatòria i $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ és una filtració, aleshores el procés $E = (E_n)_{n=0}^N$ definit per $E_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ és una martingala.

Mercats viables. Mercats complets

135. Sigui (Ω, \mathcal{A}, p) un espai de probabilitat finit, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $p(\{\omega\}) > 0$ per a tot $\omega \in \Omega$. Sigui $\mathcal{F} = (\mathcal{F})_{n=0}^N$ una filtració, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_N = \mathcal{P}(\Omega)$. El mercat consisteix en $d + 1$ actius financers els preus dels quals a temps n són modelats per variables aleatòries no negatives $S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d$ \mathcal{F}_n -mesurables. Denotem $S_n = (S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d)$. S_0 és un actiu sense risc, $S_0^0 = 1$ i suposem que $S_n^0 = (1 + r)^n$. Denotem $\beta_n = 1/S_n^0$ el factor de descompte (o actualització). Una **estratègia de mercat** és $\Phi = ((\Phi_n^0, \Phi_n^1, \dots, \Phi_n^d))_{n=0}^N$, on Φ_n^i denota la quantitat d'accions de l'actiu i que té la cartera a temps n . Φ és previsible, o sigui, Φ_n^i és \mathcal{F}_0 -mesurable i, per a tot $n \geq 1$, Φ_n^i és \mathcal{F}_{n-1} -mesurable. El valor de la cartera a temps n és el producte escalar $V_n(\Phi) = \Phi_n S_n = \sum_{i=0}^d \Phi_n^i S_n^i$. El valor actualitzat és $\tilde{V}_n(\Phi) = \beta_n(\Phi_n S_n) = \Phi \tilde{S}_n$ on $\tilde{S}_n = (1, \beta_n S_n^1, \dots, \beta_n S_n^d)$ és el vector de preus actualitzats. L'estratègia és **autofinançada** si $\Phi_n S_n = \Phi_{n+1} S_{n+1}$ per a tot $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Proveu que són equivalents

- (i) L'estratègia Φ és autofinançada.
- (ii) $\Delta V_n(\Phi) = \Phi_n \Delta S_n$ per a tot $n = 1, \dots, N$.
- (iii) $V_n(\Phi) = V_0(\Phi) + \sum_{j=1}^n \Phi_j \Delta S_j$ per a tot $n = 1, \dots, N$.
- (iv) $\tilde{V}_n(\Phi) = V_0(\Phi) + \sum_{j=1}^n \Phi_j \Delta \tilde{S}_j$ per a tot $n = 1, \dots, N$.

136. Proveu que per a tot procés previsible $((\Phi_n^1, \dots, \Phi_n^d))_{n=0}^N$ i per a tota variable aleatòria V_0 \mathcal{F}_0 -mesurable existeix un únic procés previsible $(\Phi_n^0)_{n=0}^N$ tal que $((\Phi_n^0, \Phi_n^1, \dots, \Phi_n^d))_{n=0}^N$ és una estratègia autofinançada amb valor inicial V_0 .

137. Una estratègia és **admissible** si és autofinançada i $V_n(\Phi) \geq 0$ per a tot $n = 0, 1, \dots, N$. Una **estratègia d'arbitratge** és una estratègia admissible Φ tal que $V_0(\Phi) = 0$ i $V_N(\Phi) > 0$. Un mercat és **viable** si no hi ha oportunitat d'arbitratge. Proveu que un mercat és viable si i només si existeix una probabilitat $q \sim p$ tal que $\tilde{S} = (\tilde{S}_n)_{n=0}^N$ és una q -martingala.

138. Un derivat europeu a venciment N ve definit pel seu payoff $h \geq 0$, funció \mathcal{F}_N -mesurable (i només depèn de S_N). Un derivat europeu de payoff h es diu **assolible** (*attainable*) si existeix una estratègia admissible de valor h al venciment. El mercat és **complet** si tot derivat europeu és assolible. Proveu que un mercat viable és complet si i només si existeix una única probabilitat $q \sim p$ tal que $\tilde{S} = (\tilde{S}_n)_{n=0}^N$ és una q -martingala.

El model d'arbre binomial

139. Considerem una acció que no paga dividends el preu de la qual segueix el model de branca binomial (un sol pas). Considerem un derivat sobre l'acció. Usant una cartera formada per Δ accions a llarg i una unitat del derivat en curt i suposant absència d'oportunitat d'arbitratge, deduiu el valor del derivat.

140. Considerem una acció que no paga dividends el preu de la qual segueix el model de branca binomial (un sol pas). Considerem un derivat sobre l'acció. Proveu que la **probabilitat neutral al risc** pel preu de l'acció permet calcular el valor del derivat. Es parla de **valoració neutral al risc**.

141. Considerem una acció que no paga dividends el preu de la qual segueix el model de branca binomial (un sol pas). Considerem un derivat sobre l'acció. Construïu una cartera d'accions i bonus amb valor al venciment el payoff del derivat. Deduïu-ne el valor del derivat. Aquesta estratègia s'anomena **replicant**.

142. El preu d'una acció és actualment 40€. Se sap que d'aquí a un mes serà 38€ o 42€. El tipus d'interès lliure de risc és del 8% anual compost continu. Quin és el valor d'una opció de compra europea amb preu d'exercici de 39€ ?

143. El preu d'una acció és actualment 50€. Se sap que d'aquí a un mes serà 45€ o 55€. El tipus d'interès lliure de risc és del 10% anual compost continu. Quin és el valor d'una opció de venda europea amb preu d'exercici de 50€ ?

144. El preu d'una acció és actualment 100€. En el proper any s'espera una revalorització a l'alça i a la baixa del 20%. Una opció de compra europea amb preu d'exercici 110€ es cotitza a 6,9033€. Quin tipus d'interès lliure de risc s'està considerant ?

145. Una opció de compra europea d'una acció a un any i preu d'exercici de 105€ es cotitza en 3,5973€. L'opció de venda europea sobre la mateixa acció a un any i mateix preu d'exercici es cotitza a 3,4764€. El tipus d'interès lliure de risc és del 5%. Pel proper any s'espera una revalorització de l'acció a l'alça i a la baixa del 10%. Quina és la quantitat d'accions que ha de comprar per cobrir-se un emissor de l'opció de compra ?

146. El preu d'una acció és actualment 100€. En els propers dos períodes semestral s'espera una revalorització a l'alça i a la baixa del 10%. El tipus d'interès lliure de risc és del 8% anual compost continu. Quin és el valor d'una opció de compra europea a un any i preu d'exercici de 100€ ?

147. El preu d'una acció és actualment 100€. En els propers dos períodes semestral s'espera una revalorització a l'alça i a la baixa del 10%. El tipus d'interès lliure de risc és del 8% anual compost continu. Quin és el valor d'una opció de venda europea a un any i preu d'exercici de 100€ ? Comproveu la paritat put-call.

Opcions americanes

148. Considerem el procés $Z = (Z_n)_{n=0}^N$ definit per $Z_n = (S_n^1 - X)_+$, el benefici immediat d'exercir una opció americana de compra a venciment N i preu d'exercici X . Definim $U_N = Z_N$ i $U_{n-1} = \max(Z_{n-1}, \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_q(U_n | \mathcal{F}_{n-1}))$, $n = 1, \dots, N$ (q és la probabilitat neutral al risc per a S^1). Observeu que U_n és el valor de la call americana a temps n . Proveu que $\tilde{U} = (\tilde{U}_n)_{n=0}^N$ és una q -supermartingala i és la menor supermartingala que domina el procés $\tilde{Z} = (\tilde{Z}_n)_{n=0}^N$.

149. El preu d'una acció és actualment 40€. En els propers dos trimestres s'espera una revalorització a l'alça i a la baixa del 10%. El tipus d'interès lliure de risc és del 12% anual compost continu.

- (a) Quin és el valor d'una opció de venda europea a mig any i preu d'exercici 42€ ?
- (b) Quin és el valor d'una opció de venda americana a mig any i preu d'exercici 42€ ?
- (c) Com ha de ser el strike per a que sigui òptim l'exercici als tres mesos ?

3 Models continus

Càlcul d'Îto

- 150.** Proveu que $d(W_t^2) = 2W_t dW_t + dt$.
- 151.** Proveu que $df(W_t) = \frac{1}{2}f''(W_t)dt + f'(W_t)dW_t$.
- 152.** Proveu que si $X_t = \exp(W_t)$, $dX_t = X_t(\frac{1}{2}dt + dW_t)$.
- 153.** Calculeu $\int_0^t W_s^n dW_s$.
- 154.** Proveu que si $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ i $dY_t = \lambda_t dt + \rho_t dW_t$, aleshores $d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$.
- 155.** Si $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ i $dY_t = \lambda_t dt + \rho_t d\tilde{W}_t$ amb $W = \{W_t\}_t$ i $\tilde{W} = \{\tilde{W}_t\}_t$ dos moviments brownians independents, aleshores $dX_t dY_t = \sigma_t \rho_t dW_t d\tilde{W}_t = 0$. En aquest cas $d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t$.
- 156.** Si $dB_t = r_t dt$ i $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$, proveu que $d(B_t X_t) = (dB_t)X_t + B_t dX_t$.
- 157.** Si $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ i $dY_t = \lambda_t dt + \rho_t dW_t$, proveu que $\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - \int_0^t Y_s dX_s - \int_0^t \sigma_s \rho_s ds$.
- 158.** Comproveu que $\int_0^t W_s ds = tW_t - \int_0^t s dW_s$.
- 159.** Comproveu que $\int_0^a (a-t) dW_t = \int_0^a W_t dt$.
- 160.** Comproveu que $\int_0^t (W_s^2 - s) dW_s = \frac{1}{3}W_t^3 - tW_t$.

El model de Black-Scholes

161. Suposem que el preu d'una acció que no reparteix dividends segueix l'equació diferencial estocàstica $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$, μ i σ constants. La versió discreta en el temps és $\Delta S_{t_i} = S_{t_{i-1}}(\mu \Delta t_i + \sigma \Delta W_{t_i})$, on $\Delta S_{t_i} = S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ i $\Delta W_{t_i} = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$. Dedueïu que la variable aleatòria $\Delta S_{t_i}/S_{t_{i-1}}$ segueix una distribució normal de mitjana $\mu \Delta t_i$ i desviació standard $\sigma \sqrt{\Delta t_i}$. Anomenem μ la **deriva** o **rendibilitat esperada** i σ la **volatilitat**.

162. Considerem una acció que no paga dividends, amb volatilitat del 30% anual i rendibilitat esperada del 15% anual compost continu. Si el valor actual és 100€, proveu que la variació del preu de l'acció per a la propera setmana és una variable aleatòria que segueix una normal amb mitjana 0,288€ i desviació standard 4,16€.

163. Suposem que un procés X_t verifica $dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$. Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ és dos vegades diferenciable amb continuïtat, proveu que $df(X_t, t) = (\mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2})dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dW_t$.

164. Suposem que el preu d'una acció que no reparteix dividends segueix l'equació diferencial estocàstica $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$, μ i σ constants. Trobeu l'equació diferencial estocàstica que verifica el preu forward sobre aquesta acció, suposant que el tipus d'interès lliure de risc és constant r .

165. Resoleu l'equació diferencial estocàstica $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ suposant que μ i σ són constants.

166. Suposem que el preu d'una acció que no reparteix dividends segueix l'equació diferencial estocàstica $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$, μ i σ constants. Donat $0 \leq b \leq 100$, prenem $a = \mathcal{N}^{-1}(0, 1)(\frac{b+100}{200})$. Aleshores un interval de confiança del $b\%$ per a S_T és $[S_t \exp((\mu - \sigma^2/2)(T-t) - a\sigma\sqrt{T-t}), S_t \exp((\mu - \sigma^2/2)(T-t) + a\sigma\sqrt{T-t})]$.

167. Considerem una acció actualment valorada en 40€, rendibilitat esperada del 16% anual i volatilitat del 20% anual. Trobeu un interval de confiança del 95% pel preu de l'acció en sis mesos.

168. Considerem una acció actualment valorada en 50€, rendibilitat esperada del 18% anual i volatilitat del 30% anual. Trobeu un interval de confiança del 97% pel preu de l'acció en dos anys.

169. Suposem que el preu d'una acció que no reparteix dividends segueix l'equació diferencial estocàstica $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$, μ i σ constants. Proveu que $\mathbb{E}(S_T) = S_t e^{\mu(T-t)}$ i que $\sigma^2(S_T) = S_t^2 e^{2\mu(T-t)} [e^{\sigma^2(T-t)} - 1]$.

170. Considerem una acció actualment valorada en 40€, rendibilitat esperada del 16% anual i volatilitat del 20% anual. Calculeu l'esperança i la variància del preu en un any.

171. Les fórmules de Black-Scholes per a la valoració d'opcions europees de compra i de venda ens diuen que

$$\begin{aligned} c_t &= S_t N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2) \text{ i} \\ p_t &= X e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \text{ on} \\ N(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv, \\ d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\log\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right) \text{ i} \\ d_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\log\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right). \end{aligned}$$

Considerem una opció europea a sis mesos sobre una acció que no reparteix dividends. El valor actual de l'acció és 42€, el preu d'exercici de l'opció és 40€, el tipus d'interès lliure de risc és del 10% anual i la volatilitat és del 20% anual. Calculeu el valor de l'opció tant si és de compra com si és de venda.

172. Calculeu el preu d'una opció europea de compra a tres mesos, sobre una acció que no paga dividends, preu d'exercici de 50€, preu actual de l'acció 52€, tipus d'interès lliure de risc del 12% anual i volatilitat del 30% anual.

173. Calculeu el preu d'una opció europea de venda a tres mesos, sobre una acció que no paga dividends, preu d'exercici de 50€, preu actual de l'acció 50€, tipus d'interès lliure de risc del 10% anual i volatilitat del 30% anual.

174. Calculeu el valor d'una put europea sobre una acció (que no reparteix dividends) valorada actualment en 52€ i amb volatilitat del 30%, amb preu d'exercici 54€ i data de venciment a tres mesos, quan el tipus d'interès lliure de risc és del 12% anual.

175. Considerem una opció a quatre mesos sobre una acció que no reparteix dividends. El valor actual de l'acció és 30€, el preu d'exercici de l'opció és 29€, el tipus d'interès lliure de risc és del 5% anual i la volatilitat és del 25% anual.

- (a) Calculeu el valor de l'opció si és una call europea.
- (b) Calculeu el valor de l'opció si és una call americana.
- (c) Calculeu el valor de l'opció si és una put europea.
- (d) Comproveu la paritat put-call.

176. Amb la probabilitat neutral al risc modelem el valor d'una acció que no reparteix dividends com S_t verificant l'equació diferencial estocàstica $dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$, r tipus d'interès lliure de risc. Per al derivat de valor $D_t = D(S_t, t) = D(S, t)$ i usant la fórmula d'Itô (en dues variables) deduiu l'equació en derivades parcials de Black-Scholes i l'estratègia autofinançada replicant.

177. Comproveu que el valor d'un contracte forward pel lliurament d'una acció, que no reparteix dividends, en la data de venciment T i pel preu de lliurament K , verifica l'equació en derivades parcials de Black-Scholes.

178. Comproveu que el valor d'una call europea verifica l'equació en derivades parcials de Black-Scholes.

179. Comproveu que per a una call europea el "hedging" és $\Phi_t = N(d_1)$.

180. Comproveu per a una call europea $N(d_2)$ és la probabilitat (amb la del món neutral al risc) que s'exerciti l'opció.

181. Calculeu el valor d'una call europea amb venciment a un any i preu d'exercici de 46 euros sobre una acció (que no reparteix dividends) valorada actualment en 43 euros. La volatilitat de l'acció és del 28% anual i el tipus d'interès és del 5% anual compost continu. Quina probabilitat hi ha que l'opció s'exerciti ?

182. Calculeu la probabilitat (amb la del món neutral al risc) que s'exerceixi una call europea sobre una acció (que no reparteix dividends) valorada actualment en 38€ i volatilitat del 35%, amb preu d'exercici 40€ i data de venciment a sis mesos, quan el tipus d'interès lliure de risc és del 10% anual.

183. Una *call binària* és un contracte que paga 1 euro si en data de venciment T el preu de l'actiu subjacent (S_t en t) és més gran que el preu d'exercici X . Trobeu el valor de la call a l'instant $t < T$. Anàlogament, una *put binària* és un contracte que paga 1 euro si en data de venciment el preu de l'actiu subjacent és més petit que el preu d'exercici. Trobeu el seu valor en t i deduiu una relació de paritat put-call. (Si $S_T = X$, es paga 1/2 euro).