
Etiquetamiento y enrutamiento óptimo en una familia de grafos planares *

A. Miralles y F. Comellas

Departament de Matemàtica Aplicada IV, Universitat Politècnica de Catalunya
{almirall,comellas}@ma4.upc.edu

Resumen. En este trabajo presentamos un etiquetamiento y un algoritmo de enrutamiento óptimo para una familia de grafos planares, modulares y con *clustering* cero. Estas familias de grafos están definidas por dos parámetros y su construcción es determinista con lo que podemos obtener expresiones analíticas de parámetros importantes que caracterizan las redes reales. Estos grafos presentan propiedades similares a ciertas redes reales tecnológicas y biológicas con apiñamiento bajo, como las asociadas a circuitos electrónicos y redes de proteínas.

Para estas redes es de gran importancia que existan modelos con un protocolo óptimo de enrutamiento para diseñar algoritmos de comunicación así como para entender los mecanismos que han formado sus estructuras.

Palabras clave: Redes complejas, Enrutamiento, Grafos planares.

1 Introduction

Entre los trabajos más relevantes sobre redes complejas cabe destacar los de Watts y Strogatz [1] sobre redes pequeño mundo y los de Barabási y Albert [2] sobre redes invariantes de escala. Estos trabajos han llevado a muchos investigadores a diseñar modelos para poder describir redes de sistemas complejos en la naturaleza y la sociedad como Internet, interacciones proteína-proteína, sistemas de transporte, redes sociales o económicas.

Éstos modelos tienen como objetivo explicar resultados observados experimentalmente. Numerosos estudios muestran al menos tres características importantes presentes en muchas redes: distancia media entre nodos y diámetro pequeño, la distribución de enlaces por nodo sigue una ley de tipo potencial (redes invariantes de escala, *scale-free*); y recientemente se ha descubierto que a menudo las redes reales son autosimilares [3] con una jerarquía que está relacionada con la modularidad de las redes modelos.

* Trabajo subvencionado por el Ministerio de Educación y Ciencia y el Fondo Europeo para el desarrollo Regional (FEDER) MTM2008-06620.

Muchos de los modelos propuestos inicialmente son estocásticos [2] aunque últimamente también se han propuesto modelos deterministas. Éstos últimos tienen la ventaja que permiten calcular de forma exacta el valor de algunos parámetros de la red. De entre los distintos modelos deterministas basados en métodos iterativos cabe destacar el de las redes pseudo-fractales en las que en cada iteración se añaden nuevos vértices siguiendo ciertos criterios. En otros modelos en lugar de añadir vértices se añaden subgrafos completos. También hay trabajos en los que en cada iteración se multiplica la estructura, o bien se añade una nueva estructura [4,5].

En este trabajo estudiamos una generalización del modelo dado en [5]: en cada iteración añadimos d estructuras en paralelo (a la misma unidad básica que en [5] añadíamos sólo una). El resultado es que obtenemos una familia de grafos con propiedades esencialmente distintas, en particular ahora son scale-free (ley potencial que depende de d) mientras que en [5] la distribución de grados es exponencial.

Este modelo es una familia de grafos planares, modulares, jerárquicos y autosimilares, con características small-world y con clustering cero. Estas propiedades se corresponden con las observadas en importantes redes reales como por ejemplo algunas redes asociadas a circuitos eléctricos, Internet y algunos sistemas biológicos [6,7]. Así pues, nuestro modelo constituye una nueva herramienta para estudiar estos sistemas complejos y poder hallar nuevos algoritmos relacionados con procesos dinámicos.

2 Generación de los grafos $M_d(t)$ y propiedades

En esta sección revisamos la definición y las propiedades más importantes de esta familia de grafos, $M_d(t)$ que fueron introducidos y estudiados por los autores en [8].

2.1 Construcción iterativa

Definimos los grafos, $M_d(t)$, caracterizados por $t \geq 0$, el número de iteraciones y, d , parámetro asociado a la repetición de la estructura modular.

Llamamos *arista generadora* a la única arista de $M_d(0)$ y a todas las aristas de $M_d(t)$ que están unidas a dos vértices introducidos en distintas iteraciones. A todas las otras aristas de $M_d(t)$ las llamamos *aristas pasivas*. Toda arista generadora se convierte en pasiva en la siguiente iteración.

Construimos el grafo $M_d(t)$ como sigue:

Para $t = 0$, $M_d(0)$ tiene dos vértices y una arista generadora que los conecta. Para $t \geq 1$, $M_d(t)$ se obtiene a partir de $M_d(t-1)$ añadiendo, a cada arista generadora de $M_d(t-1)$, d caminos en paralelo de longitud tres identificando los dos vértices finales del camino con los dos vértices de la arista generadora. Repetimos el proceso hasta que tengamos el número de vértices deseado, ver Fig. 1.

2.2 Construction modular recursiva

También podríamos haber definido $M_d(t)$ de la siguiente manera equivalente:

- En $t = 0$, $M_d(0)$ tiene dos vértices y una arista generadora que los conecta.
- En $t = 1$, $M_d(1)$ se obtiene a partir de $M_d(0)$ añadiendo a la única arista que tenemos d caminos en paralelo de longitud tres.
- Para $t \geq 2$, $M_d(t)$ se obtiene a partir de $2d$ copias de $M_d(t - 1)$, identificando, vértice a vértice, la arista inicial de cada $M_d(t - 1)$ con las aristas generadoras de $M_d(1)$, ver Fig. 2.

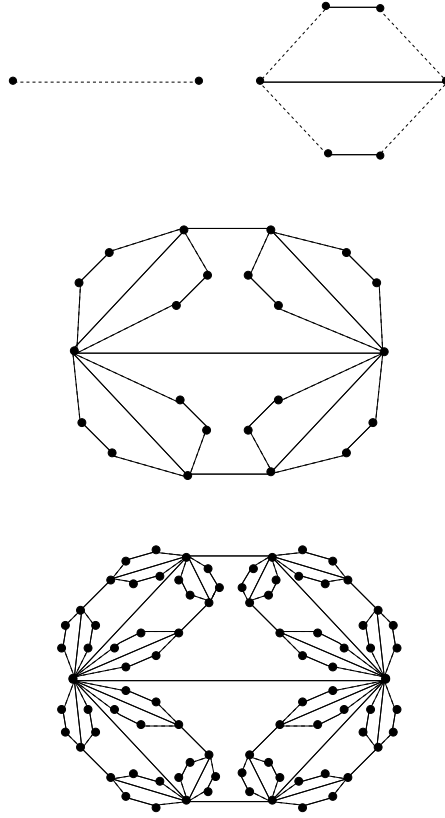


Figura 1. Iteraciones $t = 0, 1, 2$ y 3 para $d = 2$ de $M_d(t)$.

2.3 Orden y tamaño de $M_d(t)$

Utilizamos la notación: $\tilde{V}(t)$, $\tilde{E}(t)$ y $\tilde{E}_g(t)$, conjunto de vértices, aristas y aristas generadoras, respectivamente, introducidas en t . $V(t)$ y $E(t)$ representan el conjunto de vértices y aristas del grafo $M_d(t)$. En cada iteración, una arista generadora se substituye por $2d$ aristas generadoras nuevas y d aristas pasivas.

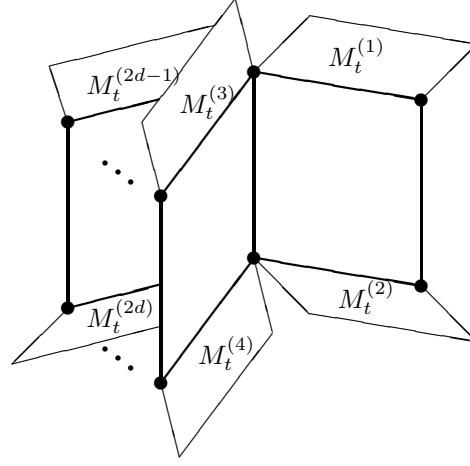


Figura 2. Obtenemos $M_d(t+1)$ a partir de $2d$ copias de $M_d(t-1)$.

Con lo que se tiene: $|\tilde{E}_g(t+1)| = 2d \cdot |\tilde{E}_g(t)|$, y $|\tilde{E}_g(t)| = (2d)^t$. Como cada arista generadora introduce $2d$ vértices nuevos en la siguiente iteración y $3d$ aristas nuevas, $|\tilde{V}(t+1)| = 2d \cdot |\tilde{E}_g(t)| = (2d)^{t+1}$ y $|\tilde{E}(t+1)| = 3d \cdot |\tilde{E}_g(t)| = 3d \cdot (2d)^t$. Como $|\tilde{V}(0)| = 2$ y $|\tilde{E}_g(0)| = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} |V(t)| &= \sum_{i=0}^t |\tilde{V}(i)| = \frac{(2d)^{t+1} + 2d - 2}{2d - 1}, \\ |E(t)| &= \sum_{i=0}^t |\tilde{E}(i)| = \frac{3d(2d)^t - d - 1}{2d - 1}. \end{aligned} \quad (1)$$

2.4 Planaridad

Un grafo es planar si se puede dibujar sin que se crucen sus aristas. Por construcción se puede ver fácilmente que $M_d(t)$ lo es. (También podríamos utilizar el teorema de Kuratowski [9] en el que se demuestra que un grafo es planar si no tiene ciclos de longitud 3 y $|E| \leq 2|V| - 4$, $|V| > 3$).

3 Propiedades topológicas de $M_d(t)$ [8]

Gracias a la naturaleza determinista de los grafos $M_d(t)$, podemos dar los valores exactos de importantes parámetros topológicos como son: la distribución de los grados, correlación de los grados, diámetro y distancia media.

3.1 Distribución de grados

La distribución acumulada de grados del grafo $M_d(t)$ para valores grandes de t y $k \gg 1$ sigue una ley potencial $P_{\text{cum}}(k) \sim k^{-\gamma}$ con exponente $\gamma = \frac{\ln(2d)}{\ln(d)}$.

Así pues la distribución es *scale-free*. Resultados sobre redes asociadas a circuitos electrónicos muestran que tienen un coeficiente de apiñamiento (*clustering*) pequeño y en muchos casos la distribución acumulada de grados sigue una ley potencial [6,7] con valores del exponente en el mismo rango que los hallados en $M_d(t)$.

3.2 Coeficiente de correlación

En [5] hemos obtenido la expresión analítica exacta del coeficiente de correlación Pearson, $r(t)$, entre los grados de los vértices que determinan una arista. La tabla 1 muestra un resumen de estos resultados, puesto que la expresión analítica es demasiado larga y puede consultarse en la referencia citada.

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 10$
$d = 2$	-0,1667	-0,0886	-0,0460	-0,0003
$d = 10$	-0,4091	-0,2338	-0,1174	-0,0009
$d = 100$	-0,4901	-0,2057	-0,0934	-0,0007

Tabla 1. Coeficiente de correlación Pearson para $t = 1, 2, 3, 10$ para distintos valores de d .

A partir de los resultados obtenidos se observa una correlación negativa, vértices de grado alto tienden a estar conectados con vértices de bajo grado. En [7] se muestra que muchas redes tecnológicas y biológicas presentan este comportamiento.

3.3 Diámetro

El diámetro de $M_d(t)$ es $D(t) = 3 + 2 \cdot (t - 1)$, $t \geq 1$.

Tenemos pues que para grandes valores de t , $t \sim \ln |V_t|$, $D(t) \propto \ln |V_t|$.

3.4 Distancia media

Se define la distancia media como:

$$\bar{d}(t) = 2 \sum_{u,v \in V(t)} d(u,v) / (|V(t)|(|V(t)| - 1))$$

donde $d(u,v)$ es la distancia entre los vértices u and v .

La construcción recursiva y modular de $M_d(t)$ permite obtener el valor exacto de $\bar{d}(t)$:

$$\begin{aligned}
\bar{D}(t) = & (-1 + 4d - 5d^2 + 2d^3 + 2^{1+t}d^{1+t} - 7 \cdot 2^{2t}d^{2+2t} + \\
& + 3 \cdot 2^{1+2t}d^{3+2t} - 2^{1+t}d^{1+t}t + 3 \cdot 2^{1+t}d^{2+t}t - \\
& - 2^{2+t}d^{3+t}t - 2^{1+2t}d^{2+2t}t + 2^{2+2t}d^{3+2t}t) \\
& / ((-1 + 2d)(-1 + d + 2^t d^{1+t})(-1 + 2^{1+t}d^{1+t})).
\end{aligned} \tag{2}$$

Para grandes valores de t , $\bar{d}(t) \simeq t \sim \ln |V_t|$, lo que nos muestra un comportamiento logarítmico de la distancia media con el orden del grafo. El diámetro muestra un comportamiento similar con lo que el grafo es pequeño mundo (*small-world*).

4 Etiquetamiento de $M_d(t)$

En esta sección mostramos la manera de etiquetar los vértices de $M_d(t)$ para $t \geq 0$, de forma que se obtenga un enrutamiento óptimo en $M_d(t)$.

Introducimos la siguiente notación: Para cualquier par de vértices $u, v \in V(t)$, $L(v)$ es la etiqueta de v , $xL(v)$ indica la concatenación del símbolo x con $L(v)$ y $d(u, v)$ es la distancia (camino más corto) entre u y v .

Cabe notar que, como en cada iteración $M_d(t+1)$ se obtiene a partir de $M_d(t)$ añadiendo a cada arista generadora de $M_d(t)$, d caminos de longitud tres, (P_4) , el camino más corto entre dos vértices que ya existen en t no se modifica en la siguiente iteración y por lo tanto la distancia entre ellos es la misma en $M_d(t+1)$ que en $M_d(t)$.

El protocolo de etiquetamiento se basa en asignar a cada vértice v , introducido en la iteración $t \geq 1$, una etiqueta de longitud t utilizando los símbolos del conjunto $\{s_1, s_2, \dots, s_{2d}\}$. Etiquetamos los vértices existentes en $t = 0$ de forma especial. Las reglas del etiquetamiento pueden resumirse de la siguiente manera:

- Etiquetamos los dos vértices del grafo inicial $M_d(0)$, de forma arbitraria, con etiquetas a y b . Etiquetamos los $2d$ vértices introducidos en $t = 1$ con $s_1, s_2, \dots, s_{2d}$, ver Fig. 3.
- Para cualquier otra iteración $t \geq 2$, cuando añadimos $2d$ nuevos vértices a una arista generadora que une los vértices u y v , seguimos las siguientes reglas (ver Fig. 3):
 1. Si $L(u) \notin \{a, b\}$ y $L(v) \in \{a, b\}$ entonces $L(u_i) = s_{2i}L(u)$ y $L(v_i) = s_{2i-1}L(u)$ para $1 \leq i \leq d$.
 2. Si $L(u), L(v) \notin \{a, b\}$ y $\text{longitud}(L(u)) > \text{longitud}(L(v))$ entonces $L(u_i) = s_{2i}L(u)$ y $L(v_i) = s_{2i-1}L(u)$ para $1 \leq i \leq d$, ver Fig. 5.

Demostramos a continuación que para $t \geq 1$, cualquier vértice introducido en la iteración t tiene una única etiqueta $L(v) = w_t \dots w_2 w_1$ de longitud t , donde cada símbolo w_i satisface $w_i \in \{s_1, s_2, \dots, s_{2d}\}$.

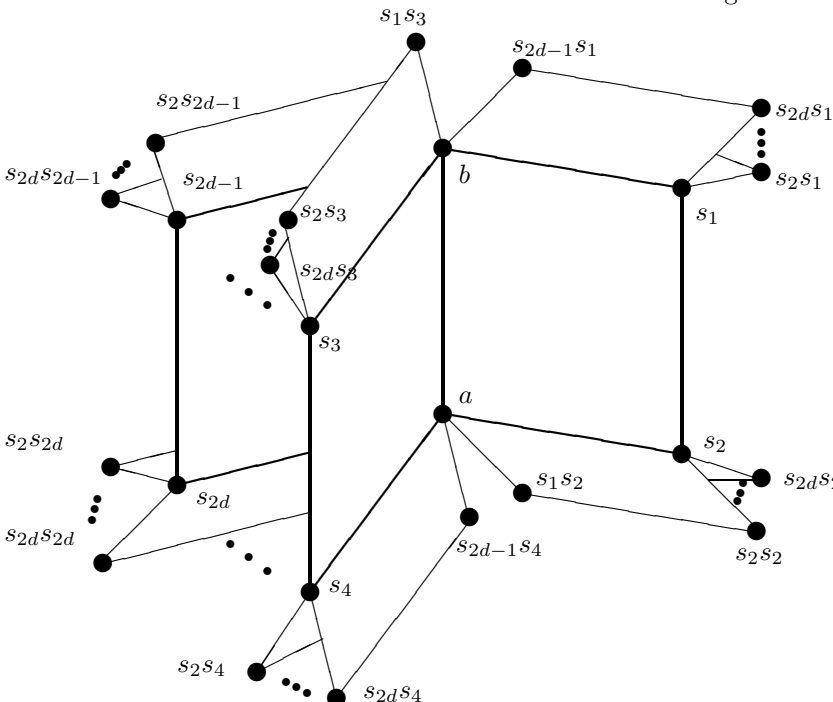


Figura 3. Proceso de etiquetamiento para $t = 0$, $t = 1$ and $t = 2$.

Cabe destacar que como en una iteración cualquiera $t \geq 1$, el número de vértices que añadimos al grafo $M_d(t)$ es igual a $(2d)^t$, este etiquetamiento es óptimo en el sentido que cada etiqueta $L(v_t)$ de un vértice introducido en t es una palabra de longitud t .

A continuación, en el lema 1, demostraremos que el etiquetamiento es determinista. A partir de ahora y para facilitar la lectura, cuando sea preciso, nos referiremos a los vértices por sus etiquetas y viceversa. Utilizaremos los lemas 2 y 3 para demostrar la proposición 1 y ésta para probar el teorema 1 en el que demostraremos que el enrutamiento es de caminos cortos.

Lema 1. *Cada vértice de $M_d(t)$ tiene una única etiqueta.*

Demostración. Por inducción sobre t . Si t es 0, 1 o 2, la propiedad es cierta por construcción, ver Fig. 3. Supongamos ahora que el lema es cierto para $t' \leq t-1$. Así pues, cada arista generadora en $M(t-1)$ está unida a un vértice con etiqueta de longitud $t-1$ mientras que el otro vértice, que ha estado introducido en iteraciones anteriores, tiene la etiqueta más corta. Por lo tanto, a partir de las reglas del etiquetamiento, las etiquetas de los vértices introducidos en $t-1$ son las que se utilizan para generar las etiquetas de los vértices que se introducen en t : un vértice introducido en $t-1$, v_{t-1} , con etiqueta $L(v_{t-1})$, genera $2d$ nuevas y distintas etiquetas, $s_1L(v_{t-1}), \dots, s_{2d}L(v_{t-1})$. Como todas las etiquetas en $M(t-1)$ son distintas, también es cierto para $M(t)$.

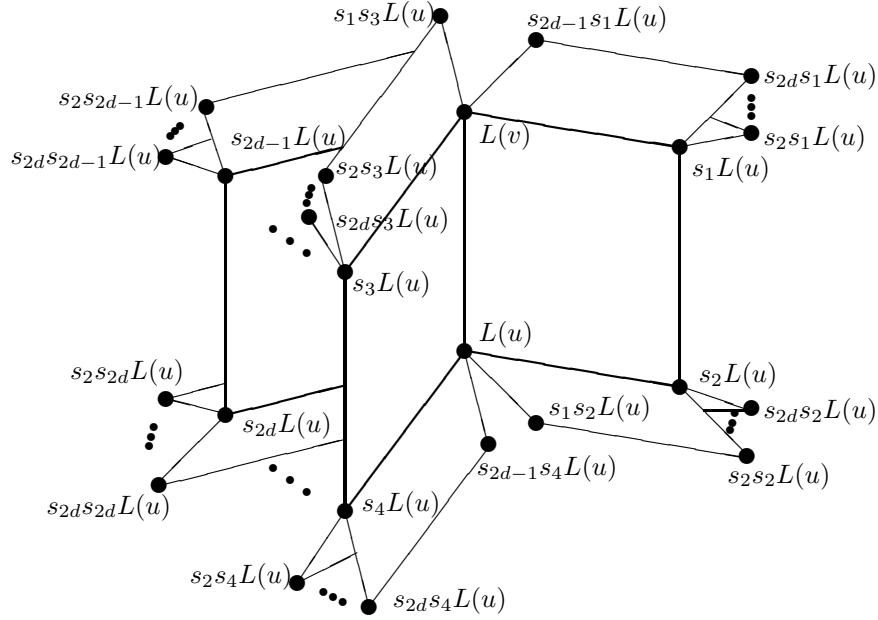


Figura 4. u y v son los vértices que unen una arista generadora en $M_d(t)$, siendo la longitud $L(u)$ mayor que la de $L(v)$. El vértice u ha sido creado en t y el vértice v ha sido creado en otra iteración $t_v < t$. Podemos ver el proceso de etiquetamiento en las iteraciones t , $t + 1$ y $t + 2$.

Lema 2. Sea u un vértice de $M_d(t)$ introducido en $t \geq 1$.

Entonces $d(s_{2k}L(u), u) = 1$ y $d(s_{2k-1}L(u), u) = 2$, $1 \leq k \leq d$.

Demostración. Es evidente a partir del proceso de construcción. Ver Fig. 5

Lema 3. Sea u un vértice de $M_d(t)$ introducido en $t \geq 1$. Si los números $o_1, \dots, o_k \leq 2d$ son impares entonces,

$$d(s_{o_k} \dots s_{o_1} s_{2l}L(u), u) = 1 \text{ y } d(s_{o_k} \dots s_{o_1} s_{2l-1}L(u), u) = 2,$$

con $k \geq 1$ y $1 \leq l \leq d$.

Demostración. Probamos la primera igualdad por inducción sobre k . Para $k = 1$ es cierto por construcción: si el vértice u ha sido introducido en la iteración τ , el vértice $s_{2l}L(u)$ es adyacente a u introducido en $\tau + 1$ (ver lema 2). La arista generadora que finaliza con los vértices $L(u)$ y $s_{2l}L(u)$, en la iteración $\tau + 2$, introducirá todos los vértices $s_1 s_{2l}L(u), s_3 s_{2l}L(u), \dots, s_{2d-1} s_{2l}L(u)$ que también son adyacentes a $L(u)$ (ver Fig. 5). Así pues, en particular $s_{o_1} s_{2l}L(u)$ con o_1 impar, es vecino de $L(u)$. Por lo tanto, por inducción $d(s_{o_k} \dots s_{o_1} s_{2l}L(u), u) = 1$. La demostración de la segunda igualdad es similar.

5 Enrutamiento por caminos cortos en $M(t)$

En esta sección damos el protocolo a seguir entre dos vértices u y v de $M_d(t)$, con etiquetas, respectivamente, $L(u)$ y $L(v)$. La manera de hallar el camino

más corto entre u y v es particular, en el sentido que el enrutamiento parte tanto de u como de v , hasta que se alcanza un vértice común. Para determinar el enrutamiento sólo es necesario conocer las etiquetas de los dos vértices.

Primero determinamos la parte máxima de la etiqueta que es común a los dos vértices, LCS , de $L(u)$ y $L(v)$ y escribimos $L(u)$ y $L(v)$ como, $L(u) = s_{u_1}s_{u_2}\dots s_{u_m}s_{u_{m+1}}s_{u_{m+2}}LCS$ y $L(v) = s_{v_1}s_{v_2}\dots s_{v_n}s_{v_{n+1}}s_{v_{n+2}}LCS$. Si el vértice con etiqueta LCS , ha sido introducido en alguna iteración $t' < t$, entonces los vértices $u_f = s_{u_{m+1}}s_{u_{m+2}}LCS$ y $v_f = s_{v_{n+1}}s_{v_{n+2}}LCS$ han sido introducidos en $t'+2$ y juntos con LCS pertenecen a una estructura isomórfica a $M_d(2)$. A esta estructura la llamamos M_{LCS} .

La idea es hallar los caminos más cortos entre u y $u'_f \in M_{LCS}$, y entre v y $v'_f \in M_{LCS}$, donde $L(u'_f) \subset L(u_f)$ y $L(v'_f) \subset L(v_f)$. El camino más corto entre u'_f y v'_f es fácil de hallar.

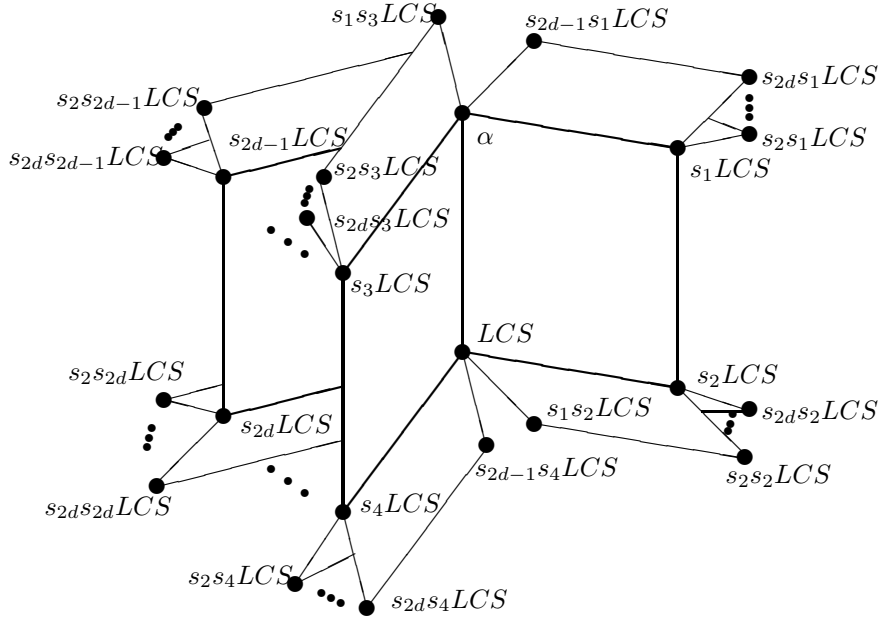


Figura 5. u y v son los vértices que unen una arista generadora en $M_d(t)$, siendo la longitud $L(u)$ mayor que la de $L(v)$. El vértice u ha sido creado en t y el vértice v ha sido creado en otra iteración $t_v < t$. Podemos ver el proceso de etiquetamiento en las iteraciones t , $t+1$ y $t+2$.

Se puede observar, por construcción, que el camino más corto para alcanzar M_{LCS} (tanto de u como de v) es ir al vecino que tiene la etiqueta más corta, ya que la longitud de la etiqueta indica en que iteración ha sido creado el vértice. Si queremos hallar el vecino antepasado, u' , de un vértice $L(u) = s_{u_1}s_{u_2}\dots s_{u_m}s_{u_{m+1}}s_{u_{m+2}}LCS$ que tiene la etiqueta menor, tenemos que considerar dos casos:

- Si el subíndice u_1 es par, por construcción, u' es el vértice que tiene por etiqueta $L(u') = s_{u_2} \dots s_{u_m} s_{u_{m+1}} s_{u_{m+2}} LCS$. Cabe notar que $d(u, u') = 1$.
- Si los subíndices $u_1, u_2, \dots, u_k$ son impares y el subíndice u_{k+1} es par con $k+1 \leq m$, por construcción u' es el vértice que tiene por etiqueta $s_{u_{k+2}} \dots s_{u_m} s_{u_{m+1}} s_{u_{m+2}} LCS$. Notar por lema 3 que $d(u, u') = 1$.

Las siguientes proposiciones proporcionan un enrutamiento por caminos cortos entre dos vértices u y v con etiquetas distintas de b y $L(u)$ es un sufixo de $L(v)$. Damos también la distancia entre ellos.

Proposición 1. Sean u y v dos vértices de $M(t)$ que verifican:

- $L(v) = s_1 \dots s_n s_{n+1} L(u)$ o $L(v) = s_1 \dots s_{n+1}$ y $L(u) = a$.
- $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ son pares con $i_1 < \dots < i_k$ y $k \geq 1$. (Si no hay subíndices pares en el conjunto $\{1, \dots, n\}$ decimos que $\{i_1, \dots, i_k\}$ es un conjunto vacío y en las expresiones de la distancia consideramos $k = 0$).
- $\forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ j es impar.

Entonces, la distancia, $d(u, v)$, y el enrutamiento entre u y v es:

- Si el subíndice $n+1$ es par, $d(u, v) = 1 + k$ y el enrutamiento es

$$v, s_{i_1+1} \dots s_{n+1} L(u), s_{i_2+1} \dots s_{n+1} L(u), \dots, s_{i_k+1} \dots s_{n+1} L(u), u.$$

- Si el subíndice $n+1$ es impar, $d(u, v) = 2 + k$ y
 - Si $L(u)$ contiene uno o más subíndices pares podemos escribir $L(u) = o\alpha$ donde o es una secuencia de símbolos donde sólo el último símbolo tiene el subíndice par y α es la secuencia necesaria de símbolos para completar $L(u)$. El enrutamiento es

$$v, s_{i_1+1} \dots s_{n+1} L(u), s_{i_2+1} \dots s_{n+1} L(u), \dots, s_{i_k+1} \dots s_{n+1} L(u), \alpha, u.$$

- Si $L(u)$ tiene todos los símbolos con subíndices impares el enrutamiento es

$$v, s_{i_1+1} \dots s_{n+1} L(u), s_{i_2+1} \dots s_{n+1} L(u), \dots, s_{i_k+1} \dots s_{n+1} L(u), b, u.$$

- Si $L(u) = a$, el enrutamiento es

$$v, s_{i_1+1} \dots s_{n+1} L(u), s_{i_2+1} \dots s_{n+1} L(u), \dots, s_{i_k+1} \dots s_{n+1} L(u), b, a.$$

Demostración. Aplicamos el protocolo a $L(v)$. Cada vez que encontramos una secuencia os_i donde o es una secuencia de símbolos con subíndices impares o una secuencia vacía, y $i \in \{1, \dots, n\}$ es par, consideramos el lema 3 y añadimos una unidad a la distancia.

$$v, s_{i_1+1} \dots s_{n+1} L(u), s_{i_2+1} \dots s_{n+1} L(u), \dots$$

Cuando llegamos a $os_{n+1} L(u)$ (donde o es una secuencia de símbolos con subíndices impares o vacía), debemos considerar los siguientes dos casos (lema 3):

- Si $n + 1$ is par, añadimos una unidad a la distancia y el enrutamiento es

$$v, s_{i_1+1} \dots s_{n+1}L(u), s_{i_2+1} \dots s_{n+1}L(u), \dots, s_{i_k+1} \dots s_{n+1}L(u), u.$$

- Si s_{n+1} is impar, añadimos dos unidades a la distancia. Para determinar la parte final del enrutamiento consideramos estos casos:

- Si $L(u)$ contiene uno a o más subíndices pares podemos escribir $L(u) = o\alpha$ donde o es una secuencia de símbolos donde sólo el último símbolo tiene el subíndice par y α es la secuencia necesaria de símbolos para completar $L(u)$. El enrutamiento es

$$v, s_{i_1+1} \dots s_{n+1}L(u), s_{i_2+1} \dots s_{n+1}L(u), \dots, s_{i_k+1} \dots s_{n+1}L(u), \alpha, u.$$

Notar que por el lema 3, $d(s_{i_k+1} \dots s_{n+1}L(u), \alpha) = 1$ y $d(\alpha, u) = 1$.

- Si $L(u)$ es una secuencia de símbolos con subíndices impares, a partir de la construcción, ver Fig. 3, los vertices $s_{i_k+1} \dots s_{n+1}L(u)$ y u estan, los dos, conectados al vértice inicial b . El enrutamiento es

$$v, s_{i_1+1} \dots s_{n+1}L(u), s_{i_2+1} \dots s_{n+1}L(u), \dots, s_{i_k+1} \dots s_{n+1}L(u), b, u.$$

- Si $L(u) = a$, el enrutamiento de v a a es

$$v, s_{i_1+1} \dots s_{n+1}, s_{i_2+1} \dots s_{n+1}, \dots, s_{i_k+1} \dots s_{n+1}, b, a.$$

Notar que en este caso, el vértice $s_{i_k+1} \dots s_{n+1}$ es una secuencia de símbolos con subíndices impares y también está conectado al vértice b .

Ejemplo 1. Si u y v son vértices con etiquetas $L(v) = s_1s_3s_4s_2s_2s_3s_1s_3s_4s_2s_2s_4s_1s_3s_1$ y $L(u) = s_2s_4s_1s_3s_1$, el enrutamiento es

$s_1s_3s_4s_2s_2s_3s_1s_3s_4s_2s_2s_4s_1s_3s_1, s_2s_2s_3s_1s_3s_4s_2s_2s_4s_1s_3s_1, s_2s_3s_1s_3s_4s_2s_2s_4s_1s_3s_1, s_3s_1s_3s_4s_2s_2s_4s_1s_3s_1, s_2s_2s_4s_1s_3s_1, s_2s_4s_1s_3s_1,$
y $d(v, u) = 5$.

Con los resultados obtenidos previamente podemos expresar el enrutamiento entre dos vértices de $M_d(t)$.

A partir de este momento utilizamos la notación $u \rightarrow v$ para indicar el camino más corto del vértice u al vértice v , generado según las reglas expuestas anteriormente, y $u \leftrightarrow v$ indica el camino más corto entre dos vértices de M_{LCS} .

Teorema 1. Sean u y v dos vértices de $M_d(t)$ con etiquetas

$$L(u) = s_{u_1}s_{u_2} \dots s_{u_m}s_{u_{m+1}}s_{u_{m+2}}LCS, L(v) = s_{v_1}s_{v_2} \dots s_{v_n}s_{v_{n+1}}s_{v_{n+2}}LCS.$$

Existen dos vértices u'_f, v'_f con $L(u'_f) \subset L(u)$, $L(v'_f) \subset L(v)$ y $u'_f, v'_f \in M_{LCS}$ que nos permiten expresar el enrutamiento entre u and v ,

$$u \rightarrow u'_f \leftrightarrow v'_f \leftarrow v,$$

y la distancia,

$$d(u, v) = d(u, u'_f) + d(u'_f, v'_f) + d(v'_f, v).$$

Demostración. Ya que LCS es la parte máxima de la etiqueta que es común en los dos vértices u y v , el enrutamiento entre u y v atravesará la estructura M_{LCS} . Para hallar los vértices $u'_f, v'_f \in M_{LCS}$ que se alcanzan desde u y desde v , respectivamente, y siguiendo el protocolo de enrutamiento, tenemos que considerar diversos casos.

1. u_{m+1} y v_{n+1} son pares. Desde u , y siguiendo el protocolo de enrutamiento, alcanzamos el vértice $u_{m+2}LCS \in M_{LCS}$. Definimos en este caso $u'_f = u_{m+2}LCS \in M_{LCS}$ y siguiendo un razonamiento similar, $v'_f = v_{n+2}LCS \in M_{LCS}$. La distancia entre u'_f y v'_f depende del sufijo u_{m+2} y v_{n+2} :
 - Si u_{m+2} y v_{n+2} es impar, el enrutamiento entre u'_f y v'_f es: u'_f, α, v'_f and $d(u'_f, v'_f) = 2$.
 - Si u_{m+2} es impar, v_{n+2} es par y $v_{n+2} = u_{m+2} + 1$, el enrutamiento entre u'_f y v'_f es: u'_f, v'_f y $d(u'_f, v'_f) = 1$.
 - Si u_{m+2} es impar, v_{n+2} es par y $v_{n+2} \neq u_{m+2} + 1$, el enrutamiento entre u'_f y v'_f es: u'_f, α, LCS, v'_f y $d(u'_f, v'_f) = 3$.
2. u_{m+1}, v_{n+1} y v_{n+2} son impares y u_{m+2} es par. Desde el vértice u , y siguiendo el protocolo de enrutamiento, alcanzamos $LCS \in M_{LCS}$. Definimos en este caso $u'_f = LCS \in M_{LCS}$.
 Si LCS contiene uno o más subíndices pares, podemos escribir $LCS = o\alpha$ donde o es una secuencia de símbolos donde sólo el último símbolo tiene el subíndice par y α es la secuencia necesaria de símbolos para completar LCS (podemos ver que $d(\alpha, LCS) = 1$). Definimos en este caso $v'_f = \alpha \in M_{LCS}$. Notamos que desde el vértice v y siguiendo el protocolo de enrutamiento alcanzamos v'_f . El enrutamiento entre u'_f y v'_f es: u'_f, v'_f y $d(u'_f, v'_f) = 1$.

Los otros casos se obtienen de forma similar.

A partir de la proposición 1 se puede obtener los enrutamientos $u \rightarrow u'_f$, $v \rightarrow v'_f$, y distancias $d(u, u'_f)$ y $d(v, v'_f)$. Así el teorema queda demostrado.

6 Conclusión

Hemos introducido un etiquetamiento y un algoritmo de enrutamiento óptimo para una familia de grafos que son planares, modulares, jerárquicos y autosimilares y con características pequeño mundo. Además presentan apiñamiento cero. Esta combinación de modularidad, bajo apiñamiento y propiedades pequeño mundo aparece en redes reales como ciertas redes sociales, redes tecnológicas y algunas redes relacionadas con sistemas biológicos como las interacciones entre proteínas [7,6]. Así pues, el enrutamiento estudiado en estas

familias de grafos constituye una nueva herramienta para estudiar estos sistemas complejos y debería permitir hallar nuevos algoritmos relacionados con procesos dinámicos.

Referencias

- [1] D.J. Watts, S.H. Strogatz, Collective dynamics of ‘small-world’ networks, *Nature* 393 (1998) 440–442.
- [2] A.-L. Barabási, R. Albert, Emergence of scaling in random networks, *Science* 286 (1999) 509–512.
- [3] C. Song C, S. Havlin, H.A. Makse, Self-similarity of complex networks, *Nature* 433 (2005) 392–395
- [4] F. Comellas, Z. Zhang, L. Chen, Self-similar non-clustered planar graphs as models for complex networks, . *Phys. A Math. Theor.* 42 (2009) 045103.
- [5] F. Comellas, A. Miralles, Modeling complex networks with self-similar outerplanar unclustered graphs. *Phys. A* 388 (2009) 2227-2233.
- [6] R. Ferrer i Cancho, C. Janssen, R.V. Solé, Topology of technology graphs: Small world patterns in electronic circuits, *Phys. Rev. E* 64 (2001) 046119
- [7] M.E.J. Newman, The structure and function of complex networks, *SIAM Review* 45 (2003) 167–256.
- [8] A. Miralles, F.Comellas, L. Chen, Z. Zhang, Planar unclustered graphs to model technological and biological networks, *Phys. A* 389 (2010) 1955–1964.
- [9] R. Diestel, *Graph Theory*, 3rd. edition, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, (2005).