

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
FACULTAT DE CIÈNCIES

I

SOLUCIONS ESTACIONÀRIES I AXISIMÈTRIQUES
A LES EQUACIONS D'EINSTEIN

(Resum de Tesi Doctoral)

Francesc de Paula Comellas i Padró

Resum de la Tesi Doctoral de D. Francesc de Paula Comellas i Padró sobre el tema *Solucions Estacionàries i Axismètriques a les Equacions d'Einstein*, que fou presentada el dia 14 d'octubre de l'any 1982, davant el tribunal següent:

President:	Dr. Pere Pascual i de Sans
Secretari:	Dr. Xavier Fustero i Vergés
Vocals :	Dr. Ramon Pascual i de Sans
	Dr. Lluís Mas i Franch
	Dr. Ramon Lapiedra i Civera

La tesi obtingué la qualificació d'Excel·lent *cum laude*.

INTRODUCCIÓ

Dins de les teories de la gravitació, la més amplament acceptada i que fins ara ha superat totes les proves experimentals, és la Teoria de la Relativitat General d'Einstein. En ella l'espai i el temps venen representats per una varietat riemanniana quadridimensional i les equacions de camp constitueixen un sistema no lineal en derivades parcials que s'escriu habitualment:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

La integració d'aquestes equacions és sens dubte, un dels problemes més complexos dins de la física teòrica i fins ara no ha tingut cap resposta definitiva ni s'ha trobat una metodologia general per resoldre'l. Malgrat això el nombre de solucions exactes conegudes és enorme -tenint en compte la dificultat del problema- i continuament s'aporten noves solucions (s'escriuen un promig de cent articles a l'any sobre el tema). Tot i aquesta abundància de material poques de les solucions conegudes responen a un problema físic real. Pensem que problemes en aparença no massa complicats com el de dos cossos, el del camp gravitatori generat per un estel en rotació constant o el de la radiació gravitatòria d'un objecte finit no estan resolts encara, i que les úniques solucions "realistes" conegudes són les d'Schwarzschild (1916) i Kerr (1963) que poden representar l'estat final del col.lapse d'un estel. Amb tot l'estudi de solucions sense un sentit físic massa clar ha portat a un coneixement millor de l'estructura de les equacions d'Einstein i a un descobriment de mètodes de generació de solucions que més endavant han estat útils per l'estudi de solucions físiques. Moltes de

les tècniques que emprem ara han estat fruit d'aquests estudis i eren desconegudes pels primers relativistes. Només cal citar, per exemple, l'ús de grups de moviments, la formulació per tetrades nul·les, les tècniques espinorials o el mètode del scattering invers. Ara bé, no tot està en el mètode d'estudi o les tècniques usades ja que només simplifiquen el problema en determinades circumstàncies i normalment no són gaire útils si abans no s'ha fet unes hipotesis sobre la mètrica i/o el tensor d'impulsió-energia. En efecte, una mètrica qualsevol pot ser solució de les equacions d'Einstein donat que no hi hagi restriccions sobre el tensor d'impulsió-energia; només cal prendre l'equació de camp com definició del tensor $T_{\mu\nu}$. Per això de cara a la recerca de solucions interessants és convenient restringir aquest tensor d'alguna manera; imposant condicions de simetria a la mètrica, imposant un tipus de Bel-Petrov, donant una equació d'estat per a la matèria, tenint en compte determinades condicions de contorn, etc...

La memòria que es presenta és una aportació a la generació i estudi de solucions exactes estacionàries i axisimètriques a les equacions d'Einstein, amb tensors d'impulsió-energia que admeten una interpretació física.

Hem dividit el treball en quatre parts. A la primera presentem el formulisme de Newman-Penrose o de tetrades nul·les, adaptat a la signatura $(-, +, +, +)$. Usarem els resultats d'aquesta part als altres capítols.

El capítol segon se centra en l'estudi de possibles solucions interiors a la mètrica de Kerr. Bàsicament es tracta de fer variar les constants de la mètrica en dues coordenades espacials (r i θ) i a través de les equacions d'Einstein trobar els tensors d'impulsió-energia i estudiar-los. Veiem que hi ha dos casos amb particular interès físic: un cas de camp electromagnètic no nul que en general pot incloure un fluid no perfecte i en la seva expressió més simple porta a la mètrica de Kerr carregada (Kerr-Newman) i un cas de radiació pura.

En el tercer capítol, i a partir de l'element de línia general de Lewis-Papapetrou es plantegen les equacions de camp per al cas d'un fluid perfecte i s'anàlitzen les diferents restriccions que porta l'imposar el tipus D de Bel-Petrov a l'espai-temps, una equació d'estat simple i d'altres hipotesis. S'obté una solució tipus D(1).

Finalment, en la darrera part d'aquesta tesi es presenta i s'estudia una família biparamètrica de solucions estacionàries i axisimètriques del buit obtinguda mitjançant una transformació 1-solitónica d'una mètrica no física relacionada amb la mètrica de Kasner. De l'estudi i classificació es veu que un dels paràmetres pot relacionar-se amb la "força" del camp i l'altre amb la rotació. A més de veure que dins la família hi ha continguda la mètrica plana s'han trobat solucions tipus I i D. S'ha calculat el potencial d'Ernst i a partir d'ell s'estudia la relació amb solucions asimptòticament planes.

1. FORMULISME DE NEWMAN-PENROSE

D'acord amb Newman-Penrose (1962) a cada punt d'una varietat riemanniana amb signatura +2 s'introdueix una tètade de vectors nuls ($\vec{l}, \vec{n}, \vec{m}, \vec{\bar{m}}$) on $\vec{l}$ i $\vec{n}$ són reals i $\vec{m}$ i $\vec{\bar{m}}$ una parella de vectors complexo-conjugats que satisfan la relació d'ortogonalitat:

$$\vec{l}\vec{n} = -1 \quad \vec{m}\vec{\bar{m}} = 1 \quad \vec{l}\vec{m} = \vec{l}\vec{\bar{m}} = \vec{n}\vec{m} = \vec{n}\vec{\bar{m}} = 0 \quad (1.1)$$

La tètade nul·la pot construirse a partir de l'ortonormal ($\vec{e}_t, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) on $\vec{e}_t$ es genera temps ($\vec{e}_t^2 = -1$) i $\vec{e}_\alpha$ genera espai ($\vec{e}_\alpha^2 = 1$) així:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 = \vec{l} &= \frac{(\vec{e}_t + \vec{e}_z)}{\sqrt{2}} & \vec{e}_2 = \vec{n} &= \frac{(\vec{e}_t - \vec{e}_z)}{\sqrt{2}} \\ \vec{e}_3 = \vec{m} &= \frac{(\vec{e}_x - i\vec{e}_y)}{\sqrt{2}} & \vec{e}_4 = \vec{\bar{m}} &= \frac{(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

D'aquesta manera:

$$\vec{e}_{(a)} = (\vec{l}, \vec{n}, \vec{m}, \vec{\bar{m}}) \quad (1.3)$$

i les components del tensor mètric en termes de la tètade són

$$g_{\mu\nu} = e_{a\mu} e_{b\nu} \eta^{ab} = 2 \left[-1 (\mu^\nu) + m (\mu^\nu) \right] \quad (1.4)$$

on η^{ab} és la mètrica plana

$$\eta_{ab} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \eta^{ab} \quad (1.5)$$

i es fa servir per pujar i baixar índexs de tètade.

1.-Coeficients de spin.

A partir de la tètade podem definir els coeficients de rotació de Ricci.

$$\gamma_{cab} = e_c^\mu e_a^\nu e_b^\nu \quad (1.6)$$

I els dotze coeficients de spin.

$$\begin{aligned} \kappa &= -\gamma_{311} = -1_{\mu;\nu} m^\mu l^\nu & \nu &= \gamma_{422} = n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu n^\nu \\ \rho &= -\gamma_{314} = -1_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu & \mu &= \gamma_{423} = n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu \\ \sigma &= -\gamma_{313} = -1_{\mu;\nu} m^\mu m^\nu & \lambda &= \gamma_{424} = n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu \\ \tau &= -\gamma_{312} = -1_{\mu;\nu} m^\mu n^\nu & \pi &= \gamma_{421} = n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu l^\nu \\ \epsilon &= \frac{1}{2}(\gamma_{431} - \gamma_{211}) = \frac{1}{2} (m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu l^\nu - l_{\mu;\nu} n^\mu l^\nu) \\ \gamma &= \frac{1}{2}(\gamma_{121} - \gamma_{432}) = \frac{1}{2} (n_{\mu;\nu} l^\mu n^\nu - \bar{m}_{\mu;\nu} m^\mu n^\nu) \\ \alpha &= \frac{1}{2}(\gamma_{124} - \gamma_{344}) = \frac{1}{2} (n_{\mu;\nu} l^\mu \bar{m}^\nu - \bar{m}_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu) \\ \beta &= \frac{1}{2}(\gamma_{433} - \gamma_{213}) = \frac{1}{2} (m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu - l_{\mu;\nu} n^\mu m^\nu) \end{aligned} \quad (1.7)$$

2.- Components en la tètade

Les components en la tètade d'un tensor són:

$$A_{ab...} = A_{\mu\nu...} e_a^\mu e_b^\nu \dots \quad (1.8)$$

Les cinc components complexes independents del tensor de Weyl són.

$$\begin{aligned} \psi_0 &= C_{1313} = C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu m^\nu l^\rho m^\sigma \\ \psi_1 &= C_{1213} = C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu n^\nu l^\rho m^\sigma \\ \psi_2 &= \frac{1}{2}(C_{1212} - C_{1234}) = \frac{1}{2} C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu m^\nu (l^\rho n^\sigma - m^\rho \bar{m}^\sigma) \\ \psi_3 &= C_{2124} = C_{\mu\nu\rho\sigma} n^\mu l^\nu n^\rho \bar{m}^\sigma \\ \psi_4 &= C_{2424} = C_{\mu\nu\rho\sigma} n^\mu \bar{m}^\nu n^\rho \bar{m}^\sigma \end{aligned} \quad (1.9)$$

Les sis components complexes independents que representen el tensor de Ricci i l'escalar de curvatura són:

$$\begin{aligned}\phi_{00} &= \frac{1}{2} R_{11} & \phi_{01} &= \phi_{10}^* = \frac{1}{2} R_{13} = \frac{1}{2} R_{14}^* \\ \phi_{11} &= \frac{1}{4} (R_{12} + R_{34}) & \phi_{12} &= \phi_{21}^* = \frac{1}{2} R_{23} = \frac{1}{2} R_{24}^* \\ \phi_{22} &= \frac{1}{2} R_{22} & \phi_{02} &= \phi_{20}^* = \frac{1}{2} R_{33} = \frac{1}{2} R_{44}^*\end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\Lambda = \frac{R}{24} = \frac{R_{34} - R_{12}}{12}$$

Finalment, definim les derivades intrínseques que actuen sobre un escalar.

$$D\phi = \phi; \mu l^\mu \quad \Delta\phi = \phi; \mu n^\mu \quad \delta\phi = \phi; \mu m^\mu \quad \delta^*\phi = \phi; \mu \bar{m}^\mu \quad (1.11)$$

3. Les equacions de Newman-Penrose

Les equacions de Newman-Penrose són un conjunt d'equacions diferencials equivalent a les equacions de camp d'Einstein per a la determinació del tensor mètric. Venen donades en termes dels coeficients de spin (1.7) i els escalars (1.9) i (1.10). Es divideixen en tres grups relacions de commutació, identitats de Ricci i identitats de Bianchi. Donat que només ens calen les del segon grup les donem a continuació:

$$\begin{aligned}(a) \quad D\rho - \delta^*\kappa &= (\rho^2 + \sigma\sigma^*) + \rho(\epsilon + \epsilon^*) - \kappa^*\tau - \kappa(3\alpha + \beta^* - \pi) + \phi_{00} \quad [R_{1314}] \\ (b) \quad D\sigma - \delta\kappa &= \sigma(\rho + \rho^* + 3\epsilon - \epsilon^*) - \kappa(\tau - \pi^* + \alpha^* + 3\beta) + \psi_0 \quad [R_{1313}] \\ (c) \quad D\tau - \Delta\kappa &= \rho(\tau + \pi^*) + \sigma(\tau^* + \pi) + \tau(\epsilon - \epsilon^*) - \kappa(3\gamma + \gamma^*) + \psi_1 + \phi_{01} \quad [R_{1312}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d) \quad D\alpha - \delta^*\epsilon &= \alpha(\rho + \epsilon^* - 2\epsilon) + \beta\sigma^* - \beta^*\epsilon - \kappa - \kappa^*\gamma + \pi(\epsilon + \rho) + \phi_{10} \quad \left[\frac{1}{2}(R_{3414} - R_{1214}) \right] \\ (e) \quad D\beta - \delta\epsilon &= \sigma(\alpha + \pi) + \beta(\rho^* - \epsilon^*) - \kappa(\mu + \gamma) - \epsilon(\alpha^* - \pi^*) + \psi_1 \quad \left[\frac{1}{2}(R_{1213} - R_{3413}) \right] \\ (f) \quad D\gamma - \Delta\epsilon &= \alpha(\tau + \pi^*) + \beta(\tau^* + \pi) - \gamma(\epsilon + \epsilon^*) - \epsilon(\gamma + \gamma^*) + \tau\pi - \nu\kappa + \psi_2 + \phi_{11} - \Lambda \quad \left[\frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3412}) \right] \\ (g) \quad D\lambda - \delta^*\pi &= (\rho\lambda + \sigma^*\mu) + \pi(\pi + \alpha - \beta^*) - \nu\kappa^* - \lambda(3\epsilon - \epsilon^*) + \phi_{20} \quad [R_{2441}] \\ (h) \quad D\mu - \delta\pi &= (\rho^*\mu + \sigma\lambda) + \pi(\pi^* - \alpha^* + \beta) - \mu(\epsilon + \epsilon^*) - \nu\kappa + \psi_2 + 2\Lambda \quad [R_{2431}] \\ (i) \quad D\nu - \Delta\pi &= \mu(\pi + \tau^*) + \lambda(\pi^* + \tau) + \pi(\gamma - \gamma^*) - \nu(3\epsilon + \epsilon^*) + \psi_3 + \phi_{21} \quad [R_{2421}] \\ (j) \quad \Delta\lambda - \delta^*\nu &= -\lambda(\mu + \mu^* + 3\gamma - \gamma^*) + \nu(3\alpha + \beta^* + \pi - \tau^*) - \psi_4 \quad [R_{2442}] \\ (k) \quad \delta\rho - \delta^*\sigma &= \rho(\alpha^* + \beta) - \sigma(3\alpha - \beta^*) + \tau(\rho - \rho^*) + \kappa(\mu - \mu^*) - \psi_1 + \phi_{01} \quad [R_{2444}] \\ (l) \quad \delta\alpha - \delta^*\beta &= (\mu\rho - \lambda\sigma) + \alpha\alpha^* + \beta\beta^* - 2\alpha\beta + \gamma(\rho - \rho^*) + \epsilon(\mu - \mu^*) - \psi_2 + \phi_{11} + \Lambda \quad \left[\frac{1}{2}(R_{1234} - R_{3434}) \right] \\ (m) \quad \delta\lambda - \delta^*\mu &= \nu(\rho - \rho^*) + \pi(\mu - \mu^*) + \mu(\alpha + \beta^*) + \lambda(\alpha^* - 3\beta) - \psi_3 + \phi_{21} \quad [R_{2443}] \\ (n) \quad \delta\nu - \Delta\mu &= (\mu^2 + \lambda\lambda^*) + \mu(\gamma + \gamma^*) - \nu^*\pi + \nu(\tau - 3\beta - \alpha^*) + \phi_{22} \quad [R_{2423}] \\ (o) \quad \delta\gamma - \Delta\beta &= \gamma(\tau - \alpha^* - \beta) + \mu\tau - \sigma\nu - \epsilon\nu^* - \beta(\gamma - \gamma^* - \mu) + \alpha\lambda^* + \phi_{12} \quad \left[\frac{1}{2}(R_{1232} - R_{3432}) \right] \\ (p) \quad \delta\tau - \nabla\sigma &= (\mu\sigma + \lambda^*\rho) + \tau(\tau + \beta - \alpha^*) - \sigma(3\gamma - \gamma^*) - \kappa\nu^* + \phi_{02} \quad [R_{1332}] \\ (q) \quad \Delta\rho - \delta^*\tau &= -(\rho\mu^* + \sigma\lambda) + \tau(\beta^* - \alpha - \tau^*) + \rho(\gamma + \gamma^*) + \nu\kappa - \psi_2 - 2\Lambda \quad [R_{1324}] \\ (r) \quad \Delta\alpha - \delta^*\gamma &= \nu(\rho + \epsilon) - \lambda(\tau + \beta) + \alpha(\gamma^* - \mu^*) + \gamma(\beta^* - \tau^*) - \psi_3 \quad \left[\frac{1}{2}(R_{1242} - R_{3442}) \right]\end{aligned}$$

Equacions (1.12)

4 .- Equacions de Maxwell

En el formulisme de Newman i Penrose el tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$ es substituït per tres escalars complexos.

$$\begin{aligned}\phi_0 &= F_{13} = F_{\mu\nu} l^\mu m^\nu \\ \phi_1 &= \frac{1}{2}(F_{12} + F_{43}) = \frac{1}{2}F_{\mu\nu} (l^\mu n^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu) \\ \phi_2 &= F_{42} = F_{\mu\nu} \bar{m}^\mu n^\nu\end{aligned}\quad (1.13)$$

i les equacions de Maxwell (expressades en termes de les derivades intrínseques)

$$F_{[ab/c]} = 0 \quad i \quad \eta^{nm} F_{an/m} = 0$$

es canvien per

$$\begin{aligned}\phi_{1|2} - \phi_{0|4} &= 0 & \phi_{2|1} - \phi_{1|4} &= 0 \\ \phi_{1|3} - \phi_{0|2} &= 0 & \phi_{2|3} - \phi_{1|2} &= 0\end{aligned}$$

d'on facilment trobem la forma explícita:

$$\begin{aligned}D\phi_1 - \delta^*\phi_0 &= (\pi - 2\alpha)\phi_0 + 2\rho\phi_1 - \kappa\phi_2 \\ D\phi_2 - \delta^*\phi_1 &= -\lambda\phi_0 + 2\pi\phi_1 + (\rho - 2\epsilon)\phi_2 \\ \delta\phi_1 - \Delta\phi_0 &= (\mu - 2\gamma)\phi_0 + 2\tau\phi_1 - \sigma\phi_2 \\ \delta\phi_2 - \Delta\phi_1 &= -\nu\phi_0 + 2\mu\phi_1 + (\tau - 2\beta)\phi_2\end{aligned}\quad (1.14)$$

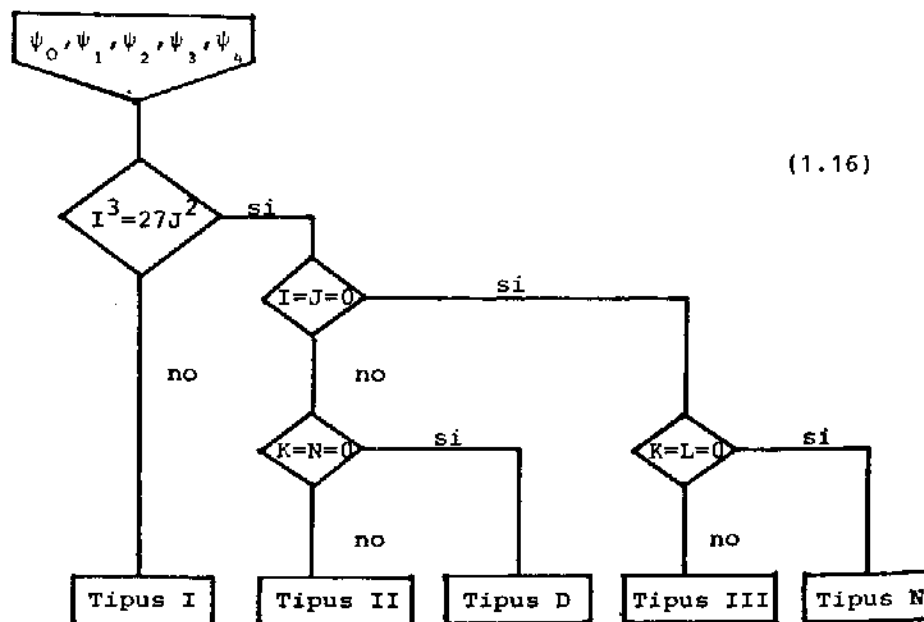
5 - Algoritme de d'Inverno i Russell-Clark

Una manera directa de determinar el tipus de Bel-Petrov d'una solució ve donada per l'algoritme de d'Inverno i Russell-Clark que presentem a continuació (d'Inverno, Russell-Clark, 1971)

Suposant $\psi_4 \neq 0$ (Si $\psi_4 = 0$ però $\psi_0 \neq 0$ en el què segueix només cal bescanviar $\psi_0 \leftrightarrow \psi_4$ i $\psi_1 \leftrightarrow \psi_3$; Si $\psi_0 = \psi_4 = 0$ la multiplicitat de les arrels de (1.70) és molt simple de trobar) fem les següents definicions:

$$\begin{aligned}I &= \psi_0\psi_4 - 4\psi_1\psi_3 + 3\psi_2^2 & J &= \begin{vmatrix} \psi_4 & \psi_3 & \psi_2 \\ \psi_3 & \psi_2 & \psi_1 \\ \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 \end{vmatrix} \\ K &= \psi_1\psi_4^2 - 3\psi_4\psi_3\psi_2 + 2\psi_3^3 & L &= \psi_2\psi_4 - \psi_3^2 \\ N &= 12L^2 - \psi_4^2 I\end{aligned}\quad (1.15)$$

El diagrama que ens dóna el tipus de Bel-Petrov és.



II. MÈTRIQUES INTERIORS OBTINGUDES PER VARIACIÓ DE PARÀMETRES EN LA MÈTRICA DE KERR

La variació en les coordenades de les constants d'una solució permet l'obtenció de noves mètriques que poden descriure situacions molt diferents a l'original. D'aquesta manera, per exemple, variant en la coordenada temporal les constants de les mètriques d'Schwarzschild i de Kerr s'han obtingut generalitzacions no estacionàries d'elles (Vaidya 1943-51-53, Carmeli 1977, Gonzalez et al. 1979) de cara a trobar solucions amb radiació.

Enfocant el mètode vers la producció de solucions interiors que empalmin amb Kerr, l'estudi general comportaria la variació de les dues constants m i a en totes les coordenades, aleshores una superfície bona per empalmar amb la solució del buit seria aquella en que les derivades primeres d'aquestes funcions fossin nul·les (Lichnerowicz 1954, Roos 1976-77, Bonnor 1981). Fent-ho així el problema és intractable; cal, per tant, limitar la forma de les funcions i per a això tenim dues possibilitats:

- Prendre una forma simple de dependència i veure quins tensors impulsio-energia surten interpretant-los.
- No limitar a priori aquestes funcions i imposar després el tensor que correspon a una certa font o bé imposar certes condicions a la superfície d'empalmament.

En aquest estudi ens centrem en el primer mètode i veiem que de l'anàlisi de les solucions trobades variant m en r i θ , i a en r i θ (en determinades formes), hi ha dos casos especialment interessants, un correspon a la presència d'un camp electromagnètic no nul que en general pot incloure un fluid no perfecte i en el cas simple $m(r)$ porta a la mètrica de Kerr-Newman, i un segon

cas que correspon a radiació pura (Comellas i Mas, 1980).

1.- La mètrica de Kerr en coordenades nul·les

Normalment la mètrica de Kerr sol presentar-se en coordenades de Boyer-Lindquist (1.967).

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right) dt^2 - 2 \left(\frac{2mr}{\Sigma} \right) a \sin^2 \theta dt d\theta + \frac{\Sigma}{r} dr^2 + d\theta^2 + \left(\Omega + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2$$

amb

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad \Omega = T + 2mr = r^2 + a^2$$

Es útil de cara a emprar el formulisme nul, escriure la mètrica de Kerr en el sistema de coordenades nul·les avançades que s'obté amb el canvi.

$$dt = du + \frac{\Omega}{r} dr$$

$$d\phi = d\psi + \frac{a}{r} dr$$

Fent-lo trobem:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right) du^2 - du dr + 2a \sin^2 \theta dr d\psi + \Sigma d\theta^2 - 2 \left(\frac{2mr}{\Sigma} \right) a \sin^2 \theta du d\psi + \left(\Omega + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\psi^2$$

així

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} - \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right) & -1 & 0 & - \frac{2mra \sin^2 \theta}{\Sigma} \\ -1 & 0 & 0 & a \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ - \frac{2mra \sin^2 \theta}{\Sigma} & a \sin^2 \theta & 0 & \sin^2 \theta \left(\Omega + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \end{bmatrix}$$

Escollim la t  trada nul.la següent

$$l_\mu = (1, 0, 0, -a \sin^2 \theta)$$

$$n_\mu = \frac{1}{\Sigma} \left(\frac{T}{2}, \Sigma, 0, -\frac{a^2 \sin^2 \theta}{2} \right)$$

$$m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r+i a \cos \theta)} (i a \sin \theta, 0, -\Sigma, -i \Omega \sin \theta)$$

la corresponent tètrada contravariant és:

$$l^\mu = (0, -1, 0, 0)$$

$$n^\mu = \frac{1}{\Sigma} (-\Omega, \frac{T}{2}, 0, -a)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r+i a \cos \theta)} \left(-i a \sin \theta, 0, -1, -\frac{i}{\sin \theta} \right)$$

2 - Cas $m(r, \theta)$, $a = \text{constant}$

Suposarem que un dels paràmetres de la mètrica de Kerr $-m-$ depèn de les coordenades r i θ i l'altre $-a-$   s constant.

Els coeficients de spin resulten ser:

$$\kappa = \sigma = \lambda = \epsilon = 0$$

$$\nu = \frac{m' r}{\sqrt{2}(r-i a \cos \theta)} \quad \pi = -\frac{i a \sin \theta}{\sqrt{2}(r-i a \cos \theta)^2}$$

$$\rho = \frac{1}{(r-i a \cos \theta)} \quad \beta = -\frac{\cot \theta}{2\sqrt{2}(r+i a \cos \theta)}$$

$$\mu = \frac{T}{2\Sigma(r-i a \cos \theta)} \quad \gamma = \mu - \frac{(r-m-\dot{m}r)}{2\Sigma}$$

$$\tau = \frac{i a \sin \theta}{\sqrt{2}\Sigma} \quad \alpha = \pi - \beta^*$$

Amb aquests resultats i resolent les equacions de Newman-Penrose trobem les components dels tensors de Weyl (1.9), els escalars ϕ lligats al tensor de Ricci i l'escalar de curvatura (1.10)

$$\psi_0 = \psi_1 = 0$$

$$\psi_2 = -m\rho^3 - \frac{(2\dot{m} + \ddot{m}r)}{6} \rho\rho^* + m r \rho^2 \rho^*$$

$$\psi_3 = \frac{2rm'}{\sqrt{2}} \rho^3 \rho^* - \frac{(m' + \dot{m}'r)}{2\sqrt{2}} \rho^2 \rho^* \quad (2.1)$$

$$\psi_4 = \frac{r(m' \cot \theta - m'')}{2} \rho^3 \rho^* - i a r \sin \theta m' \rho^4 \rho^*$$

$$\phi_{00} = \phi_{01} = \phi_{02} = 0$$

$$\phi_{12} = \frac{rm'}{\sqrt{2}} \rho^2 \rho^{*2} - \frac{(m' + \dot{m}'r)}{2\sqrt{2}} \rho \rho^{*2}$$

$$\phi_{11} = \dot{m} r^2 \rho^2 \rho^{*2} - \frac{(2\dot{m} + \ddot{m}r)}{4} \rho \rho^*$$

$$\phi_{22} = -\frac{r(m'' + m' \cos \theta)}{2} \rho^2 \rho^{*2}$$

$$\Lambda = \frac{(2\dot{m} + \ddot{m}r)}{12} \rho \rho^*$$

Podem escriure, a partir de les ϕ , les components del tensor de Ricci (1.10),   ssent:

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{11} - 3\Lambda & 0 & 0 \\ \phi_{11} - 3\Lambda & \phi_{22} & \phi_{12} & \phi_{12}^* \\ 0 & \phi_{12} & 0 & \phi_{11} + 3\Lambda \\ 0 & \phi_{12}^* & \phi_{11} + 3\Lambda & 0 \end{bmatrix}$$

Estudiant ara el tipus algebraic del tensor de Ricci podem veure quins casos d'interès físic conté i analitzar-los (Kramer et al., 1980; §5.1).

$$R^a_b = \eta^a c R_{cb} = 2 \begin{bmatrix} -\phi_{11} + 3\Lambda & -\phi_{22} & -\phi_{12} & -\phi_{12}^* \\ 0 & -\phi_{11} + 3\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{12}^* & \phi_{11} + 3\Lambda & 0 \\ 0 & \phi_{12} & 0 & \phi_{11} + 3\Lambda \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

i de l'equació de valors propis:

$$16 \left(\phi_{11} - 3\Lambda + \frac{\lambda}{2} \right)^2 \left(\phi_{11} + 3\Lambda - \frac{\lambda}{2} \right)^2 = 0$$

trobem els següents valors propis

$$\lambda_1 = -2(\phi_{11} - 3\Lambda)$$

$$\lambda_2 = 2(\phi_{11} + 3\Lambda)$$

éssent ambdós dobles.

Per poder fer la classificació necessitem trobar els vectors propis que corresponen a cada valor propi i veure'n el tipus.

** $\phi_{11} \neq 0$

* $\lambda_1 = (\phi_{11} - 3\Lambda)$

Considerant un vector arbitrari

$$v^\mu = a l^\mu + b m^\mu + c \bar{m}^\mu + c^* \bar{m}^\mu$$

l'equació de vectors propis $R^a_b v^b = \lambda_1 v^a$ es redueix a les equacions

$$\phi_{22} b + \phi_{12} c + \phi_{12}^* c^* = 0$$

$$\phi_{12}^* b + (\phi_{11} + 3\Lambda) c = -(\phi_{11} - 3\Lambda) c$$

les quals poden expressar-se

$$c = -\frac{\phi_{12}^*}{2\phi_{11}} b$$

$$(\phi_{11} \phi_{22} - \phi_{12} \phi_{12}^*) b = 0$$

Per tant hem de considerar dos casos.

i) $\phi_{11} \phi_{22} \neq \phi_{12} \phi_{12}^*$. Llavors cal que $b=0$ i en conseqüència $c=0$. Així corresponent a λ_1 hi ha un vector propi isotrop

$$v_{\lambda_1}^\mu = a l^\mu$$

ii) $\phi_{11} \phi_{22} = \phi_{12} \phi_{12}^*$. En aquest cas a , b i c són diferents de zero. Per tant poden haver-hi dos vectors propis, podent ser un d'ells tipus temps:

$$v_{\lambda_1}^\mu = a l^\mu + b \left(n^\mu - \frac{\phi_{12}^*}{2\phi_{11}} \bar{m}^\mu - \frac{\phi_{12}}{2\phi_{11}} m^\mu \right)$$

$$v_{\lambda_1}^\mu v_{\lambda_1 \mu} = 2b^2 \left(\frac{\phi_{22}}{4\phi_{11}} - \frac{a}{b} \right) \gtrless 0 \quad a, b \text{ arbitraris}$$

* $\lambda_2 = 2(\phi_{11} + 3\Lambda)$

De l'equació de vectors propis trobem les equacions:

$$2\phi_{11} a + \phi_{22} b + \phi_{12} c + \phi_{12}^* c^* = 0$$

$$\phi_{11} b = 0$$

$$\phi_{12} b = 0$$

Com que $\phi_{11} \neq 0$, cal que $b=0$ i a més

$$a = -\frac{(\phi_{12} c + \phi_{12}^* c^*)}{2\phi_{11}}$$

Per tant, corresponent a λ_2 hi ha dos vectors propis tipus espai

$$v_{\lambda_2}^\mu = -\frac{(\phi_{12} c + \phi_{12}^* c^*)}{2\phi_{11}} (1^\mu + c m^\mu + c^* \bar{m}^\mu)$$

$$v_{\lambda_2}^\mu v_{\lambda_2 \mu} = 2cc^* > 0$$

** $\phi_{11} = 0$

Hi ha un sol autovalor $\lambda = 6\Lambda$ quadruple. El sistema es redueix a

$$\phi_{22} b + \phi_{12} c + \phi_{12}^* c^* = 0$$

$$\phi_{12} b = 0$$

* $\phi_{12} \neq 0$

Llavors $b=0$ i $\frac{c}{\phi_{12}} = -\frac{c^*}{\phi_{12}} = id$ i hi ha dos vectors propis tipus espai

$$v_\lambda^\mu = a 1^\mu + id(\phi_{12}^* m^\mu - \phi_{12} \bar{m}^\mu)$$

$$v_\lambda^\mu v_{\lambda \mu} = 2d^2 \phi_{12} \phi_{12}^* > 0 \quad \text{tipus espai}$$

* $\phi_{12} = 0$

En aquest cas $\phi_{22}=0$ i qualsevol vector és propi. Correspon a m constant.

Dels diferents tipus de tensor de Ricci (i per tant de tensor d'impulsió-energia), destaquen pel seu

sentit físic els següents casos:

- 1) $\phi_{12} \neq 0$, $\phi_{11} \phi_{12} = \phi_{12} \phi_{12}^*$. Ja que llavors podem tenir un vector tipus temps i tres tipus espai. En la notació de Segré es tracta del cas A1 [(1,1) (1,1)] que s'interpreta com un camp electromagnètic no nul i pot incloure un fluid no perfecte (Kramer et al., 1980; pg.67). Com veurem a continuació, si considerem $m(r)$ solament, es troba la mètrica de Kerr-Newman o mètrica de Kerr carregada (Newman et al., 1965).
- 2) $\phi_{11} \neq 0$, $\phi_{11} \phi_{22} = \phi_{12} \phi_{12}^*$. Hi ha un vector propi isòtrop corresponent a un dels valors propis i dos vectors tipus espai corresponent a l'altre. Es el cas A3 [(1,1), 2] que correspon a radiació pura.

A partir del tensor de Ricci podem construir el tensor d'impulsió energia (equacions d'Einstein, $k=1$).

$$T^a_b = R^a_b - \frac{1}{2} R \delta^a_b$$

que resulta:

$$T^a_b = 2 \begin{bmatrix} -\phi_{11} - 3\Lambda & -\phi_{12} & -\phi_{12} & -\phi_{12}^* \\ 0 & -\phi_{11} - 3\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{12}^* & \phi_{11} - 3\Lambda & 0 \\ 0 & \phi_{12} & 0 & \phi_{11} - 3\Lambda \end{bmatrix}$$

Si considerem m funció solament de r i demanem que aquest tensor s'impulsió-energia sigui el d'un camp electromagnètic, la traça ha de ser nul·la per tant $\Lambda=0$. Amb aquestes condicions les ϕ_{ab} de (2.1) resulten:

$$\phi_{00} = \phi_{01} = \phi_{02} = \phi_{12} = \phi_{22} = \Lambda = 0$$

$$\phi_{11} = \hat{m}r^2 (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{-2}$$

D'on trobem que les components en la tètrada del tensor camp electromagnètic (1.13) són zero llevat de

$$\phi_1 = \sqrt{\hat{m}r} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{-1} e^{i\xi} \quad (2.3)$$

amb ξ funció real arbitrària. Determinem ξ mitjançant les equacions de Maxwell (1.14) que en aquest cas es redueixen a

$$D\phi_1 = 2\rho\phi_1 \quad (2.4, a)$$

$$\Delta\phi_1 = -2\mu\phi_1 \quad (2.4, b)$$

$$\delta\phi_1 = 2\tau\phi_1 \quad (2.4, c)$$

$$\bar{\delta}\phi_1 = -2\pi\phi_1 \quad (2.4, d)$$

De (2.4, a) i $\Lambda=0$ trobem:

$$m = -\frac{e^2}{2r} + M \quad i \quad \xi_{,r} = -\frac{2a\cos\theta}{\Sigma}$$

De (2.4, b)

$$\Omega\xi_{,u} + a\xi_{,\theta} = 0$$

De (2.4, c) obtenim la relació:

$$-a\sin\theta\xi_{,u} - \frac{\xi_{,\psi}}{\sin\theta} + i\xi_{,\theta} = -\frac{2iarsin\theta}{\Sigma}$$

I finalment, de (2.4, d):

$$a\sin\theta\xi_{,u} + \frac{\xi_{,\psi}}{\sin\theta} + i\xi_{,\theta} = -\frac{2iarsin\theta}{\Sigma}$$

D'aquestes quatre darreres equacions   s immediat veure que

$$\xi_{,u} = \xi_{,\psi} = 0; \quad \xi_{,\theta} = -\frac{2arsin\theta}{\Sigma}; \quad \xi_{,r} = -\frac{2a\cos\theta}{\Sigma}$$

Integrant, trobem:

$$\xi = -2arctan \frac{r}{a\cos\theta} + k$$

Tenint en compte que

$$e^{i\xi} = e^{-2iarctan\left(\frac{r}{a\cos\theta}\right) + k} = -\frac{(r+ia\cos\theta)^2}{\Sigma} e^{ik}$$

i substituint a (2.3) veiem finalment que:

$$\phi_1 = -\frac{e}{\sqrt{2}\Sigma} 2\{[(r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \cos k - 2ar \cos \theta \sin k + i(r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \sin k + 2ar \cos \theta \cos k]\}$$

A partir dels escalars ϕ_a podem escriure explicitament el tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$, resultant al nostre cas

$$F_{\mu\nu} = -4\text{Re}(\phi_1) l_{[\mu} n_{\nu]} + 4i\text{Im}(\phi_1) m_{[\mu} \bar{m}_{\nu]}$$

O bé:

$$F_{10} = \frac{\sqrt{2}e}{\Sigma^2} [\sin k 2ar \cos \theta - \cos k (r^2 - a^2 \cos^2 \theta)] = \frac{F_{11}}{a \sin^2 \theta}$$

$$F_{20} \Omega = F_{23}, \quad a = \sqrt{2}e\Omega a \sin \theta [\cos k - 2ar \cos \theta + \sin k (r^2 - a^2 \cos^2 \theta)]$$

El camp és l'associat amb la mètrica de Kerr-Newman llevat d'una rotació de dualitat ja que hem considerat el tensor d'impulsió-energia.

Pot comparar-se aquest estudi amb l'efectu  t per Martín i Mas (1970), destacant la manera simple com

s'ha obtingut la solució de Kerr-Newman com un cas particular de camp electromagnètic no nul.

4.- Cas $m=m(r)$ i $a=a(r,\theta)$ als termes $2mr/\Sigma$

En aquest cas s'ha fet una anàlisi paral·lela a la del paràgraf anterior. Els únics coeficients de spin que resulten modificats respecte del cas anterior són μ , γ i ν . Els escalars ϕ_{ab} són diferents però la forma del tensor de Ricci (2, 2) és la mateixa. Així l'anàlisi feta abans val igualment ara. Si ens cenyim a l'existència d'un vector propi tipus temps cal que es verifiqui la relació $\phi_{11}\phi_{22}=\phi_{12}\phi_{12}^*$. Estudiant-la arribem a la conclusió de què només és certa si a és constant retrobant el cas $m(r)$ estudiat abans. No especifiquem detalls dels càlculs donat que no s'aporta cap aspecte essencialment nou a l'estudi ja efectuat.

5.- Classificació de Bel-Petrov (cas $m(r,\theta)$, $a=\text{constant}$)

De les projeccions del tensor de Weyl (2.1) i de l'algoritme de d'Inverno i Russell-Clark (1.16) trobem:

$$I = 3\psi_2^2 \quad J = -\psi_2^3$$

$$K = -3\psi_4\psi_3\psi_2 + 2\psi_3^2 \quad N = \psi_3^4 - 2\psi_2\psi_3^2\psi_4 - 2\psi_2^2\psi_4^2$$

així en general les solucions amb $m(r,\theta)$ són tipus II de Bel-Petrov.

Si busquem quines solucions són tipus D hem d'exigir $I, J \neq 0$ i $K=N=0$. La darrera condició és equivalent a $\psi_3=0$ obliga a m ser funció solament de r (i per tant $\psi_4=0$). Veiem així que l'única solució tipus D és precisament l'estudiada al paràgraf 3.

III. SOLUCIONS ESTACIONARIES I AXISIMETRIQUES AMB FLUID PERFECTE

1. La mètrica de Lewis-Papapetrou

Considerem l'element de línia general axisimètric i estacionari (mètrica de Lewis-Papapetrou):

$$ds^2 = 2e^{-2F} dx d\bar{x} + \frac{2e^H}{S+T} [STD\phi^2 - (S-T)d\phi dt + dt^2] \quad (3.1)$$

on $\sqrt{2} \cdot x = \rho + iz$. Considerem la tetrad nul·la:

$$l = e^{H/2} (S+T)^{-1/2} (1, 0, 0, S)$$

$$n = e^{H/2} (S+T)^{-1/2} (1, 0, 0, -T)$$

$$m = e^{-F} (0, 1, 0, 0).$$

Els coeficients de spin resulten ser

$$\sigma = \lambda = \rho = \mu = \gamma = \epsilon = 0$$

$$\kappa = -\frac{e^F S_{\bar{x}}}{S+T} \quad \nu = \frac{e^F T_x}{S+T}$$

$$\tau = -\pi^* = \frac{1}{2} e^F H_{\bar{x}} \quad \alpha + \beta^* = -e^F F_x$$

$$\alpha - \beta^* = -\frac{e^F}{2(S+T)} (S_x - T_x)$$

Resolent les equacions de Newman-Penrose trobem els escalars de Ricci i de curvatura:

$$\phi_{10} = \phi_{12} = 0$$

$$\phi_{00} = -\frac{e^{2F}}{S+T} \left[S_{xx} + \text{Re}(H_x S_{\bar{x}}) - \frac{2S_x S_{\bar{x}}}{S+T} \right]$$

$$\phi_{22} = -\frac{e^{2F}}{S+T} \left[T_{xx} + \text{Re}(H_x T_{\bar{x}}) - \frac{2T_x T_{\bar{x}}}{S+T} \right]$$

$$2\phi_{11} = e^{2F} \left[F_{xx} + \frac{1}{4} H_x H_{\bar{x}} - \frac{\text{Re}(S_x T_{\bar{x}})}{(S+T)^2} \right]$$

$$6\Lambda - 2\phi_{11} = -e^{2F} (H_{xx} + H_x H_{\bar{x}})$$

$$\phi_{02} = -e^{2F} \left[\frac{1}{2} H_{xx} + \frac{1}{4} H_x^2 + H_x F_x + \frac{S_x T_x}{(S+T)^2} \right]$$

I les projeccions del tensor de Weyl:

$$\psi_1 = \psi_3 = 0$$

$$\psi_0 = -\frac{e^{2F}}{S+T} \left(S_{xx} + 2F_x S_x + H_x S_x - \frac{2S_x^2}{S+T} \right)$$

$$\psi_4^* = -\frac{e^{2F}}{S+T} \left(T_{xx} + 2F_x T_x + H_x T_x - \frac{2T_x^2}{S+T} \right)$$

$$\psi_2 = -\frac{e^{2F}}{6} \left[H_{xx} + 2F_{xx} + \frac{S_x T_x - 5S_x T_x}{(S+T)^2} \right]$$

Ara, i a partir de ϕ_{ab} , escrivim les components del tensor de Ricci (1.10) resultant:

$$R_{ab} = 2 \begin{vmatrix} \phi_{00} & \phi_{11} - 3\Lambda & 0 & 0 \\ \phi_{11} - 3\Lambda & \phi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{02} & \phi_{11} + 3\Lambda \\ 0 & 0 & \phi_{11} + 3\Lambda & \phi_{02}^* \end{vmatrix}$$

A continuació construïm el tensor d'Einstein:

$$G_{ab} = R_{ab} - 12\Lambda\eta_{ab}$$

Obtenint:

$$G^a_b = \eta^{ac} G_{cb} = 2 \begin{vmatrix} -(\phi_{11} + 3\Lambda) & -\phi_{22} & 0 & 0 \\ \phi_{00} & -(\phi_{11} + 3\Lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{11} - 3\Lambda & \phi_{02}^* \\ 0 & 0 & \phi_{02} & \phi_{11} - 3\Lambda \end{vmatrix}$$

De cara a la identificació amb un tensor d'impulsió-energia tipus fluid perfecte, determinem els valors propis de G^a_b . Hem de resoldre les equacions:

$$[2(\phi_{11} + 3\Lambda) + \lambda]^2 - 4\phi_{00}\phi_{22} = 0$$

$$[2(\phi_{11} - 3\Lambda) - \lambda]^2 - 4\phi_{02}\phi_{02}^* = 0$$

Trobat els quatre valors propis:

$$\lambda_1 = -2(\phi_{11} + 3\Lambda) - 2\sqrt{\phi_{00}\phi_{22}}$$

$$\lambda_2 = -2(\phi_{11} + 3\Lambda) + 2\sqrt{\phi_{00}\phi_{22}}$$

$$\lambda_3 = 2(\phi_{11} - 3\Lambda) + 2\sqrt{\phi_{02}\phi_{02}^*}$$

$$\lambda_4 = 2(\phi_{11} - 3\Lambda) - 2\sqrt{\phi_{02}\phi_{02}^*}$$

(3.2)

De l'equació de valors propis trobem fàcilment els corresponents vectors propis. És immediat veure que les condicions generals per a l'existència d'un vector propi tipus temps i tres vectors propis tipus espai són:

$$\phi_{02} = 0$$

$$2\phi_{11} = \sqrt{\phi_{00}\phi_{22}}$$

I els valors propis (3.2) esdevenen:

$$\lambda_1 = -6(\phi_{11} + \Lambda)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2(\phi_{11} - 3\Lambda)$$

A través de les equacions d'Einstein podem plantejar les equacions de camp en presència d'un fluid perfecte ($\kappa = 1$)

$$\begin{aligned}
 a) \quad \phi_{02} &= 0 \\
 b) \quad 2\phi_{11} &= \sqrt{\phi_{00}\phi_{22}} \\
 c) \quad 6(\phi_{11} + \Lambda) &= \rho \\
 d) \quad 2(\phi_{11} - 3\Lambda) &= p
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

2. Imposició d'un tipus de Bel-Petrov

* Tipus D.

Les condicions (1.16) es tradueixen en $\psi_0 = \psi_4 = 0$ o bé $\psi_0\psi_4 = 9\psi_2^2$. El primer cas s'anomena D(2) i el segon D(1). Integrant les equacions del cas D(1) trobem:

$$\frac{(S-T)x}{(S+T)^2} = f(\bar{x}) e^{-(2F+H)} \quad \frac{S_x T_x}{(S+T)^2} = g^2(\bar{x}) e^{-2(2F+H)}$$

Es dir que a més de les equacions de camp (3.3) tindrem aquestes dues condicions.

* Tipus 0.

En aquest cas $\psi_0 = \psi_2 = \psi_4 = 0$ i pot demostrar-se que, en el cas que estem considerant d'un fluid perfecte, l'espai-temps necessàriament ha de ser estàtic, arribant a trobar-se la mètrica interior d'Schwarzschild usual (Collinson, 1976).

3.- Espai conformement pla

Si s'exigeix que l'espai tridimensional sigui conformement pla hem de comparar

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} = \begin{bmatrix} e^{2(k-u)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(k-u)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^2 e^{-2u} \end{bmatrix}$$

amb

$$\bar{g}_{ij} = C(\rho, z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

C factor de conformitat.

així cal que es verifiqui la condició $e^{-(2F+H)} = \frac{S+T}{(x+\bar{x})^2}$

4.- Equació d'estat $p = n\rho$

Suposar una equació d'estat de la forma $p = n\rho$ restringeix les equacions de camp.

De (3.3, c i d) trobem

$$p + \rho = 8\phi_{11}$$

i com que $p = 2(\phi_{11} - 3\Lambda) = e^{2F}(H_{x\bar{x}} + H_{\bar{x}x})$

s'haurà de complir, amés de les equacions de camp, que

$$\phi_{11} = \frac{n+1}{8n} e^{2F}(H_{x\bar{x}} + H_{\bar{x}x})$$

5.- Construcció d'una solució tipus D(1)

Si volem una solució tipus D(1) de (1.16) cal que

$$\psi_0\psi_4 = 9\psi_2^2 \tag{3.4}$$

Per poder treballar aquesta relació farem una nova definició de funcions.

Introduïm

$$B = We^{-2U}, \quad H = 1uW, \quad C = \frac{1}{W} e^{2(k-u)}, \quad a = \frac{A}{B}$$

I usarem les funcions a, B, C i H que considerem funcions de x i $\bar{x}$. D'aquesta forma l'element de línia (3.1) es converteix en

$$ds^2 = 2Ce^H dx d\bar{x} + e^H [B(1-a^2)d^2\phi - 2ad\phi dt + \frac{1}{B} dt^2]$$

La relació (3.4) és molt complicada, per poder trobar alguna solució fem les hipòtesis següents:

$$B = \text{constant} \quad i \quad a_{\bar{x}} = f(x) C$$

Amb aquestes hipòtesis i integrant les equacions (3.3) podem obtenir la solució amb equació d'estat $p = \rho$ donada per:

$$a = m(x) + \bar{m}(\bar{x})$$

$$C = \alpha^2 m'(x) \bar{m}'(\bar{x}) \quad \alpha = \text{constant real}$$

$$H = \pm i [\bar{m}(\bar{x}) - m(x)] + \beta \quad \beta = \text{constant real}$$

IV.- EL METODE DEL SCATTERING INVERS: OBTENCIÓ I ESTUDI DE SOLUCIONS ESTACIONÀRIES I AXISIMÈTRIQUES A LES EQUACIONS D'EINSTEIN

1.- Solucions solitòniques

El mètode del scattering invers o de la transformada espectral inversa s'ha utilitzat per trobar solucions tipus solitònic dins dominis molt diferents de la Física.

El primer treball sobre aquest tipus de solucions fou presentat pel físic anglès J. Scott a "Reports of the British Association for the Advancement of Science" al 1845, fent referència a una observació que l'autor efectuà a l'agost de 1834, de la propagació en un canal del què ell anomenava "ona de translació" i més endavant "ona solitària" indicant que aquest objecte representaria un tipus general de solucions regulars estables i no dissipatives de la hidrodinàmica. La polèmica que generarà aquest article va durar fins l'any 1895 en què Korteweg i de Vries donaren el què ara s'anomena solució solitònica de l'equació hidrodinàmica no lineal.

Fora de la hidrodinàmica han anat apareguent, al llarg dels anys, articles que fan referència a solucions solitòniques de diferents equacions no lineals, d'aplicació en camps molt variats (destaquem d'entre elles l'equació de sine-Gordon). L'any 1978, Belinski i Zakharov presentaren una manera d'obtenir noves solucions a les equacions d'Einstein que es fonamenta en la tècnica del scattering invers.

Aquesta tècnica pot utilitzar-se per resoldre les equacions no lineals d'Einstein al buit si l'espai temps admet dos camps de vectors de Killing que commutin. Aquesta exigència deixa encara una ampla gamma de possibilitats. Destaquem en primer lloc els camps estacionaris i axisimètrics, alguns aspectes dels quals es discuteixen en aquesta memòria; i a més les mètriques d'Einstein-Rosen i les mètriques cosmològiques (i generalitzacions) amb tipus de Bianchi I a VII.

Centant-nos en l'aplicació de la tècnica solitònica a la generació de solucions estacionàries i axisimètriques a partir d'una coneguda direm que les solucions 2-solitòniques obtingudes a partir de la mètrica de Minkowski han estat estudiades per Belinski i Zakharov (1980)

Les solucions 2n solitòniques han estat estudiades per Alekseev i Belinski (1981) i la mètrica que s'obté s'interpreta en el límit estàtic ($g_{01} = 0$) com una cadena de forats negres de Schwarzschild situats a l'eix de simetria i units per segments singulars. En el cas estacionari ($g_{01} \neq 0$) s'obté una superposició no lineal de mètriques de Kerr-NUT i poden posarse condicions en els paràmetres de tal manera que l'eix z sigui regular entre les partícules de Kerr-NUT, resultant compensada l'atracció gravitatòria per la repulsió rotatòria (en una situació d'inestabilitat). Si considerem la superposició de n mètriques de Kerr amb masses iguals i el mateix moment angular i hem fa que s'aproximin fins

coincidir, s'obté una solució de la classe de Tomimatsu-Sato amb $\delta = n$ (Tomimatsu, 1980; Tomimatsu & Sato, 1981).

El cas més simple de solucions $2n+1$ solitòniques que s'obtenen a partir d'una mètrica no física relacionada amb la mètrica de Kasner (que conté l'euclidiana) ha estat publicat per Verdaguer (1982).

El seu estudi és presentat en aquesta memòria als paràgrafs 1 i 2. Trobem que la família de solucions obtinguda depen de dos paràmetres. Un d'ells, q , es relaciona amb la mètrica llavor i es responsable de la força del camp ($q=0$ dona Minkowski). Es interessant destacar que la mètrica de Minkowski ha estat, d'aquesta manera, generada pel mètode del scattering invers a partir d'una llavor no física. L'altre paràmetre, D , està lligat amb la rotació del camp, aleshores quan $D \rightarrow \infty$ les mètriques esdevenen estàtiques. Per classificar les solucions hem utilitzat el formulisme de tètredes nul·les (Capítol I). Alguns casos interessants són el membre $q = -1/2$ que correspon al tipus I de Bel-Petrov amb un límit de "rotació extrema" que pertany a la classe de Van Stockum i és tipus II; el membre $q = 0$ que és l'espai minkowski i el membre $q = 1$ que és una mètrica tipus D en el límit estàtic i pot comparar-se amb la solució de Schwarzschild en algunes regions de l'espai temps.

1.- Classificació y propietats de les solucions 1-solitòniques obtingudes d'una mètrica no física tipus Kasner

Com hem vist al paràgraf anterior per a la generació de solucions estacionàries i axisimètriques de les equacions d'Einstein al buit amb la tècnica solitònica, cal una mètrica llavor. Si prenem com llavor la mètrica no física

$$ds^2 = \rho^{2q^2-1/2} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^{1-2q} d\phi^2 + \rho^{1+2q} dt^2$$

que es redueix a la solució de Kasner cosmològica mitjançant una transformació complexa de coordenades, la solució 1-solitònica que s'obté és la família biparamètrica

$$ds^2 = \frac{C\rho^{2q^2} \text{Ch}(q\psi + D)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} (d\rho^2 + dz^2) + \frac{1}{\text{Ch}(q\psi + D)} \left[-\rho^{1+2q} \text{Sh}(q\psi + \frac{\psi}{2} + D) dt^2 - \rho^{1-2q} \text{Sh}(-q\psi + \frac{\psi}{2} - D) d\phi^2 - 2\rho \text{Ch} \frac{\psi}{2} d\phi dt \right] \quad (4.1)$$

amb

$$e^{-\psi} = \left[\frac{\rho}{\mu} \right]^2, \quad \mu = -z + \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad \text{i} \quad q, D \text{ dos paràmetres arbitraris (Verdaguer, 1982).}$$

Per classificar les solucions compararem (4.1) amb (3.1) i utilitzarem les equacions del §3.1 que ens donen les projeccions del tensor de Weyl en la tètreda

A partir d'aquí i gràcies a l'algoritme de Russell-Clark (1.16) és possible trobar el tipus de Bel-Petrov. Els càlculs poden trobar-se a l'apèndix. En general les solucions (4.1) són del tipus I del Bel-Petrov. Desta-

quem els casos següents:

* $q=0$. En aquest cas tots els escalars ψ són zero. L'espai-temps és pla. Podem trobar la transformació que ens mostra explícitament que és l'espai de Minkowski.

Quan $q=0$, (4.29) queda:

$$ds^2 = \frac{C\text{Ch}D}{\sqrt{\rho^2+z^2}} (d\rho^2+dz^2) + \frac{1}{\text{Ch}D} \left[-\rho \text{Sh}\left(\frac{\psi}{2}+D\right) dt^2 - \rho \text{Sh}\left(\frac{\psi}{2}-D\right) d\phi^2 - 2\rho \text{Ch}\frac{\psi}{2} d\phi dt \right]$$

fent una rotació al pla $t\phi$ d'angle $\theta = -\frac{1}{2} \text{arccotg}(\text{Sh}D)$ podem escriure aquesta mètrica com:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} (d\rho^2+dz^2) + (z+\sqrt{\rho^2+z^2}) d\phi^2 - (z-\sqrt{\rho^2+z^2}) dt^2$$

la qual reconeixem directament com plana (Kramer & al. 1980) o bé fent ara el canvi de coordenades:

$$R = [(z^2+\rho^2)^{1/2}+z]^{1/2}$$

$$z = \text{Ch}\{t \cdot [(z^2+\rho^2)^{1/2}-z]^{1/2}\}$$

$$T = \text{Sh}\{t \cdot [(z^2+\rho^2)^{1/2}-z]^{1/2}\}$$

reduïm a la mètrica de Minkowski en cilíndriques,

$$ds^2 = dR^2+dz^2+R^2d\phi^2-dT^2$$

Veiem, doncs com la tècnica del scattering invers genera la mètrica de Minkowski a partir d'una llavor no física que pot ser deduïda de la mètrica de Kasner "isotrópica" ($q=0$). En aquest cas coneixem les solu-

cions $2n+1$ solitòniques per a un n general ja que una solució $2n+1$ solitònica pot interpretar-se com la $2n$ solitònica generada a partir de la 1 solitònica, i com s'ha dit al §2 són conegudes les solucions $2n$ solitòniques generades a partir de Minkowski.

* $q \neq 0$. Límit $D=0$ o de "rotació extrema". La raó d'aquest nom la veurem en el següent paràgraf.

Quan $q=-1/2$, la mètrica llavor és la mètrica euclíidiana. La solució pren la forma

$$ds^2 = C\rho^{1/2} (d\rho^2+dz^2) - 2\rho dt d\phi + 2z\rho d\phi^2$$

i és un membre de la classe de van Stockum (Van Stockum 1973) amb tipus II de Bel-Petrov.

Límit $D \rightarrow \infty$ o "estàtic". En aquest límit els escalars ψ prenen una forma particularment simple:

$$\psi_0 = \psi_4 = -\frac{q}{2B} \rho^{-2q^2-1} \frac{e^{-q\psi}}{\text{Ch}\frac{\psi}{2}} \left| -2+\text{Sh}^2\frac{\psi}{2} - 3q\text{Sh}\frac{\psi}{2}\text{Ch}\frac{\psi}{2} + 2q^2\text{Ch}^2\frac{\psi}{2} + 3i \left(\text{Sh}\frac{\psi}{2} - q\text{Ch}\frac{\psi}{2} \right) \right|$$

A partir de la classificació de Bel-Petrov per a mètriques tipus Lewis-Papapetrou §3 veiem que, en general, per a un valor arbitrari de q , les mètriques són tipus I, i a part del cas $q=0$ en que tenim l'espai pla, solament podria haver-hi un cas tipus D(1), quan $\psi_0, \psi_4 \neq 0$ i $\psi_0\psi_4 = 9\psi_2^2$ aquesta darrera equació s'escriu:

$$\left| 1+q\text{Ch}\frac{\psi}{2}\text{Sh}\frac{\psi}{2} - \frac{(2q^2+1)}{3} \text{Ch}^2\frac{\psi}{2} \right|^2 = \text{Sh}^2\frac{\psi}{2} \left(\text{Sh}\frac{\psi}{2} - q\text{Ch}\frac{\psi}{2} \right)^2$$

i té per solució $q = \pm 1$.

En concret per a $q=1$ (el cas $q=-1$ es equivalent,

només cal fer el canvi $t \rightarrow \phi$ la solució tipus D pren la forma:

$$ds^2 = \frac{B}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \rho^2 e^\psi (d\rho^2 + dz^2) + \frac{e^{-\psi/2}}{\rho} d\phi^2 - \rho^2 e^{\psi/2} dt^2 \quad (4.2)$$

Per estudiar aquesta mètrica considerarem els seus escalars de curvatura.

L'únic escalar de curvatura no nul és:

$$I = 12\psi^2 = \frac{3e^{-3\psi}}{B^2 \rho^6} = \frac{3}{B^2 \mu^6} \quad (4.3)$$

El significat del qual pot entendre's millor si fem coordenades esfèriques:

$$\rho = \sigma(x^2-1)^{1/2} (1-\rho^2)^{1/2} \quad (4.4)$$

$$z = \sigma xy \quad \sigma = \text{constant}$$

Que podem relacionar amb les coordenades de Boyer-Lindquist (r, θ) mitjançant

$$\sigma x = r - m$$

$$y = \cos \theta$$

L'escalar de curvatura (4.3) en el límit de r gran s' escriu:

$$I = \frac{3}{B^2 r^6 (1-\cos \theta)^6} \quad (4.5)$$

Que podem comparar amb l'invariant d'Schwarzschild. Suggestint-nos una interpretació física per a la constant B . L'escalar de curvatura (4.5) es singular per $\theta = 0$, per tant la solució (4.2) no és asimptòticament plana. Seria interessant estudiar si existeix una solució as-

simptòticament plana que pogués ser aproximada per la (4.2) en determinades regions de l'espai-temps d'una manera similar, com això és possible per a les mètriques de Kinnersley-Kelly (1974) tipus "Kerr extrem". Observem que en general els escalars de curvatura es comporten en termes de r com r^{-4q^2-2} aleshores per a q grans el camp s'anul·la ràpidament. El sentit de q queda, doncs, clar.

2.- La formulació d'Ernst. Obtenció de solucions relacionades asimptòticament planes

El mètode que introduí F.J. Ernst (Ernst, 1968) redueix les equacions d'Einstein per al cas estacionari i axisimètric a un sistema equivalent més simple d'equacions diferencials que resulta útil en la recerca de noves solucions i de cara a una interpretació física. Primerament exposarem breument aquesta formulació i després l'aplicarem al nostre cas de solucions 1-solitòniques (4.1).

Podem escriure l'element de línia general estacionari i axisimètric com:

$$ds^2 = F [e^{2k} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] - F (dt + A d\phi)^2$$

El potencial d'Ernst és una funció complexa

$$\epsilon = F + i\omega$$

en termes del qual les equacions d'Einstein al buit s' escriuen:

$$(\epsilon + \epsilon^*) \nabla^2 \epsilon = 2 \nabla \epsilon \cdot \nabla \epsilon \quad (4.6.a)$$

$$(\epsilon + \epsilon^*) k_{,\xi} = \sqrt{2} \rho \epsilon_{,\xi} \epsilon^*_{,\xi} \quad (4.6.b)$$

$$(\epsilon + \epsilon^*) A, \xi = 2\rho(\epsilon - \epsilon^*), \xi \quad (4.6 .c)$$

on $\nabla = (\partial_\rho, \partial_z)$, $\nabla^2 = \partial_\rho^2 + \rho^{-1}\partial_\rho + \partial_z^2$ i $\sqrt{2}\partial_\xi = \partial_\rho - i\partial_z$.

Es millor introduir un altre potencial

$$\xi = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \quad (4.7)$$

llavors quan usem coordenades esfèroidals (4.4) l'equació (4.6.a) queda:

$$\begin{aligned} (\xi\xi^*-1) \{[(x^2-1)\xi, x], x + [(1-y^2)\xi, y], y\} = \\ = 2\xi^*[(x^2-1)\xi_x^2 + (1-y^2)\xi_y^2] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Aquesta darrera equació té una manifesta simetria en x i y que es pot aprofitar per a l'obtenció de noves solucions (p.e. Tomimatsu & Sato, 1972).

Per a la nostra solució (4.1) calculem en primer lloc el potencial d'Ernst $\epsilon = F + i\omega$. Identificant directament a la mètrica trobem:

$$F = \frac{\rho^{2q+1} \text{Sh}((q+1/2)\psi + D)}{\text{Ch}(q\psi + D)}$$

Per trobar ω cal integrar (4.6.c), i ho farem introduint coordenades r i θ , $\rho = r\sin\theta$ i $z = r\cos\theta$ convertint aquesta equació en

$$\frac{\partial\omega}{\partial\theta} = -\frac{F^2}{\sin\theta} \frac{\partial A}{\partial r} \quad \frac{\partial\omega}{\partial r} = \frac{F^2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial A}{\partial\theta} \quad (4.9)$$

De la mètrica deduí:

$$A = \frac{r^{2q} \sin\theta}{\text{Sh}((q+1/2)\psi + D)} \quad \text{amb} \quad e^{-\psi} = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

Substituint $\frac{\partial A}{\partial r}$ i $\frac{\partial A}{\partial\theta}$ a (4.9) i integrant trobem finalment

$$\omega = -\frac{r^{1+2q} \sin 2q\theta}{\text{Ch}(q\psi + D)} = -\frac{\rho^{2q} \sqrt{\rho^2 + z^2}}{\text{Ch}(q\psi + D)}$$

Així el potencial d'Ernst per a la família (4.1) és:

$$\epsilon = \frac{\rho^{1+2q}}{\text{Ch}(q\psi + D)} \left\{ \text{Sh}\left[\left(q + \frac{1}{2}\right)\psi + D\right] - \frac{i}{\rho} \sqrt{\rho^2 + z^2} \right\} \quad (4.10)$$

En el límit estàtic ($D \rightarrow \infty$) el potencial d'Ernst (4.10) es redueix a la família de Weyl (no plana) següent:

$$\epsilon = \mu \rho^{2q} \quad (4.11)$$

Que pot obtenir-se "combinant" les solucions planes $\epsilon = \mu$ i $\epsilon = \rho$ (Kramer et al., 1980).

Així la solució 1-solitònica (4.1) es pot interpretar com la generalització estacionària de la família estàtica de Weyl (4.11).

Quan $q = -1/2$ el potencial d'Ernst és particularment interessant. En termes de les coordenades esfèroidals (4.4) i en el límit de x gran es redueix a

$$\epsilon = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\gamma+y} - \frac{i\eta}{\gamma+y} \quad (4.12)$$

On hem introduït $\gamma = \text{Coth} D$ i $\eta = \sqrt{\gamma^2 - 1}$. Aquest potencial límit també és solució de l'equació d'Ernst. (Per veure-ho, es convenient introduir el potencial ξ definit a 4.7 i substituir a l'equació 4.8. Aprofitant la simetria de l'equació 4.8 en les coordenades x i y podem construir la nova solució

$$\epsilon = i \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \eta}{\gamma + x} \quad (4.13)$$

que ens suggereix la solució estàtica següent

$$\epsilon = \frac{\sqrt{x^2-1} - \eta}{\gamma+x} \quad (4.14)$$

Més exactament, aquest darrer potencial correspon a una solució electrostàtica que s'obté de la solució del buit

$$\epsilon = \frac{\sqrt{x^2-1} + \eta\gamma^{-1}x}{\gamma+x} \quad (4.15)$$

mitjançant una transformació d'invariància finita del tipus $\epsilon' = \epsilon - 2\beta\phi - \beta\bar{\beta}$, $\phi' = \phi + \beta$ amb $\beta = \sqrt{\eta/\gamma}$, $\gamma > 1$ (Kramer et al., 1980 §30.3).

Es interessant de constatar que les solucions (4.14) i (4.15) són asimptòticament planes i que a més, quan $\gamma = 1$ contenen la mètrica de Zipoy-Voorhees

$$\epsilon = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^\delta \quad (4.16)$$

amb paràmetre de deformació $\delta = 1/2$.

Voorhees (1970) donà una interpretació física a la família (4.16) relacionant-la amb el membre $\delta = 1$ que és la mètrica de Schwarzschild. Quan fem servir coordenades (r, θ) i prenem $\sigma = m$, aquestes coordenades poden considerar-se esfèriques i (4.16) dona el camp d'una partícula de massa m . En general amb coordenades "adaptades a la font" fent $\sigma = \frac{m}{\delta}$, si es desenvolupa ϵ en termes de (r, θ) per a r gran i es compara amb les coordenades d'Schwarzschild ($\sigma = m$) les solucions (4.16) poden interpretar-se com camps exteriors de barres (si $\delta < 1$) de massa m . Per a $\delta = 1/2$ la barra té longitud $4m$.

Per a x gran i γ finit podem desenvolupar
(4.15)

$$\epsilon = 1 + \epsilon\gamma^{-1} - (1 + \epsilon\gamma^{-1})\gamma\frac{1}{x} + \left| (1 + \epsilon\gamma^{-1})\gamma^2 - \frac{1}{2} \right| \frac{1}{x^2} + \dots$$

Que es pot reduir a la forma usual.

$$\epsilon = 1 - \frac{2m}{r} + (\text{polinomi en } \cos\theta) \frac{1}{r^2} + \dots$$

mitjançant una transformació d'Ehlers lligada al paràmetre γ (Cosgrove, 1980).

D'aquesta manera la solució (4.15), almenys asimptòticament, pot interpretar-se com la transformada de la mètrica de Zipoy-Voorhees amb $\delta = 1/2$, mitjançant una transformació d'Ehlers lligada a γ , d'una manera similar a un dels resultats obtinguts per Verdaguier (1982). La relació entre les solucions (4.12) que no són asimptòticament planes i les asimptòticament planes deduïdes d'elles pot ser similar a la que hi ha entre les solucions tipus "Kerr extrem" de Kinnersley & Kelly (1974) amb les de Tomimatsu & Sato (1972), representant les primeres una regió a les proximitats de l'ergosfera de les darreres. Al nostre cas les solucions 1-solitòniques descriurien alguna regió exterior a les barres (almenys en el limit $\gamma = 1$).

Finalment, comentar que les solucions (4.12) i (4.13) es relacionen amb les trobades per Verdaguier (1982) mitjançant una transformació d'invariància finita $\epsilon' = \epsilon + ik$ amb $k = \eta\gamma^{-1}$ i que per a un valor de q general la relació de (4.10) amb solucions asimptòticament planes no és tan evident ja que el potencial d'Ernst, asimptòticament, dependrà de les dues coordenades esfèroidals i hom haurà de verificar si es té una solució abans de fer el canvi $x \pm y$. De totes maneres hem de recordar que el potencial d'Ernst no té un sentit intrínsec, es dir, que s'haurien d'estudiar d'una manera completa totes les solucions que s'obtingessin amb els mètodes esmentats.

BIBLIOGRAFIA

- Alekseev, G.A. and V.A. Belinskii; Sov. Phys. JETP 51 655 (1981).
- Bade, W.L. and H. Jehle; Revs. Modern Phys. 25, 716, (1953)
- Bardeen, J.M.; "Rapidly Rotating Stars, Disks and Black Holes, Les Houches, (1972).
- Belinskii, V.A. and V.E. Zakharov; Sov. Phys. JETP 48, 985 (1978).
- Belinskii, V.A. and V.E. Zakharov; Sov. Phys. JETP 50, 1 (1980).
- Bonnor, W.B. and P.A. Vickers; G.R.G. 13, 29 (1981).
- Boyer, R.H. and R.W. Lindquist; J. Math. Phys. 8 265 (1967).
- Campbell, S.J. and J. Wainwright, G.R.G. 8 987 (1977).
- Carmeli, M. and M. Kaye; Ann. of Phys. 103, 97 (1977).
- Cartan, E. ; "Leçons sur la Géométrie des Spaces de Riemann", Gauthiers-Villars (1951).
- Chandrasekhar, S. ; "General Relativity, An Einstein Centenary Survey", Edited S.W. Hawking and W. Israel, C.U.P. (1979).
- Collinson, C.D. and R.K. Dodd, Nuovo Cimento 3, 281 (1971).
- Collinson, C.D., G.R.G. 7 419 (1976).
- Comellas, F. i L. Mas, C.R. Acad.Sc. Paris 290 B, 453 (1980).
- Comellas, F. , L. Mas i E. Verdaguer, C. R. Acad. Sc. Paris 294 II, 1207 (1982).
- Cosgrove, C.M. , J. Math. Phys. 21 2417 (1980).
- d'Inverno, R.A. and R.A. Russell-Clark; J.Math. Phys. 12 1258 (1971).
- Eisenhart, L.P., "Riemannian Geometry", Princenton University Press (1925).
- Ernst, F.J. , Phys. Rev. 167, 1175 (1968).
- Ernst, F.J. , Phys. Rev. 168, 1415 (1968).
- González, C., L. Herrera and J. Jiménez, J. Math. Phys. 20, 837 (1979).
- Kerr, R.P., Phys. Rev. Lett. 11, 237 (1963).
- Kinnersley, W. and E.F. Kelly, J. Math. Phys. 15, 2121 (1974).
- Kramer, P. H. Stephani, E. Herlt, M. MacCallum and E. Schmutzer, "Exact Solutions of Einstein's Field Equations", C.U.P. (1980).
- Levi-Civita, T., Rendiconti di Palermo, 42, 173 (1917).
- Lewis, T. , Proc. Roy. Soc. London. A 136, 176 (1932)
- Lichnerovitz, A., "Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme", Masson, Paris (1954).
- Martin, J. and L. Mas, C.R. Acad. Sc. Paris 271 A, 338 (1970)
- Newman, E. T.; J. Math. Phys. 2, 324 (1961).
- Newman, E.T. , and R. Penrose, J. Math. Phys. 3, 566 (1962)
- Newman, E.T. , et al. , J. Math. Phys. 6, 918 (1965).
- Papapetrou, A. , C. R. Acad. Sc. Paris 4 A, 83 (1966).
- Papapetrou, A. , C. R. Acad. Sc. Paris 272 A , 1537 (1971, a).
- Papapetrou, A. , C. R. Acad. Sc. Paris 272 A , 1613 (1971, b).
- Pirani, F.A.E., Phys. Rev. 105, 1089 (1957).
- Ross, W., G.R.G. 7, 431 (1976)
- Ross, W., G.R.G. 8, 753 (1977)

Tomimatsu, A. and H. Sato, Phys. Rev. Lett. 29, 1344
(1972)

Tomimatsu, A., Prog. Theor. Phys. 63, 1054 (1980).

Tomimatsu, A. and H. Sato, Prog. Theor. Phys. 70, 215
(1981).

Vaidya, P.C., Curr. Sci. 12, 183. (1943).

Vaidya, P.C., Proc. Indian Acad. Sci. 33 A, 264, (1951).

Vaidya, P.C., Nature 171, 260 (1953).

Van Stockum, W.J., Proc. R. Soc. Edinburgh. A 57, 135
(1973).

Verdaguer, E., J.Phys.A 15, 1261 (1982).

Voorhes, B.H., Phys.Rev. Lett. 29, 1344 (1970).

Wainwright, J., Abstracts G.R.G. 9th Conference. (1980).