UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

FACULTAT DE CIÈNCIES

" SOLUCIONS ESTACIONARIES I AXISIMETRIQUES A LES EQUACIONS D' EINSTEIN "

Memòria presentada pel Sr.Francesc de P. Comellas i Padrò per optar al grau de Doctor en Ciències

Bellaterra, 1982

Diverses persones han fet possible, d'una manera o altra, que pogueu tenir entre les mans aquesta memoria. D'entre elles agraeixo especialment al Dr. Lluís Mas el seu constant estímul i ajut al llarg d'aquest treball. Les diferents trobades aquí, a Granada i a Ciutat de Mallorca han estat fonamentals per a què aquest treball prengués forma. També expresso el meu agraïment al Dr. Enric Verdaguer amb qui hem treballat el capítol quart continuant una línia endegada per ell. No haig d'oblidar els Drs. Xavier Fustero i Angel Salas i les moltes tardes que hem passat junts barallant-nos amb les equacions (3.27).. Finalment a la Mercè Pascual li he d'agrair l'excel. lent tasca de mecanografiat.

Bellaterra, Setembre de 1.982.

INDEX

ANNEX

INTRODUCCIÓ

Dins de les teories de la gravitació, la més amplament acceptada i que fins ara ha superat totes les proves experimentals, és la Teoria de la Relativitat General d'Einstein. En ella l'espai i el temps venen representats per una varietat riemanniana quadridimensional i les equacions de camp constitueixen un sistema no lineal en derivades parcials que s'escriu habitualment:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

La integració d'aquestes equacions és sens dubte, un dels problemes més complexos dins de la física teòrica i fins ara no ha tingut cap resposta definitiva ni s'ha trobat una metodologia general per resoldre'l. Malgrat això el nombre de solucions exactes conegudes és enorme -tenint en compte la dificultat del problema- i continuament s'aporten noves solucions (s'escriuen un promig de cent articles a l'any sobre el tema). Tot i aquesta abundància de material poques de les solucions conegudes responen a un problema físic real. Pensem que problemes en aparença no massa complicats com el de dos cossos, el del camp gravitatori generat per un estel en rotació constant o el de la radiació gravitatòria d'un objecte finit no estan resolts encara, i que les úniques solucions "realistes" conegudes són les d'Schwarzschild (1916) i Kerr (1963) que poden representar l'estat final del col.lapse d'un estel. Amb tot l'estudi de solucions sense un sentit físic massa clar ha portat a un coneixement millor de l'estructura de les equacions d'Einstein i a un descobriment de mètodes de generació de solucions que més endevant han estat útils per l'estudi de solucions físiques. Moltes de les tècniques que emprem ara han estat fruit d'aquests estudis i eren desconegudes pels primers relativistes. Només cal citar, per exemple, l'ús de grups de moviments, la formulació per tètrades nul.les, les tècniques espinorials o el mètode del scattering invers. Ara bé, no tot està en el mètode d'estudi o les tècniques usades ja que només simplifiquen el problema en determinades circumstàncies i normalment no són gaire útils si abans no s'ha fet unes hipotesis sobre la mètrica i/o el tensor d'impulsió-energia. En efecte, una mètrica qualsevol pot ser solució de les equacions d'Einstein donat que no hi hagi restriccions sobre el tensor d'impulsió-enrgia; només cal prendre l'equació de camp com definició del tensor $T_{\mu\nu}$. Per això de cara a la recerca de solucions interessants és convenient restringir aquest tensor d'alguna manera; imposant condicions de simetria a la mètrica, imposant un tipus de Bel-Petrov, donant una equació d'estat per a la materia, tenint en compte determinades condicions de contorn, etc...

La memòria que es presenta és una aportació a la generació i estudi de solucions exactes estacionàries i axisimètriques a les equacions d'Einstein, amb tensors d'impulsió-energia que admeten una interpretació física.

Hem dividit el treball en quatre parts. La primera és dedicada al desenvolupament d'una eina que hem usat repetidament en les altres parts, que és el formulisme de Newman-Penrose o formulació per tètrades nul·les. La notació és la més comuna dins de la literatura, la signatura que fem servir és (- + + +), per això s'han canviat definicions de l'article original de Newman-Penrose per adaptar-nos a aquesta signatura que és la més utilitzada ara. Ens hem estès en algunes consideracions geomètriques per poder mostrar el sentit d'alguns objectes de la formulació com els coeficients de spin. També s'estudia l'estructura de les equacions de camp i la seva completesa.

El capítol segon se centra en l'estudi de possibles solucions interiors a la mètrica de Kerr. Bàsicament es tracta de fer variar les constants de la mètrica en dues coordenades espacials (r i θ) i a través de les equacions d'Einstein trobar els tensors d'impulsió-energia i estudiar-los. Veiem que hi ha dos casos amb particular interés físic: un cas de camp electromagnètic no nul que en general pot incloure un fluid no perfecte i en la seva expressió més simple porta a la mètrica de Kerr carregada (Kerr-Newman) i un cas de radiació pura.

En el tercer capítol, i a partir de l'element de línia general de Lewis-Papapetrou es plantegen les equacions de camp per al cas d'un fluid perfecte i s'analitzen les diferents restriccions que porta l'imposar el tipus D de Bel-Petrov a l'espai-temps, una equació d'estat simple i d'altres hipotesis. S'obté una solució tipus D(1).

Finalment, en el darrer capítol i després d'una breu explicació del mètode del scattering invers, es presenta i s'estudia una família biparamètrica de solucions estacionaries i axisimètriques del buit obtinguda mitjançant una transformació 1-solitònica d'una mètrica no física relacionada amb la mètrica de Kasner. De l'estudi i clasificació es veu que un dels parametres pot relacionar-se amb la "força" del camp i l'altre amb la rotació. A més de veure que dins la família hi ha continguda la mètrica plana s'han trobat solucions tipus I i D. S'ha calculat el potencial d'Ernst i a partir d'ell s'estudia la relació amb solucions asimptoticament planes.

I. FORMULACIÓ PER TÈTRADES. EL FORMULISME DE NEWMAN-PENROSE O DE SISTEMES DE REFERÈNCIA NULS

1.- EL FORMULISME DE TÈTRADES

L'ús de la formulació per tètrades en relació a la Teoría de la Relativitat neix amb la propia teoría, amb tot l'objectiu que hom pretenia amb aquesta formulació ha anat variant. Sobre els anys trenta, precedía la teoría d'espinors per a la formulació de la invariancia relativista de les equacions d'ona (en especial l'equació de Dirac)*. Més endavant l'interés se centrà en la teoría d'espinors, però a partir de l'any 1957 amb l'article de Pirani (1957) sobre la radiació gravitatòria retornà l'aplicació de la formulació per tètrades a aquests problemes. Newman al 1961 usà una tètrade nul.la de cara a un nou plantejament de la classificació de Petrov. L'any 1962 marca una fita en aquesta història en sortir l'article de Newman i Penrose on es relaciona la formulació per tètrades nul.les amb el càlcul d'espinors en relació al problema de la radiació gravitatòria plantejant les anomenades equacions de Newman-Penrose. Aquesta manera de presentar les equacions de camp, ha resultat especialment útil en l'estudi de mètriques algebraicament especials i en concret per entendre millor la mètrica de Kerr. La formulació per tètrades nul.les ha permès també la construcció de noves solucions exactes i darrerament ha facilitat el càlcul algebraic per ordinador dels tensors de curvatura i de Weyl i dels invariants, portant el camp de les solucions

---

*) Pot trobar-se bibliografia sobre l'època a Bade & Jehle (1953).

exactes a un altre nivell (p.e. Campbell & Wainwright, 1977; Wainwright, 1980). En les pàgines que segueixen es fa una presentació de la formulació per tètrades de la Relativitat General adaptada a la signatura emprada al llarg d'aquesta memòria.

1.1.- La representació per tètrades

D'acord amb la formulació clàssica * considerarem a cada punt de l'espai-temps una base de quatre vectors contravariants:

$$e^{\mu}_{a} \qquad a = 1,2,3,4 \tag{1.1}$$

Distinguim els índex de tètrade amb l'alfabet llatí a, b, c,... (minúscules, primera part) i els tensorials amb l'alfabet grec μ, ν, ρ,...

Associat amb (1.1) tenim els vectors covariants

$$e_{a\mu} = g_{\mu\nu} e^{\nu}_{a} \tag{1.2}$$

Definim també e^{b}_{μ} com la matriu inversa de la e^{μ}_{a}, on l'index de tètrade indica la fila i el tensorial la columna. Així:

$$e^{\mu}_{a} e^{b}_{\mu} = \delta^{b}_{a} \qquad \text{i} \qquad e^{\mu}_{a} e^{a}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{1.3}$$

---

*) Per exemple, Eisenhart (1925), Cartan (1951) i Chandrasekhar (1979). Aquesta secció està basada parcialment en el darrer dels treballs citats.

També es pren:

$$e_a^{\mu} e_{b\mu} = \eta_{ab} = \text{ctant} \tag{1.4}$$

On η_{ab} és una matriu simètrica constant amb signatura (-+++). En la formulació clàssica es prenia η_{ab} diagonal i minkowskiana, formant aleshores els vectors $\vec{e}_{(a)}$ una base ortonormal, però en principi -i de cara a la formulació per tètrades nul.les- no fem cap altra hipòtesi. Sigui finalment η^{ab} la matriu inversa de la η_{ab}.

$$\eta^{ab}\eta_{bc} = \delta^a_c \tag{1.5}$$

En conseqüència:

$$\begin{aligned} \eta_{ab} e^a_{\mu} &= e^{\lambda}_a e_{b\lambda} e^a_{\mu} = e_{b\mu} \\ \eta^{ab} e_{a\mu} &= e^b_{\mu} \end{aligned} \tag{1.6}$$

I

$$e_{a\mu} e^a_{\nu} = g_{\mu\lambda} e^{\lambda}_a e^a_{\nu} = g_{\mu\lambda}\delta^{\lambda}_{\nu} = g_{\mu\nu} \tag{1.7}$$

Donat un tensor el podem projectar en la tètrade:

$$\begin{gathered} A_a = e_{a\mu}A^{\mu} = e^{\mu}_a A_{\mu} \qquad A^a = e^a_{\mu}A^{\mu} = e^{a\mu}A_{\mu} \\ A^{\mu} = e^{\mu}_a A^a = e^{a\mu}A_a \end{gathered} \tag{1.8}$$

I en general

$$\begin{aligned} T_{ab} &= e^{\mu}_a e^{\nu}_b T_{\mu\nu} = e^{\mu}_a T_{\mu b} \\ T_{\mu\nu} &= e^a_{\mu} T_{a\nu} = e^a_{\mu} e^b_{\nu} T_{ab} \end{aligned} \tag{1.9}$$

1.2.- Derivades direccionals. Coeficients de rotació de Ricci

Els vectors contravariants $\vec{e}_a$ considerats com vectors tangents, defineixen les derivades direccionals.

$$\vec{e}_a = e^{\mu}_{a} \frac{\partial}{\partial x\mu} \tag{1.10}$$

Escrivint:

$$\phi,_a = e^{\mu}_{a} \frac{\partial\phi}{\partial x\mu} = e^{\mu}_{a}\phi,_{\mu} \tag{1.11}$$

Si ϕ és una funció escalar. En general

$$\begin{aligned} A_{a,b} &= e^{\mu}_{b} \frac{\partial}{\partial x\mu} A_a = e^{\mu}_{b} \frac{\partial}{\partial x\mu} e^{\nu}_{a} A_{\nu} = \\ &= e^{\mu}_{b}[e^{\nu}_{a}A_{\nu,\mu}+A_{\lambda}e^{\lambda}_{a,\mu}] \end{aligned} \tag{1.12}$$

i com

$$A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}A_{\lambda} \qquad e^{\lambda}_{a;\nu} = e^{\lambda}_{a,\nu}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}e^{\mu}$$

$$\begin{aligned} A_{a,b} &= A_{\mu;\nu}e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b}+e^{\lambda}_{a;\nu}A_{\lambda}e^{\nu}_{b} \\ &= A_{\mu;\nu}e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b}+\gamma_{cab}A^{c} \end{aligned} \tag{1.13}$$

On hem definit:

$$\gamma_{cab} \equiv e^{\mu}_{c}e_{a\mu;\nu}e^{\nu}_{b} \tag{1.14}$$

que són escalars anomenats coeficients de rotació de la tètrade o de Ricci (Levi-Cività, 1917). Observem que en el cas de què tinguéssim una base coordenable, serien els símbols de Christoffel.

Podem escriure equivalentment

$$e_{a\mu;\nu} = \gamma_{cab}\, e^{c}_{\mu}\, e^{b}_{\nu} \tag{1.15}$$

També podem escriure a partir de

$$\eta_{ab;\lambda} = [\, e_{a\mu}\, e^{\mu}_{b}]_{;\lambda} = 0 \tag{1.16}$$

que

$$e_{a\mu;\lambda}\, e^{\mu}_{b} + e_{a\mu}\, e^{\mu}_{b;\lambda} = 0$$

multiplicant per $e^{\lambda}_{(c)}$

$$\begin{gathered} e^{\lambda}_{c}\, e_{a\mu;\lambda}\, e^{\mu}_{b} + e^{\lambda}_{c}\, e_{a\mu}\, e^{\mu}_{b;\lambda} = 0 \\ \gamma_{bac} + \gamma_{abc} = 0 \end{gathered} \tag{1.17}$$

O sigui són antisimètrics en el primer parell d'índexs. En particular

$$\gamma_{aac} = 0 \tag{1.18}$$

Així hi ha $6\times 4 = 24$ coeficients de rotació independents, que tanmateix no son arbitraris perquè estan subjectes a les condicions d'integrabilitat de les equacions (1.15) que són de la forma:

$$e_{a\mu;\nu\lambda} - e_{a\mu;\lambda\nu} = e_{a\sigma}\, R^{\sigma}_{\mu\nu\lambda} \tag{1.19}$$

De cara a donar una interpretació geomètrica als coeficients de rotació considerem un punt P_0 de la varietat i una corba C_m de la congruència e^{μ}_{m} que passi per P_0. Al llarg de C_m tenim:

$$e^{\nu}_{m} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial s_{m}} \tag{1.20}$$

Indiquem per $\theta_{a\bar{b}}$ l'angle en un punt P de C_m entre el vector e^{μ}_{a} a P i el vector $\bar{e}^{\mu}_{b}$ a P paral.lel al e^{μ}_{b} a P_0 respecte d'un desplaçament de P_0 a P al llarg de C_m així

$$\cos\theta_{a\bar{b}} = \bar{e}^{\mu}_{b}\; e_{a\mu}$$

Per hipotesi $e^{\nu}_{m}\; \bar{e}_{b\mu;\nu} = 0$ i conseqüentment

$$\frac{\partial}{\partial s_m} \cos\theta_{a\bar{b}} = \bar{e}^{\mu}_{b}\; e_{a\mu;\nu}\; e^{\nu}_{m} = \bar{e}^{\mu}_{b}\; e^{\nu}_{m}\; \gamma_{daf}\; e^{d}_{\mu}\; e^{f}_{\nu} \tag{1.21}$$

A P_0 $\bar{e}^{\mu}_{b} = e^{\mu}_{a}$ així

$$\frac{\partial}{\partial s_m} \cos\theta_{ab} = \gamma_{abm} \tag{1.22}$$

Així veiem que $\gamma_{abm} ds_m$ és igual (fora de termes d'ordre superior) a menys la diferència del cosinus de l'angle entre els vectors e^{μ}_{a} i e^{μ}_{b} a P_0 i el cosinus de l'angle del vector e^{μ}_{a} a P i el vector a P paral.lel a e^{μ}_{b} de P_0 (respecte de C_m).

Quan l'espai és euclidià, $\gamma_{abm} ds_m$ és la component en la direcció e^{μ}_{b} de la rotació del vector e^{μ}_{a} quan passem de P_0 a P.

Per això parlem en general de γ_{abm} com coeficients de rotació de la tètrade (Levi-Civitá, 1917).

Observem a més de (1.15) que:

$$e^{\mu}_{a}\; e_{a\lambda;\mu} = \gamma_{caa}\; e^{c}_{\lambda} \tag{1.23}$$

Resulta que el membre de la dreta és zero si i solament si les corbes e^{μ}_{a} de la congruència són geodèsiques, ja que llavors:

$$\frac{dx^{\mu}}{ds_a}\left(\frac{dx^{\lambda}}{ds_a}\right)_{;\mu}=0 \qquad (1.24)$$

1.3.- Derivada intrínseca

Podem escriure l'equació (1.15) com

$$e^{\mu}_{a}A_{\mu;\nu}e^{\nu}_{b}=A_{a/b}-\eta^{nm}\gamma_{nab}A_m \qquad (1.25)$$

La quantitat de la dreta s'anomena "derivada intrínseca" de A_a en la direcció b i s'escriu $A_{a/b}$. Aleshores:

$$A_{a/b}=A_{\mu;\nu}\, e^{\mu}_{a}\, e^{\nu}_{b} \qquad (1.26)$$

Es pot estendre la noció de derivada intrínseca. Si $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ és tensor de quart ordre:

$$R_{abcd/f}=R_{\mu\nu\rho\sigma;\lambda}e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b}e^{\rho}_{c}e^{\sigma}_{d}e^{\lambda}_{f} \qquad (1.27)$$

Desenvolupant:

$$R_{abcd/f}=[R_{\mu\nu\rho\sigma}e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b}e^{\rho}_{c}e^{\sigma}_{d}]_{;\lambda}\, e^{\lambda}_{f} \qquad (1.28)$$

Analogament a (1.25) trobem:

$$R_{abcd/f}=R_{abcd,f}-\eta^{nm}[\gamma_{naf}R_{mbcd}+\gamma_{nbf}R_{amcd}$$

$$+\gamma_{ncf}R_{abmd}+\gamma_{mdf}R_{abcm}] \qquad (1.29)$$

Observem també que l'evaluació dels coeficients de rotació <u>no</u> necessita del càlcul de derivades covariants (ni dels símbols de Christoffel).

Definint:

$$\lambda_{abc} = e_{b\mu,\nu}[e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{c} - e^{\nu}_{a}r^{\mu}_{c}] \tag{1.30}$$

I reescrivint-ho

$$\lambda_{abc} = [e_{b\mu,\nu} - e_{b\nu,\mu}]\, e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{c} \tag{1.31}$$

Podem canviar les derivades ordinàries per les covariants i escriure:

$$\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{cba} \tag{1.32}$$

I finalment:

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2}\,[\lambda_{abc} + \lambda_{cab} - \lambda_{bca}] \tag{1.33}$$

1.4.- Relacions de commutació i constants d'estructura

El commutador

$$[\vec{e}_a, \vec{e}_b] \tag{1.34}$$

juga un paper important, com veurem més endavant. Essent un vector tangent també, podem desenvolupar-lo en termes de la base $\vec{e}_a$:

$$[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = C^{c}_{ab}\, \vec{e}_c \tag{1.35}$$

on els coeficients C^{c}_{ab} s'anomenen constants d'estructura i poden expresar-se en termes dels coeficients de rotació:

$$[\vec{e}_a,\vec{e}_b]\,f = e_a^{\mu}[\,e_b^{\nu}f_{;\nu}]_{,\mu} - e_b^{\mu}[\,e_a^{\nu}f_{;\nu}]_{,\mu} =$$

$$= [\,e_a^{\mu}e_{b;\mu}^{\nu} - e_b^{\mu}e_{a;\mu}^{\nu}]\,f_{,\nu} =$$

$$= [\,-\gamma_{ba}^{\nu} + \gamma_{ab}^{\nu}]\,f_{,\nu} = \tag{1.36}$$

$$= [\,-\gamma_{ba}^{c} + \gamma_{ab}^{c}]\,e_c^{\nu}f_{,\nu}$$

Comparant amb (1.35)

$$C_{ab}^{c} = \gamma_{ba}^{c} - \gamma_{ab}^{c} \tag{1.37}$$

1.5.- Identitats de Ricci i de Bianchi

Projectant la identitat de Ricci (1.19) en una tètrade tenim

$$R_{abcd} = R_{\mu\nu\lambda\sigma}e_a^{\mu}e_b^{\nu}e_c^{\lambda}e_d^{\sigma} = \{-\,[\,\gamma_{afg}e_{\nu}^{f}e_{\lambda}^{g}]_{;\sigma}$$

$$+[\,\gamma_{afg}e_{\nu}^{f}e_{\sigma}^{g}]_{;\lambda}\}\times e_b^{\nu}e_c^{\lambda}e_d^{\sigma}$$

d'on

$$R_{abcd} = -\gamma_{abc,d} + \gamma_{abd,c} + \gamma_{abf}[\,\gamma_{cd}^{f} - \gamma_{dc}^{f}]$$

$$+\gamma_{afc}\gamma_{bd}^{f} - \gamma_{afd}\gamma_{bc}^{f} \tag{1.38}$$

Degut a l'antisimetria dels coeficients de rotació en els seus primers dos index i a l'antisimetria manifesta de l'operació amb la qual són construïdes les components en la tètrade del tensor de Riemann, hi ha 36 equacions contingudes a (1.38) .

La identitat de Bianchi és:

$$R_{\mu\nu[\rho\sigma;\lambda]} = 0 \tag{1.39}$$

i expressada en termes de les derivades intrínseques:

$$\begin{aligned} 0 = R_{ab[cd/f]} = \sum_{[cdf]}\{R_{abcd,f} - \eta^{nm}[\gamma_{naf}R_{mbcd} \\ + \gamma_{nbf}R_{amcd} + \gamma_{ncf}R_{abmd} + \gamma_{ndf}R_{abcm}] \end{aligned} \tag{1.40}$$

1.6.- <u>Les equacions de camp en el formulisme de tètrades</u>

Enumerem primer les variables de camp que s' usen en aquest formulisme: El primer conjunt de variables són les 16 components $e^{\mu}_{(a)}$ de la tètrade. El segon conjunt són els coeficients de rotació (que equivalen a 24 escalars reals) i el darrer conjunt de variables de camp són les components en la tètrade del tensor de Riemann, R_{abcd}, equivalents en el cas general a 20 escalars reals. De fet solament 10 d'aquests escalars (les components del tensor de Weyl) són estrictament variables de camp, els altres 10 escalars corresponen al tensor de Ricci i a l'escalar R que s'han de relacionar amb el tensor d'impulsió-energia $T_{\mu\nu}$ d'acord amb les equacions d'Einstein per al camp gravitatori:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}$$

En el cas del buit aquests 10 escalars són 0.

Les equacions de camp estan constituïdes per tres conjunts diferents. El primer conjunt és l'equació de definició dels coeficients de rotació (1.14)

$$\gamma_{cab} = e^{\mu}_{a}\, e_{a\mu;\nu}\, e^{\nu}_{b}$$

Cal assenyalar, tanmateix, que aquestes equacions simplement connecten les variables e_a^μ i γ_{abc} éssent equacions diferencials de primer ordre no lineals per a les e_a^μ . El segon conjunt d'equacions ve donat per (1.19).

$$e_{a\mu;\nu\lambda} - e_{a\mu;\lambda\nu} = e_{a\sigma} R^\sigma_{\mu\nu\lambda}$$

que és una equació que relaciona les variables R_{abcd}, γ_{abc} i e_a^μ mitjançant una equació diferencial de primer ordre per les γ_{abc}.

El darrer conjunt d'equacions de camp són les identitats de Bianchi en la seva versió projectada a la tètrade (1.40). Segons aquesta versió no es tracta simplement d'una identitat sinó d'una equació que connecta novament les variables R_{abcd} i e_a^μ mitjançant una equació diferencial de primer ordre en les variables R_{abcd}. Discutim en detall aquests tres conjunts d'equacions. La primera equació conté els simbols de Christoffel, ja que:

$$e_{a\mu;\nu} = e_{a\mu,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} e_{a\lambda}$$

Els símbols de Christoffel són lineals en les primeres derivades de $g_{\lambda\mu}$ i a causa de (1.7) lineals en les primeres derivades de $e_{a\lambda}$. Introduint els símbols de Christoffel a (1.14) trobem finalment una equació diferencial de primer ordre per a $e_{a\lambda}$. Equació que resulta llarga i poc elegant. Pot trobar-se una equació equivalent més simple. Tenint en compte les equacions (1.32) i (1.33) veiem que les quantitats γ_{abc} i λ_{abc} són equivalents: γ_{abc} defineix λ_{abc} segons (1.32) i λ_{abc} defineix γ_{abc} segons l'equació (1.33) així podem fer servir l'equació (1.31) en comptes de la (1.14). Si ara multipliquem l' equació (1.31) per $e^{b\rho}$ el resultat final és:

$$(\gamma_{abc} - \gamma_{cba}) e^{b\rho} = e^{\rho}_{c,\mu} \, e^{\mu}_{a} - e^{\rho}_{a,\mu} \, e^{\mu}_{c} \qquad (1.41)$$

aquesta equació és equivalent al primer conjunt d'equacions.

La segona equació de camp és l'equació (1.38). Si es considera com l'equació que defineix R_{abcd}, aquest té 36 components independents (reals) com ja s'ha dit abans. De fet aquesta equació es pot dividir en dues parts. La primera es formada per 20 equacions independents, cadascuna de les quals conté una de les 20 components independents R_{abcd}. La segona part serien 16 equacions contenint solament γ_{abc} i les seves primeres derivades. Pot veures que aquesta segona part correspon a l'equació que doná la condició que falta a R_{abcd}:

$$\frac{1}{2} R_{a\,[bcd]} \equiv \gamma_{a[ab/d]} + \gamma_{ae[d}\gamma^{e}_{bc]} + \gamma_{a[b/e}\gamma^{e}_{dc]} = 0 \qquad (1.42)$$

Així l'equació (1.38) equival al segon conjunt de les equacions. En el formulisme de tètrades nul.les -que veurem a continuació- en ser complexes les quantitats aquest segon conjunt d'equacions està constituït per 18 equacions.

La tercera equació és la identitat de Bianchi projectada en la tètrade (1.39). Aquesta equació pot dividir-se en dues, corresponents a la divisió del tensor de Riemann en el tensor de Weyl, i el tensor de Ricci sense traça $S_{\mu\nu}$ i l'escalar R. Si considerem el cas del buit, la segona part se satisfà identicament. Queda només l'equació (1.39) substituint R_{abcd} per C_{abcd}.

Hom pot preguntar-se si realment cal afegir les identitats de Bianchi a les equacions de camp. El problema ha estat estudiat per A. Papapetrou (1971 a,b) i es tracta d'estudiar les condicions d'integrabilitat de cadascun d'aquests tres conjunts d'equacions de camp.

Si considerem l'equació (1.31) com primer conjunt d'equacions de camp i la multipliquem per $e_d^\rho \frac{\partial}{\partial x\rho}$ trobem

$$\gamma_{abc/d}-\gamma_{abc/d} = (e_{a\mu,\nu\rho}-e_{a\nu;\mu\rho})e_b^\mu e_c^\nu e_d^\rho$$

$$+e_{a\mu,\nu}(e_b^\mu e_c^\nu - e_b^\nu e_c^\mu)_{,\rho} e_d^\rho$$

Veiem que de cara a eliminar les derivades segones de les components de la tètrade, només cal antisimetritzar respecte dels índexs b,c i d. Així la condició d'integrabilitat de la primera equació és

$$2\gamma_{a[bc/d]} = e_{a\mu,\nu}(e^\mu_{[b} e^\nu_c)_{,\rho} e^\rho_{d]} \qquad (1.43)$$

El membre de la dreta d'aquesta equació pot transformar-se en una suma de termes que són quadràtics en γ_{abc}. Si es fa aquesta transformació es trobarà que la condició d'integrabilitat (1.43) és idèntica a l'equació (1.42). Així concluïm que les condicions d'integrabilitat del primer conjunt d'equacions de camp s'han tingut en compte.

Considerem ara el segon conjunt d'equacions de camp (1.19). Multipliquem l'equació per $e_f^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma}$ trobem:

$$R_{abcd/f} = \gamma_{abc,\rho\sigma} e_d^\rho e_f^\sigma - \gamma_{abd,\rho\sigma} e_c^\rho e_f^\sigma + (\ldots)_{abcdf}$$

No hem escrit els termes bilineals en γ_{abc} i les seves derivades primeres. Per eliminar els termes que contenen derivades segones de γ_{abc} pendrem la part[cdf] de l'equació. Així la condició d'integrabilitat de (1.19) és:

$$R_{ab[cd/f]} = (\ldots)_{ab[cdf]} \tag{1.44}$$

Si es calcula la part de la dreta es veu que justament (1.44) (es dir, la condició d'integrabilitat de (1.19)) són les identitats de Bianchi projectades (1.40), veient finalment que cal tenir-les en compte com tercer conjunt d'equacions de camp.

Finalment assenyalar que el tercer conjunt (1.40) és una equació diferencial respecte les components R_{abcd} i per determinar les condicions d'integrabilitat apliquem l'operador $e_h^{\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}$ i prenem la part $[cdfh]$ de l'equació resultant, eliminant així les derivades segones de R_{abcd}, i també tots els altres termes que són de la forma $R_{..../h^{\gamma}...}$ o $R_{....\gamma.../h}$ i resulta que s'anul.len exactament degut a les equacions (1.19) i (1.40). Així la condició d'integrabilitat de (1.40) se satisfà automàticament: les equacions (1.41), (1.19) i (1.40) formen un conjunt complet i no s'han de considerar ni més ni menys equacions.

2. EL FORMULISME DE NEWMAN-PENROSE

2.1.- Base nul.la i coeficients de spin

El formulisme de Newman-Penrose (o de tètrades nul.les) difereix del formulisme habitual per tètrades solament en la manera com s'escullen els vectors de la base. Es trien vectors nuls complexos en lloc d'ortonormals. Són $(\vec{l},\vec{n},\vec{m},\vec{\bar{m}})$, on $\vec{l}$ i $\vec{n}$ són reals i $\vec{m}$ i $\vec{\bar{m}}$ una parella de vectors complexo-conjugats, tots nuls i satisfent la seguent relació d'ortogonalitat:

$$\vec{l}\vec{n}=-1 \quad \vec{m}\vec{\bar{m}}=1 \qquad \vec{l}\vec{m}=\vec{l}\vec{\bar{m}}=\vec{n}\vec{m}=\vec{n}\vec{\bar{m}}=0 \tag{1.45}$$

Hi ha diversos avantatges en aquesta formulació. Observarem que les variables de camp són escalars (llevat de les components dels vectors de la tètrade) i que les equacions són equacions diferencials de primer ordre i la meitat que si emprem tètrades ortonormals. A més algunes de les variables de camp tenen un significat físic directe com veurem més endavant.

La tètrade nul.la pot construirse a partir de l'ortonormal $(\vec{e}_t,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ on $\vec{e}_t$ es gènere temps $(\vec{e}_t^{\,2}=-1)$ i $\vec{e}_\alpha$ gènere espai $(\vec{e}_\alpha^{\,2}=1)$ així:

$$\vec{e}_1=\vec{l}=\frac{(\vec{e}_t+\vec{e}_z)}{\sqrt{2}} \qquad \vec{e}_2=\vec{n}=\frac{(\vec{e}_t-\vec{e}_z)}{\sqrt{2}}$$
$$\vec{e}_3=\vec{m}=\frac{(\vec{e}_x-i\vec{e}_y)}{\sqrt{2}} \qquad \vec{e}_4=\vec{\bar{m}}=\frac{(\vec{e}_x+i\vec{e}_y)}{\sqrt{2}} \tag{1.46}$$

D'aquesta manera:

$$\vec{e}_{(a)}=(\vec{l},\vec{n},\vec{m},\vec{\bar{m}}) \tag{1.47}$$

$$\eta_{ab} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \eta^{ab} \qquad (1.48)$$

i la base ve donada per:

$$\begin{aligned} -\vec{e}^{\,1} &= \vec{e}_2 = \vec{n} & \qquad -\vec{e}^{\,2} &= \vec{e}_1 = \vec{l} \\ \vec{e}^{\,3} &= \vec{e}_4 = \vec{\bar{m}} & \qquad \vec{e}^{\,4} &= \vec{e}_3 = \vec{m} \end{aligned} \qquad (1.49)$$

i els vectors de la base considerats com derivades direccionals són designats per símbols especials:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= -\vec{e}^{\,2} = D & \qquad \vec{e}_2 &= -\vec{e}^{\,1} = \Delta \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}^{\,4} = \delta & \qquad \vec{e}_4 &= \vec{e}^{\,3} = \delta^* \end{aligned} \qquad (1.50)$$

l'equació (1.7) ens diu ara

$$g_{\mu\nu} = -l_\mu n_\nu - n_\mu l_\nu + m_\mu \bar{m}_\nu + \bar{m}_\mu m_\nu \qquad (1.51)$$

Podem definir ara els anomenats coeficients de spin que són dotze combinacions lineals i complexes dels 24 coeficients de rotació.

$$\begin{aligned} \kappa &= -\gamma_{311} = -l_{\mu;\nu} m^\mu l^\nu & \qquad \nu &= \gamma_{422} = n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu n^\nu \\ \rho &= -\gamma_{314} = -l_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu & \qquad \mu &= \gamma_{423} = n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu \\ \sigma &= -\gamma_{313} = -l_{\mu;\nu} m^\mu m^\nu & \qquad \lambda &= \gamma_{424} = n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu \\ \tau &= -\gamma_{312} = -l_{\mu;\nu} m^\mu n^\nu & \qquad \pi &= \gamma_{421} = n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu l^\nu \end{aligned} \qquad (1.52)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma_{431}-\gamma_{211}) = \frac{1}{2}\ (m_{\mu;\nu}\bar{m}^{\mu}l^{\nu}-l_{\mu;\nu}n^{\mu}l^{\nu})$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_{121}-\gamma_{432}) = \frac{1}{2}\ (n_{\mu;\nu}l^{\mu}n^{\nu}-\bar{m}_{\mu;\nu}m^{\mu}n^{\nu})$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\gamma_{124}-\gamma_{344}) = \frac{1}{2}\ (n_{\mu;\nu}l^{\mu}\bar{m}^{\nu}-\bar{m}_{\mu;\nu}m^{\mu}\bar{m}^{\nu}) \qquad (1.53)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\gamma_{433}-\gamma_{213}) = \frac{1}{2}\ (m_{\mu;\nu}\bar{m}^{\mu}m^{\nu}-l_{\mu;\nu}n^{\mu}m^{\nu})$$

Observar que bescanviant els índex 3 i 4 s'obté el complex conjugat del coeficient respectiu.

2.2.- Representació dels tensors de Weyl i de Ricci

El tensor de Weyl s'obté com la part sense traça del tensor de Riemann i en components de la tétrade ve donat per:

$$C_{abcd} = R_{abcd} + \frac{1}{2}(-\eta_{ac}R_{db}+\eta_{ad}R_{cb}+\eta_{bc}R_{ad}+\eta_{bd}R_{ca}) - \frac{1}{6}(\eta_{ad}\eta_{cb}-\eta_{ac}\eta_{db}) \qquad (1.54)$$

(té 10 components independents)

On,

$$R_{ab} = R^{c}_{\ acb} \qquad i \qquad R = R^{a}_{\ a}$$

Com que C_{abcd} té traça nul.la (és nul.la la contracció respecte qualsevol parella d'index)

$$\eta^{ac}C_{abcd} = 0 = -C_{1b2d}-C_{2b1d}+C_{3b4c}+C_{4b3c}$$

i també (propietats del tensor de Riemann)

$$C_{1234} + C_{1423} + C_{1342} = 0$$

que porta a les seguents relacions (a part de trivials)

$$C_{3114}=C_{4113}=C_{3224}=C_{4223}=C_{1332}=C_{1442}=0$$

$$C_{1231}=C_{1334} \qquad C_{1241}=C_{1443} \qquad C_{1232}=C_{2343}$$

$$C_{1242}=C_{2434} \qquad\qquad C_{1212}=C_{3434} \tag{1.55}$$

$$C_{1342}=\frac{1}{2}(C_{1212}-C_{1234})=\frac{1}{2}(C_{3434}-C_{1234})$$

Així podem representar el tensor de Weyl pels cinc escalars complexos seguents:

$$\psi_0 = C_{1313} = C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu m^\nu l^\rho m^\sigma$$

$$\psi_1 = C_{1213} = C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu n^\nu l^\rho m^\sigma$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}(C_{1212}-C_{1234}) = \frac{1}{2} C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu m^\nu (l^\rho n^\sigma - m^\rho \bar{m}^\sigma) \tag{1.56}$$

$$\psi_3 = C_{2124} = C_{\mu\nu\rho\sigma} n^\mu l^\nu n^\rho \bar{m}^\sigma$$

$$\psi_4 = C_{2424} = C_{\mu\nu\rho\sigma} n^\mu \bar{m}^\nu n^\rho \bar{m}^\sigma$$

juntament amb aquests escalars definim els escalars que representen el tensor de Ricci:

$$\phi_{00} = \frac{1}{2} R_{11} \qquad \phi_{01} = \phi^*_{10} = \frac{1}{2} R_{13} = \frac{1}{2} R^*_{14}$$

$$\phi_{11} = \frac{1}{4}(R_{12}+R_{34}) \qquad \phi_{12} = \phi^*_{21} = \frac{1}{2} R_{23} = \frac{1}{2} R^*_{24} \tag{1.57}$$

$$\phi_{22} = \frac{1}{2} R_{22} \qquad \phi_{02} = \phi^*_{20} = \frac{1}{2} R_{33} = \frac{1}{2} R^*_{44}$$

i $$\Lambda = \frac{R}{24} = \frac{R_{34}-R_{12}}{12}$$

2.3.- Identitats de Ricci

Considerant les identitats de Ricci (1.38). Per exemple la component (1313)

$$R_{1313}=-\gamma_{131,3}+\gamma_{133,1}+\gamma_{13f}\left[\gamma_{13}^{(f)}-\gamma_{31}^{f}\right]$$

$$+\gamma_{1f1}\gamma_{33}^{f}-\gamma_{1f3}\gamma_{31}^{f}$$

com que:

$$\gamma_{13}^{f}=\eta^{fg}\gamma_{g13}=\eta^{f2}\gamma_{213}+\eta^{f3}\gamma_{313}+\eta^{f4}\gamma_{413}$$

$$\gamma_{31}^{f}=\eta^{f1}\gamma_{131}+\eta^{f2}\gamma_{231}+\eta^{f4}\gamma_{431}$$

$$\gamma_{33}^{f}=\eta^{f1}\gamma_{133}+\eta^{f2}\gamma_{233}+\eta^{f4}\gamma_{433}$$

$$R_{1313}=-\gamma_{131,3}+\gamma_{133,1}+\gamma_{131}[-\gamma_{213}+\gamma_{231}]+\gamma_{132}[+\gamma_{131}]$$

$$+\gamma_{133}[\gamma_{413}-\gamma_{431}]+\gamma_{134}[\gamma_{313}]-\gamma_{121}\gamma_{133}+\gamma_{131}\gamma_{433}$$

$$-\gamma_{133}\gamma_{431}+\gamma_{123}\gamma_{131}=-\gamma_{131,3}+\gamma_{133,1}+\gamma_{131}[-2\gamma_{213}$$

$$+\gamma_{132}+\gamma_{231}+\gamma_{433}]+\gamma_{133}[-\gamma_{121}+\gamma_{413}-2\gamma_{431}]+\gamma_{134}\gamma_{313}$$

D'on deduïm facilment:

$$\psi_0=D\sigma-\delta\kappa+\kappa(\tau+3\beta-\pi^*+\alpha^*)+\sigma(\varepsilon^*-3\varepsilon-\rho-\rho^*) \quad \text{o bé}$$

$$D\sigma-\delta\kappa=\sigma(3\varepsilon-\varepsilon^*+\rho+\rho^*)+\kappa(\pi^*-\tau-3\beta-\alpha^*)+\psi_0$$

És important veure que en el formulisme estándard hi ha 36 equacions. Ara solament cal escriure'n 18 que donem a continuació segons les doná Newman-Penrose

(1962), indicant la component (o components) de les quals provenen.

(1.58)

(a) $D\rho-\delta^{*}\kappa=(\rho^{2}+\sigma\sigma^{*})+\rho(\varepsilon+\varepsilon^{*})-\kappa^{*}\tau-\kappa(3\alpha+\beta^{*}-\pi)+\phi_{00}$ $[R_{1314}]$

(b) $D\sigma-\delta\kappa=\sigma(\rho+\rho^{*}+3\varepsilon-\varepsilon^{*})-\kappa(\tau-\pi^{*}+\alpha^{*}+3\beta)+\psi_{0}$ $[R_{1313}]$

(c) $D\tau-\Delta\kappa=\rho(\tau+\pi^{*})+\sigma(\tau^{*}+\pi)+\tau(\varepsilon-\varepsilon^{*})-\kappa(3\gamma+\gamma^{*})+\psi_{1}+\phi_{01}$ $[R_{1312}]$

(d) $D\alpha-\delta^{*}\varepsilon=\alpha(\rho+\varepsilon^{*}-2\varepsilon)+\beta\sigma^{*}-\beta^{*}\varepsilon-\kappa)-\kappa^{*}\gamma+\pi(\varepsilon+\rho)+\phi_{10}$ $[\frac{1}{2}(R_{3414}-R_{1214}]$

(e) $D\beta-\delta\varepsilon=\sigma(\alpha+\pi)+\beta(\rho^{*}-\varepsilon^{*})-\kappa(\mu+\gamma)-\varepsilon(\alpha^{*}-\pi^{*})+\psi_{1}$ $[\frac{1}{2}(R_{1213}-R_{3413}]$

(f) $D\gamma-\Delta\varepsilon=\alpha(\tau+\pi^{*})+\beta(\tau^{*}+\pi)-\gamma(\varepsilon+\varepsilon^{*})-\varepsilon(\gamma+\gamma^{*})+\tau\pi-\nu\kappa+\psi_{2}+\phi_{11}-\Lambda$ $[\frac{1}{2}(R_{1212}-R_{3412})]$

(g) $D\lambda-\delta^{*}\pi=(\rho\lambda+\sigma^{*}\mu)+\pi(\pi+\alpha-\beta^{*})-\nu\kappa^{*}-\lambda(3\varepsilon-\varepsilon^{*})+\phi_{20}$ $[R_{2441}]$

(h) $D\mu-\delta\pi=(\rho^{*}\mu+\sigma\lambda)+\pi(\pi^{*}-\alpha^{*}+\beta)-\mu(\varepsilon+\varepsilon^{*})-\nu\kappa+\psi_{2}+2\Lambda$ $[R_{2431}]$

(i) $D\nu-\Delta\pi=\mu(\pi+\tau^{*})+\lambda(\pi^{*}+\tau)+\pi(\gamma-\gamma^{*})-\nu(3\varepsilon+\varepsilon^{*})+\psi_{3}+\phi_{21}$ $[R_{2421}]$

(j) $\Delta\lambda-\delta^{*}\nu=-\lambda(\mu+\mu^{*}+3\gamma-\gamma^{*})+\nu(3\alpha+\beta^{*}+\pi-\tau^{*})-\psi_{4}$ $[R_{2442}]$

(k) $\delta\rho-\delta^{*}\sigma=\rho(\alpha^{*}+\beta)-\sigma(3\alpha-\beta^{*})+\tau(\rho-\rho^{*})+\kappa(\mu-\mu^{*})-\psi_{1}+\phi_{01}$ $[R_{2442}]$

(l) $\delta\alpha-\delta^{*}\beta=(\mu\rho-\lambda\sigma)+\alpha\alpha^{*}+\beta\beta^{*}-2\alpha\beta+\gamma(\rho-\rho^{*})+\varepsilon(\mu-\mu^{*})-\psi_{2}+\phi_{11}+\Lambda$ $[\frac{1}{2}(R_{1234}-R_{3434})]$

(m) $\delta\lambda-\delta^{*}\mu=\nu(\rho-\rho^{*})+\pi(\mu-\mu^{*})+\mu(\alpha+\beta^{*})+\lambda(\alpha^{*}-3\beta)-\psi_{3}+\phi_{21}$ $[R_{2443}]$

(n) $\delta\nu-\Delta\mu=(\mu^{2}+\lambda\lambda^{*})+\mu(\gamma+\gamma^{*})-\nu^{*}\pi+\nu(\tau-3\beta-\alpha^{*})+\phi_{22}$ $[R_{2423}]$

(o) $\delta\gamma-\Delta\beta=\gamma(\tau-\alpha^{*}-\beta)+\mu\tau-\sigma\nu-\varepsilon\nu^{*}-\beta(\gamma-\gamma^{*}-\mu)+\alpha\lambda^{*}+\phi_{12}$ $[\frac{1}{2}(R_{1232}-R_{3432})]$

(p) $\delta\tau-\nabla\sigma=(\mu\sigma+\lambda^*\rho)+\tau(\tau+\beta-\alpha^*)-\sigma(3\gamma-\gamma^*)-\kappa\nu^*+\phi_{02}$ [R_{1332}]

(q) $\Delta\rho-\delta^*\tau=-(\rho\mu^*+\sigma\lambda)+\tau(\beta^*-\alpha-\tau^*)+\rho(\gamma+\gamma^*)+\nu\kappa-\psi_2-2\Lambda$ [R_{1324}]

(r) $\Delta\alpha-\delta^*\gamma=\nu(\rho+\varepsilon)-\lambda(\tau+\beta)+\alpha(\gamma^*-\mu^*)+\gamma(\beta^*-\tau^*)-\psi_3$ [$\frac{1}{2}(R_{1242}-R_{3442})$]

2.4.- Identitats de Bianchi

D'una manera semblant podem escriure en funció dels coeficients de spin i de les derivades direccionals les identitats de Bianchi (1.39) emprant l'equació (1.40). El resultat és: (1.59)

$$\delta^*\psi_0-D\psi_1+D\phi_{01}-\delta\phi_{00}=(4\alpha-\pi)\psi_0-2(2\rho+\varepsilon)\psi_1+3\kappa\psi_2+(\pi^*-2\alpha^*-2\beta)\phi_{00}+2(\varepsilon+\rho^*)\phi_{01}+2\sigma\phi_{10}-2\kappa\phi_{11}-\kappa^*\phi_{02},$$

$$\Delta\psi_0-\delta\psi_1+D\phi_{02}-\delta\phi_{01}=(4\nu-\mu)\psi_0-2(2\tau+\beta)\psi_1+3\sigma\psi_2+(2\varepsilon-2\varepsilon^*+\rho^*)\phi_{02}+2(\pi^*-\beta)\phi_{01}+2\sigma\phi_{11}-2\kappa\phi_{12}-\lambda^*\phi_{00},$$

$$\delta^*\psi_3-\Delta\psi_4+\delta^*\phi_{21}-\Delta\phi_{20}=(4\varepsilon-\rho)\psi_4-2(2\pi+\alpha)\psi_3+3\lambda\psi_2+(2\nu-2\nu^*+\mu^*)\phi_{20}+2(\tau^*-\alpha)\phi_{21}+2\lambda\phi_{11}-2\nu\phi_{10}-\sigma^*\phi_{22},$$

$$\Delta\psi_3-\delta\psi_4+\delta^*\phi_{22}-\Delta\phi_{21}=(4\beta-\tau)\psi_4-2(2\mu+\nu)\psi_3+3\nu\psi_2+(\tau^*-2\beta^*-2\alpha)\phi_{22}+2(\nu+\mu^*)\phi_{21}+2\lambda\phi_{12}-2\nu\phi_{11}-\nu^*\phi_{20},$$

$$D\psi_2-\delta^*\psi_1+\Delta\phi_{00}-\delta^*\phi_{01}+\frac{1}{2}DR=-\lambda\psi_0+2(\pi-\alpha)\psi_1+3\rho\psi_2-2\kappa\psi_3+(2\nu+2\nu^*-\mu^*)\phi_{00}-2(\tau^*+\alpha)\phi_{01}-2\tau\phi_{10}+2\rho\phi_{11}+\sigma^*\phi_{02},$$

$$\Delta\psi_2-\delta\psi_3+D\phi_{22}-\delta\phi_{21}+\frac{1}{12}\Delta R=\sigma\psi_4+2(\beta-\tau)\psi_3-3\mu\psi_2+2\nu\psi_1+(\rho^*-2\varepsilon-2\varepsilon^*)\phi_{22}+2(\pi^*+\beta)\phi_{21}+2\pi\phi_{12}-2\mu\phi_{11}-\lambda^*\phi_{20},$$

$$D\psi_3-\delta^*\psi_2-D\phi_{21}+\delta\phi_{20}-\frac{1}{12}\,\delta^*R=-\kappa\psi_4+2(\rho-\varepsilon)\psi_3+3\pi\psi_2-2\lambda\psi_1+(2\alpha^*$$

$$-2\beta-\pi^*)\phi_{20}-2(\rho^*-\varepsilon)\phi_{21}-2\pi\phi_{11}+2\mu\phi_{10}+\kappa^*\phi_{22}\,,$$

$$\Delta\psi_1-\delta\psi_2-\Delta\phi_{01}+\delta^*\phi_{02}-\frac{1}{12}\,\delta R=\nu\psi_0+2(\nu-\mu)\psi_1-3\tau\psi_2+2\sigma\psi_3+(\tau^*$$

$$-2\beta^*+2\alpha)\phi_{02}+2(\mu^*-\nu)\phi_{01}+2\tau\phi_{11}-2\rho\phi_{12}-\nu^*\phi_{00}\,,$$

$$D\phi_{11}-\delta\phi_{10}-\delta^*\phi_{01}+\Delta\phi_{00}+\frac{1}{8}\,DR=(2\nu-\mu+2\nu^*-\mu^*)\phi_{00}+(\pi-2\alpha-2\tau^*)\phi_{01}$$

$$+(\pi^*-2\alpha^*-2\tau)\phi_{10}+2(\rho+\rho^*)\phi_{11}+\sigma^*\phi_{02}+\sigma\phi_{20}-\kappa^*\phi_{12}-\kappa\phi_{21}\,,$$

$$D\phi_{12}-\delta\phi_{11}-\delta^*\phi_{02}+\Delta\phi_{01}+\frac{1}{8}\,\delta R=(-2\alpha+2\beta^*+\pi-\tau^*)\phi_{02}+(\rho^*+2\rho-2\varepsilon^*)\phi_{12}$$

$$+2(\pi^*-\tau)\phi_{11}+(2\nu-2\mu^*-\mu)\phi_{01}+\nu^*\phi_{00}-\lambda^*\phi_{10}+\sigma\phi_{21}-\kappa\phi_{22}\,,$$

$$D\phi_{22}-\delta\phi_{21}-\delta^*\phi_{12}+\Delta\phi_{11}+\frac{1}{8}\,\Delta R=(\rho+\rho^*-2\varepsilon-2\varepsilon^*)\phi_{22}+(2\beta^*+2\pi-\tau^*)\phi_{12}$$

$$+2\beta+2\pi^*-\tau)\phi_{21}-2(\mu+\mu)\phi_{11}+\nu\phi_{01}+\nu^*\phi_{10}-\lambda^*\phi_{20}-\lambda\phi_{02}\,.$$

2.5.- Equacions de Maxwell

En el formulisme de Newman i Penrose el tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$ es substituït per tres escalars complexos.

$$\begin{aligned}\phi_0 &= F_{13} = F_{\mu\nu}l^\mu m^\nu\\ \phi_1 &= \frac{1}{2}(F_{12}+F_{43}) = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(l^\mu n^\nu+\bar{m}^\mu m^\nu)\\ \phi_2 &= F_{42} = F_{\mu\nu}\bar{m}^\mu n^\nu\end{aligned}\qquad(1.60)$$

i les equacions de Maxwell (expresades en termes de les derivades intrínseques)

$$F_{[ab/c]}=0 \qquad \text{i} \qquad \eta^{nm}F_{an/m}=0$$

es canvien per

$$\phi_{11}-\phi_{04}=0 \qquad\qquad \phi_{21}-\phi_{14}=0$$

$$\phi_{13}-\phi_{02}=0 \qquad\qquad \phi_{23}-\phi_{12}=0$$

d'on facilment trobem la forma explícita:

$$
\begin{aligned}
&D\phi_1-\delta^*\phi_0=(\pi-2\alpha)\phi_0+2\rho\phi_1-\kappa\phi_2\\
&D\phi_2-\delta^*\phi_1=-\lambda\phi_0+2\pi\phi_1+(\rho-2\varepsilon)\phi_2\\
&\delta\phi_1-\Delta\phi_0=(\mu-2\gamma)\phi_0+2\tau\phi_1-\sigma\phi_2\\
&\delta\phi_2-\Delta\phi_1=-\nu\phi_0+2\mu\phi_1+(\tau-2\beta)\phi_2
\end{aligned}
\qquad (1.61)
$$

2.6.- Transformacions de les tètrades

Situada una tètrade a cada punt de l'espai-temps podem fer-li unes transformacions de Lorentz. Corresponents als sis paràmetres de les transformacions de Lorentz tenim sis graus de llibertat per passar d'una tètrade a una altra. Podem dividir una transformació de Lorentz en tres rotacions:

(a) Classe I. Rotacions que deixen $\vec{l}$ invariant.

(b) Classe II. Rotacions que deixen $\vec{n}$ invariant.

(c) Classe III. Rotacions que deixen sense canviar les direccions de $\vec{l}$ i $\vec{n}$ però giren $\vec{m}$ (i $\vec{\bar{m}}$) amb un angle θ al pla ($m\bar{m}$).

Explicitament,

$$
\text{I.} \qquad \vec{l}\to\vec{l} \qquad \vec{m}\to\vec{m}+a\vec{l} \qquad \vec{\bar{m}}\to\vec{\bar{m}}+a^*\vec{l}
$$
$$
\vec{n}\to\vec{n}+a^*\vec{m}+a\vec{\bar{m}}+aa^*\vec{l} \qquad (1.62)
$$

$$\text{II.}\qquad \vec{n}\rightarrow\vec{n} \qquad \vec{m}\rightarrow\vec{m}+b\vec{n} \qquad \vec{\bar{m}}\rightarrow\vec{\bar{m}}+b^*\vec{n}$$

$$\vec{l}\rightarrow\vec{l}+b^*\vec{m}+b\vec{\bar{m}}+bb^*\vec{n} \tag{1.63}$$

$$\text{III.}\qquad \vec{l}\rightarrow A^{-1}\vec{l} \qquad \vec{n}\rightarrow A\vec{n}$$

$$\vec{m}\rightarrow e^{i\theta}\vec{m} \qquad \vec{\bar{m}}\rightarrow e^{-i\theta}\vec{\bar{m}} \tag{1.64}$$

On a i b sốn funcions complexes i A i θ funcions reals. L'efecte d'una rotació de classe I sobre les diferents quantitats de Nwman-Penrose és fàcil de trobar. Per exemple considerant l'escalar de Weyl ψ_1

$$\psi_1 = C_{1234} + C_{\mu\nu\rho\sigma} l^{\mu}(n^{\nu}+a^*m^{\nu}+a\bar{m}^{\nu}+aa^*l^{\nu})\, l^{\rho} \times (m^{\sigma}+al^{\sigma}) =$$

$$= C_{\mu\nu\rho\sigma} l^{\mu}(n^{\nu}+a^{\nu}m^{\nu})\, l^{\rho}m^{\sigma} = C_{1213} + a^*C_{1313} = \psi_1 + a^*\psi_0$$

On hem fet servir simetries obvies del tensor de Weyl i que $C_{1413}=0$ (1.49). Analogament podem trobar els altres escalars de Weyl.

$$\psi_0\rightarrow\psi_0, \quad \psi_1\rightarrow\psi_1+a^*\psi_0, \quad \psi_2\rightarrow\psi_2+2a^*\psi_1+(a^*)^2\psi_0,$$

$$\psi_3\rightarrow\psi_3+3a^*\psi_2+3(a^*)^2\psi_1+(a^*)^3\psi_0, \tag{1.65,a}$$

$$\psi_4\rightarrow\psi_4+4a^*\psi_3+6(a^*)^2\psi_2+4(a^*)^3\psi_1+(a^*)^4\psi_0.$$

De manera similar els coeficients de spin es transformen:

$$\kappa\rightarrow\kappa; \quad \sigma\rightarrow\sigma+a\kappa; \quad \rho\rightarrow\rho+a^*\kappa; \quad \varepsilon\rightarrow\varepsilon+a^*\kappa;$$

$$\tau\rightarrow\tau+a\rho+a^*\sigma+aa^*\kappa; \quad \pi\rightarrow\pi+2a^*\varepsilon+(a^*)^2\kappa+Da^*; \tag{1.65,b}$$

$$\alpha\to\alpha+a^*(\rho+\varepsilon)+(a^*)^2\kappa;\quad \beta\to\beta+a\varepsilon+a^*\sigma+aa^*\kappa;$$

$$\gamma\to\gamma+a\alpha+a^*(\beta+\tau)+aa^*(\rho+\varepsilon)+(a^*)^2\sigma+a(a^*)^2\kappa;$$

$$\lambda\to\lambda+a^*(2\alpha+\pi)+(a^*)^2(\rho+2\varepsilon)+(a^*)^3\kappa+\delta^*a^*+a^*Da^*;$$

$$\mu\to\mu+a\pi+2a^*\beta+2aa^*\varepsilon+(a^*)^2\sigma+a(a^*)^2\kappa+\delta a^*+aDa^*,$$

$$\nu\to\nu+a\lambda+a^*(\mu+2\gamma)+(a^*)^2(\tau+2\beta)+(a^*)^3\sigma+aa^*(\pi+2\alpha)$$

$$+a(a^*)^2(\rho+2\varepsilon)+a(a^*)^3\kappa+(\Delta+a^*\delta+a\delta^*+aa^*D)a.$$

I els escalars que representen el camp de Maxwell esdevenen:

$$\phi_0\to\phi_0,\quad \phi_1\to\phi_1+a^*\phi_0,\quad \phi_2\to\phi_2+2a^*\phi_1+(a^*)^2\phi_0. \qquad (1.65,c)$$

Els efectes corresponents a una rotació de classe II ~~es~~ poden veure facilment dels resultats anteriors ja que bescanviar $\vec{l}$ amb $\vec{n}$ comporta:

$$\psi_0\rightleftarrows\psi_4^*,\quad \psi_1\rightleftarrows\psi_3^*,\quad \psi_2\rightleftarrows\psi_2^*,\quad \phi_0\rightleftarrows-\phi_2^*,\quad \phi_1\rightleftarrows-\phi_1^*,$$

$$\kappa\rightleftarrows-\nu^*,\quad \rho\rightleftarrows-\mu^*,\quad \sigma\rightleftarrows-\lambda^*,\quad \alpha\rightleftarrows-\beta^*,\quad \varepsilon\rightleftarrows-\gamma^*, \qquad (1.66)$$

$$\text{i}\qquad \pi\rightleftarrows-\tau^*.$$

Finalment els efectes d'una rotació de classe III són els següents:

$$\psi_0\to A^{-2}e^{2i\theta}\psi_0;\quad \psi_1\to A^{-1}e^{i\theta}\psi_1,\quad \psi_2\to\psi_2$$

$$\psi_3\to Ae^{-i\theta}\psi_3,\quad \text{i}\quad \psi_4\to A^2e^{-2i\theta}\psi_4;$$

$$\phi_0 \to A^{-1} e^{i\theta}\phi_0, \quad \phi_1 \to \phi_1, \quad \phi_2 \to A e^{-i\theta}\phi_2;$$

$$\kappa \to A^{-2} e^{i\theta}\kappa, \quad \sigma \to A^{-1} e^{2i\theta}\sigma, \quad \rho \to A^{-1}\rho, \quad \tau \to e^{i\theta}\tau,$$

$$\pi \to e^{-i\theta}\pi, \quad \lambda \to A e^{-2i\theta}\lambda, \quad \mu \to A\mu, \quad \nu \to A^2 e^{-i\theta}\nu, \tag{1.67}$$

$$\gamma \to A\gamma - \frac{1}{2}\Delta A + \frac{1}{2} i A \Delta\theta,$$

$$\varepsilon \to A^{-1}\varepsilon - \frac{1}{2}A^{-2} DA + \frac{1}{2} i A^{-1} D\theta,$$

$$\alpha \to e^{-i\theta}\alpha + \frac{1}{2} i e^{-i\theta}\delta^*\theta - \frac{1}{2}A^{-1} e^{-i\theta}\delta^* A,$$

$$\beta \to e^{i\theta}\beta + \frac{1}{2} i e^{i\theta}\delta\theta - \frac{1}{2}A^{-1} e^{i\theta}\delta A.$$

2.7.- Consideracions geomètriques

Així com en el cas d'una formulació per tètrads ortonormals els coeficients de rotació γ_{abc} tenien un sentit geomètric clar, en el cas de tètrades nul.les el sentit geomètric és més complicat però pot veure's així. Considerem la congruència de vectors nul l_μ aleshores:

$$l_{\mu;\nu} = -e^a_\mu \, \gamma_{a1b} \, e^b_\nu$$

desenrollant aquesta equació, tenint en compte els símbols que representen els coeficients de spin

$$\begin{aligned} l_{\mu;\nu} = {} & (\varepsilon+\varepsilon^*) l_\mu n_\nu + (\gamma+\gamma^*) l_\mu l_\nu \\ & - (\alpha^*+\beta) l_\mu \bar{m}_\nu - (\alpha+\beta^*) l_\mu m_\nu \\ & - \kappa \bar{m}_\mu n_\nu - \kappa^* m_\mu n_\nu + \sigma \bar{m}_\mu \bar{m}_\nu + \sigma^* m_\mu m_\nu \\ & - \tau \bar{m}_\mu l_\nu - \tau^* m_\mu l_\nu + \rho \bar{m}_\mu m_\nu + \rho^* m_\mu \bar{m}_\nu \end{aligned} \tag{1.68,a}$$

D'on trobem

$$l_{\mu;\nu}l^{\nu} = (\varepsilon+\varepsilon^*)l_\mu - \kappa\bar{m}_\mu - \kappa^* m_\mu$$

Així si $\kappa = 0$ els vectors $\vec{l}$ formaran una congruència de geodèsiques nul.les, que a més estaran parametritzades amb un paràmetre afí si per una rotació de classe III anul.lem ε . Llavors $\kappa = \varepsilon = 0$ i (1.68,b) esdevé:

$$\begin{aligned} l_{\mu;\nu} = {} & (\gamma+\gamma^*)l_\mu l_\nu - (\alpha^*+\beta)l_\mu m_\nu - (\alpha+\beta^*)l_\mu m_\nu \\ & -\tau\bar{m}_\mu l_\nu + \sigma\bar{m}_\mu\bar{m}_\nu + \sigma^* m_\mu m_\nu + \rho\bar{m}_\mu m_\nu \\ & + \rho^* m_\mu \bar{m}_\nu - \tau^* m_\mu l_\nu \, . \end{aligned} \tag{1.68,b}$$

D'aquesta darrera equació trobem

$$\begin{aligned} l_{[\mu;\nu]} = {} & -(\alpha^*+\beta-\tau)l_{[\mu}\bar{m}_{\nu]} - (\alpha+\beta^*-\tau^*)l_{[\mu}m_{\nu]} \\ & +(\rho-\rho^*)\bar{m}_{[\mu}m_{\nu]} \end{aligned}$$

i

$$l_{[\mu;\nu}l_{\lambda]} = (\rho-\rho^*)\bar{m}_{[\mu}m_\nu l_{\lambda]}$$

La congruència de les $\vec{l}$ serà ortogonal a una hipersuperfície (és dir, proporcional a un gradient) si ρ és real i serà a més un camp gradient si $\alpha^*+\beta = \tau$. També de (1.68) veiem

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}l^{\mu}{}_{;\mu} &= -(\rho+\rho^*) = \theta^2 \\ l_{[\mu;\nu]}l^{\mu;\nu} &= -\tfrac{1}{2}(\rho-\rho^*) = \omega^2 \\ l_{(\mu;\nu)}l^{\mu;\nu} &= 2(\theta^2+|\sigma|^2) \end{aligned} \tag{1.69}$$

Les quantitats θ,ω i σ que s'han definit s'anomenen "escalars òptics" i descriuen l'expansió, rotació i distorsió, respectivament, de la congruència.

2.8-Classificació de Bel-Petrov

La classificació de Bel-Petrov ve determinada pel tipus del tensor de Weyl. En el cas d'usar el formulisme de tètrades nul.les, la classificació dependrà de condicions sobre els escalars ψ_a com veiem a continuació.

Sigui $\psi_4 \neq 0$ (sempre es pot aconseguir fent una rotació de classe I, a no ser que el tensor de Weyl sigui identicament nul). Considerem una rotació de classe II amb paràmetre b. Per anul.lar ψ_0 cal que b sigui una arrel de l'equació.

$$\psi_0 + 4b\psi_1 + 6b^2\psi_2 + 4b^3\psi_3 + b^4\psi_4 = 0 \qquad (1.70)$$

Aquesta equació té quatre arrels i les corresponents noves direccions de $\vec{l}$, és dir, $\vec{l}+b^*\vec{m}+b\bar{m}+bb^*\vec{n}$ s'anomenen "direccions principals nul.les" del camp. Si algunes de les arrels coincideixen el camp s'anomena "algebraicament especial". El número i multiplicitat de les arrels de (1.70) ens dóna la classificació de Bel-Petrov del tensor de Weyl:

Tipus I: Quan (1,70) admet quatre arrels diferents b_1, b_2, b_3, b_4. Escollint-ne una podem anul.lar ψ_0 i fent després una rotació de classe I, podem anul.lar també ψ_4 (sense afectar ψ_0). Les rotacions de classe III que ens queden admissibles deixen invariants ψ_1, ψ_2 i ψ_3.

Tipus II: Quan (1.70) admet una arrel doble i les altres són senzilles, $b_1=b_2, b_3, b_4$. En aquestes circumstàncies considerem a més la derivada de (1.70)

$$\psi_1 + 3b\psi_2 + 3b^2\psi_3 + b^3\psi_4 = 0$$

Ara fent una rotació de classe II amb paràmetre $b=b_1(=b_2)$ ψ_0 i ψ_1 s'anul.laran simultaniament. Per una rotació de classe I anul.lem ψ_4 i solament ψ_2 i ψ_3 seran no nul.les resultant invariant per les rotacions de classe III solament ψ_2 .

Tipus D: Quan (1.70) admet dues arrels dobles, $b_1=b_2$, $b_3=b_4$. Per una rotació de classe II amb paràmetre $b=b_1(=b_2)$ anul.lem ψ_0 i ψ_1 simultaniament, i per una rotació de classe I, anul.lem ψ_4 i ψ_3 . ψ_2 resultarà ser l'únic escalar no nul, invariant per rotacions de classe III.

Tipus III: Quan (1.70) admet una arrel triple i una altra simple, $b_1=b_2=b_3\neq b_4$. Amb l'arrel triple i degut a la forma del canvi que fa una rotació de classe II si anul.lo ψ_0, també anul.laré ψ_1 i ψ_2 i amb les rotacions de classe I puc anul.lar ψ_4. Quedarà només ψ_3 arbitrari.

Tipus N: Quan (1.70) admet una sola arrel de multiplicitat quatre., $b_1=b_2=b_3=b_4\neq 0$. En aquest cas anul.lant ψ_0 també anul.lem ψ_1, ψ_2 i ψ_3 restant ψ_4 que no es pot anul.lar per les altres rotacions.

Tipus 0: Correspon al cas en que el tensor de Weyl és identicament nul. Al buit, això vol dir que l'espai-temps és pla, però no és així si el tensor de Ricci no és nul.

2.9 - Algorisme de d'Inverno i Russell-Clark

Una manera directa de determinar el tipus de Bel-Petrov d'una solució ve donada per l'algorisme de d'Inverno i Russell-Clark que presentem a continuació (d'Inverno, Russell-Clark, 1971)

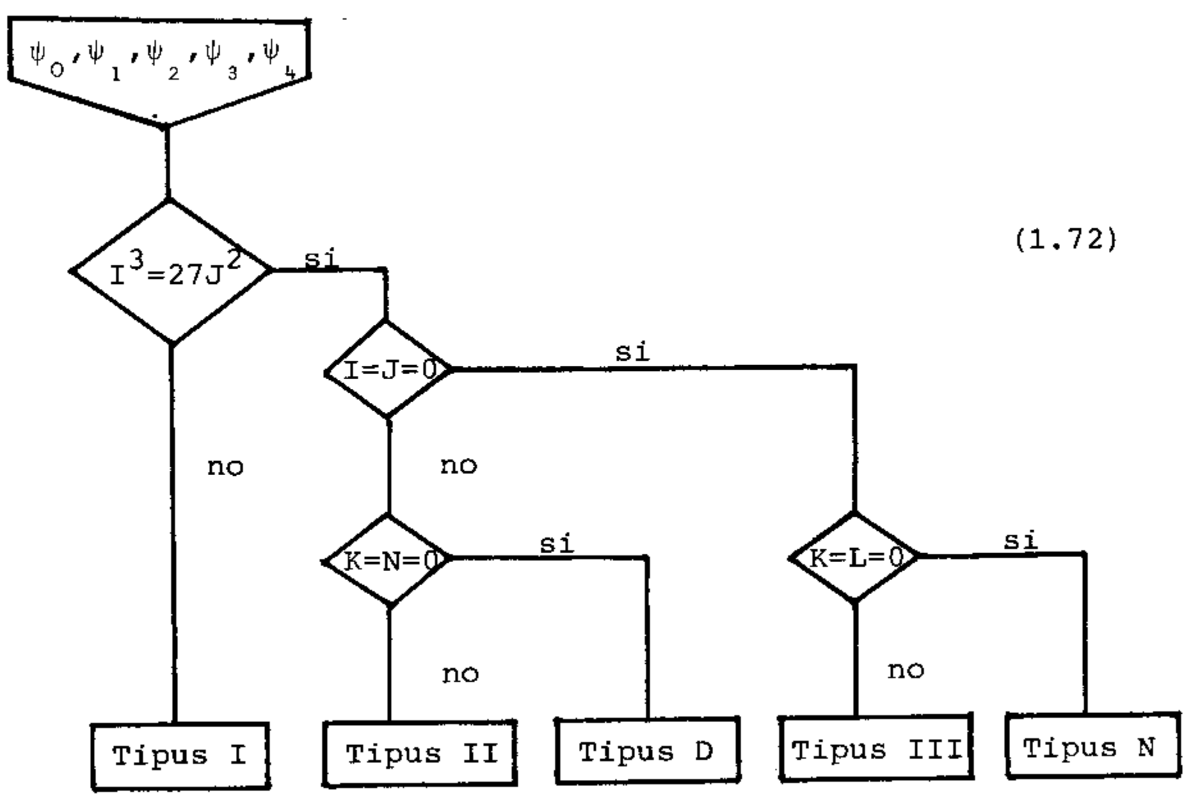
Suposant $\psi_4 \neq 0$ (Si $\psi_4 = 0$ però $\psi_0 \neq 0$ en el què segueix només cal bescanviar $\psi_0 \rightleftarrows \psi_4$ i $\psi_1 \rightleftarrows \psi_3$; Si $\psi_0 = \psi_4 = 0$ la multiplicitat de les arrels de (1.70) és molt simple de trobar) fem les següents definicions:

$$I = \psi_0\psi_4 - 4\psi_1\psi_3 + 3\,\psi_2^2 \qquad J = \begin{bmatrix} \psi_4 & \psi_3 & \psi_2 \\ \psi_3 & \psi_2 & \psi_1 \\ \psi_2 & \psi_1 & \psi_0 \end{bmatrix}$$

$$K = \psi_1\,\psi_4^2 - 3\,\psi_4\psi_3\psi_2 + 2\,\psi_3^3 \qquad L = \psi_2\psi_4 - \psi_3^2 \tag{1.71}$$

$$N = 12\,L^2 - \psi_4^2\,I$$

El diagrama que ens dóna el tipus de Bel-Petrov és.



(1.72)

II. MÈTRIQUES INTERIORS OBTINGUDES PER VARIACIO DE PARÀMETRES EN LA MÈTRICA DE KERR

La variació en les coordenades de les constants d'una solució permet l'obtenció de noves mètriques que poden descriure situacions molt diferents a l'original. D'aquesta manera, per exemple, variant en la coordenada temporal les constants de les mètriques d'Schwarzchild i de Kerr s'han obtingut generalitzacions no estacionàries d'elles (Vaidya 1943-51-53, Carmeli 1977, Gonzalez et al. 1979) de cara a trobar solucions amb radiació.

Enfocant el mètode vers la producció de solucions interiors que empalmin amb Kerr, l'estudi general comportaria la variació de les dues constants m i a en totes les coordenades, aleshores una superficie bona per empalmar amb la solució del buit seria aquella en que les derivades primeres d'aquestes funcions fossin nul.les (Lichnerovicz 1954, Roos 1976-77, Bonnor 1981). Fent-ho així el problema és intractable; cal, per tant, limitar la forma de les funcions i per a això tenim dues possibilitats:

- Prendre una forma simple de dependència i veure quins tensors impulsió-energia surten interpretant-los.
- No limitar a priori aquestes funcions i imposar després el tensor que correspon a una certa font o bé imposar certes condicions a la superficie d'empalmament.

En aquest estudi ens centrem en el primer mètode i veiem que de l'anàlisi de les solucions trobades variant m en r i θ, i a en r i θ (en determinades formes), hi ha dos casos especialment interessants, un correspon a la presència d'un camp electromagnètic no nul que en general pot incloure un fluid no perfecte i en el cas simple m(r) porta a la mètrica de Kerr-Newman, i un segon cas que correspon a radiació pura (Comellas i Mas, 1980).

1.- La mètrica de Kerr en coordenades nul.les

Normalment la mètrica de Kerr sol presentar-se en coordenades de Boyer-Lindquist (1.967).

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2mr}{\Sigma}\right)dt^2 - 2\left(\frac{2mr}{\Sigma}\right)a\sin^2\theta dt d\theta + \frac{\Sigma}{T}dr^2 + d\theta^2$$

$$+\left(\Omega + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta d\phi^2 \qquad (2.1)$$

amb

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta \qquad \Omega = T + 2mr = r^2 + a^2$$

Es útil de cara a emprar el formulisme nul, escriure la mètrica de Kerr en el sistema de coordenades nul.les avançades que s'obté amb el canvi.

$$dt = du + \frac{\Omega}{T}dr$$

$$d\phi = d\psi + \frac{a}{T}dr$$

Fent-lo trobem:

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1-\frac{2mr}{\Sigma}\right)du^2 - dudr + 2a\sin^2\theta dr d\psi + \Sigma d\theta^2 \\ &- 2\left(\frac{2mr}{\Sigma}\right)a\sin^2\theta du d\psi + \left(\Omega + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta d\psi^2 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

així

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1-\frac{2mr}{\Sigma}\right) & -1 & 0 & -\frac{2mra\sin^2\theta}{\Sigma} \\ -1 & 0 & 0 & a\sin^2\theta \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ -\frac{2mra\sin^2\theta}{\Sigma} & a\sin^2\theta & 0 & \sin^2\theta\left(\Omega + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right) \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{a^2\sin^2\theta}{\Sigma} & -\frac{\Omega}{\Sigma} & 0 & \frac{a}{\Sigma} \\ -\frac{\Omega}{\Sigma} & \frac{T}{\Sigma} & 0 & -\frac{a}{\Sigma} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma} & 0 \\ \frac{a}{\Sigma} & -\frac{a}{\Sigma} & 0 & \frac{1}{\Sigma\sin^2\theta} \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

2.- Tètrade nul.la per a la mètrica de Kerr

Escollim la tètrade nul.la següent

$$\begin{aligned} l_\mu &= (1,0,0,-a\sin^2\theta) \\ n_\mu &= \frac{1}{\Sigma}\left(\frac{T}{2},\Sigma,0,-\frac{a^2\sin^2\theta}{2}\right) \qquad (2.5) \\ m_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r+ia\cos\theta)}(ia\sin\theta,0,-\Sigma,-i\Omega\sin\theta) \end{aligned}$$

la corresponent tètrade contravariant és:

$$\begin{aligned} l^\mu &= (0,-1,0,0) \\ n^\mu &= \frac{1}{\Sigma}\left(-\Omega,\frac{T}{2},0,-a\right) \qquad (2.6) \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r+ia\cos\theta)}\left(-ia\sin\theta,0,-1,-\frac{i}{\sin\theta}\right) \end{aligned}$$

Per calcular els coeficients de spin (1.52) usarem l'equació (1.33)

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2}\,[\lambda_{abc} + \lambda_{cab} - \lambda_{bca}]$$

i de la (1.30)

$$\lambda_{abc} = e_{b\mu,\nu}\left[e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{c} - e^{\nu}_{a}e^{\mu}_{c}\right]$$

tenint en compte a més les propietats de les λ

$$\lambda_{abc} = -\lambda_{cba} \; ; \quad \lambda_{34a} = \lambda^*_{43a} \qquad (a = 1,2)$$

els coeficients de spin poden escriure's en funció de les λ així:

$$\kappa = \lambda_{113} \qquad \sigma = \lambda_{133} \qquad \lambda = \lambda^*_{332} \qquad \nu = \lambda^*_{322}$$

$$\begin{aligned}
\rho &= \tfrac{1}{2}(\lambda_{143} - \lambda_{431} - \lambda_{314}) \\
\mu &= \tfrac{1}{2}(\lambda_{432} - \lambda_{243} - \lambda_{324}) \\
\tau &= \tfrac{1}{2}(\lambda_{123} - \lambda_{312} - \lambda_{231}) \\
\pi &= \tfrac{1}{2}(\lambda^*_{312} - \lambda^*_{123} - \lambda^*_{231}) \\
\epsilon &= \tfrac{1}{2}\lambda_{112} + \tfrac{1}{4}(\lambda_{143} + \lambda_{431} - \lambda_{314}) \\
\gamma &= \tfrac{1}{2}\lambda_{122} + \tfrac{1}{4}(\lambda_{243} + \lambda_{432} - \lambda_{324}) \\
\alpha &= \tfrac{1}{2}\lambda_{443} + \tfrac{1}{4}(\lambda^*_{312} + \lambda^*_{123} - \lambda^*_{231}) \\
\beta &= \tfrac{1}{2}\lambda_{344} + \tfrac{1}{4}(\lambda_{312} + \lambda_{123} - \lambda_{231})
\end{aligned} \qquad (2.7)$$

3.- Cas $m(r,\theta)$, a=constant

Suposarem que un dels paràmetres de la mètrica de Kerr -m- depèn de les coordenades r i θ i l'altre -a- és constant.

Trobem els valors dels λ que resulten ser (*). (El punt indica derivada respecte de t i l'apòstrof, respecte de r).

$$\begin{aligned}
&\lambda_{311} = 0 = \lambda_{211} = \lambda_{123} = \lambda_{331} = \lambda_{233} \\
&\lambda_{314} = -i\,\frac{2a\cos\theta}{\Sigma} \\
&\lambda_{223} = -\frac{m'r}{\sqrt{2}\,\Sigma\,(r+ia\cos\theta)} \\
&\lambda_{122} = \frac{rT}{\Sigma^2} - \frac{(r-m-\dot{m}r)}{\Sigma} \\
&\lambda_{432} = \frac{rT}{\Sigma^2} - \frac{T}{2\Sigma(r+ia\cos\theta)} \\
&\lambda_{344} = -\frac{\cot\theta}{\sqrt{2}(r-ia\cos\theta)} + i\,\frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}(r-ia\cos\theta)^2} \\
&\lambda_{312} = \frac{\sqrt{2}a^2\sin\theta\cos\theta}{\Sigma(r+ia\cos\theta)} \\
&\lambda_{324} = -i\,\frac{aT\cos\theta}{\Sigma^2} \\
&\lambda_{431} = -\frac{1}{(r-ia\cos\theta)} \\
&\lambda_{231} = -i\,\frac{\sqrt{2}ar\sin\theta}{\Sigma(r+ia\cos\theta)}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

i els coeficients de spin són:

$$\begin{aligned}
&\kappa = \sigma = \lambda = \varepsilon = 0 \\
&\nu = \frac{m'r}{\sqrt{2}\,(r-ia\cos\theta)} \qquad && \pi = -\frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}(r-ia\cos\theta)^2} \\
&\rho = \frac{1}{(r-ia\cos\theta)} && \beta = -\frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}(r+ia\cos\theta)} \\
&\mu = \frac{T}{2\Sigma(r-ia\cos\theta)} && \gamma = \mu - \frac{(r-m-\dot{m}r)}{2\Sigma} \\
&\tau = \frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}\Sigma} && \alpha = \pi - \beta^*
\end{aligned} \tag{2.9}$$

---

* Veure l'annex.

Amb aquests resultats i resolent les equacions de Newman-Penrose trobem les components dels tensors de Weyl (1.56), els escalars ϕ lligats al tensor de Ricci i l'escalar de curvatura (1.57)

$$\psi_0 = \psi_1 = 0$$

$$\psi_2 = -m\rho^3 - \frac{(2\dot{m} + \ddot{m}r)}{6}\rho\rho^* + mr\rho^2\rho^*$$

$$\psi_3 = \frac{2rm'}{\sqrt{2}}\rho^3\rho^* \quad \frac{(m'+\dot{m}'r)}{2\sqrt{2}}\rho^2\rho^*$$

$$\psi_4 = \frac{r(m'\cot\theta - m'')}{2}\rho^3\rho^* - iar\sin\theta m'\rho^4\rho^*$$

$$\phi_{00} = \phi_{01} = \phi_{02} = 0 \tag{2.10}$$

$$\phi_{12} = \frac{rm'}{\sqrt{2}}\dot{\rho}^2\rho^{*2} - \frac{(m'+\dot{m}'r)}{2\sqrt{2}}\rho\rho^{*2}$$

$$\phi_{11} = \dot{m}r^2\rho^2\rho^{*2} - \frac{(2\dot{m}+\ddot{m}r)}{4}\rho\rho^*$$

$$\phi_{22} = -\frac{r(m''+m'\cos\theta)}{2}\rho^2\rho^{*2}$$

$$\Lambda = \frac{(2\dot{m}+\ddot{m}r)}{12}\rho\rho^*$$

Podem escriure, a partir de les ϕ, les components del tensor de Ricci (1.57), éssent:

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{11} - 3\Lambda & 0 & 0 \\ \phi_{11} - 3\Lambda & \phi_{22} & \phi_{12} & \phi^*_{12} \\ 0 & \phi_{12} & 0 & \phi_{11} + 3\Lambda \\ 0 & \phi^*_{12} & \phi_{11} + 3\Lambda & 0 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Estudiant ara el tipus algebraic del tensor de Ricci podem veure quins casos d'interès físic conté i analitzar-los (Kramer et al., 1980; §5.1).

$$R^a{}_b = \eta^{ac}R_{cb} = 2\begin{bmatrix} -\phi_{11}+3\Lambda & -\phi_{22} & -\phi_{12} & -\phi_{12}^* \\ 0 & -\phi_{11}+3\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{12}^* & \phi_{11}+3\Lambda & 0 \\ 0 & \phi_{12} & 0 & \phi_{11}+3\Lambda \end{bmatrix} \qquad (2.12)$$

i de l'equació de valors propis:

$$16\left(\phi_{11}-3\Lambda+\frac{\lambda}{2}\right)^2\left(\phi_{11}+3\Lambda-\frac{\lambda}{2}\right)^2 = 0 \qquad (2.13)$$

trobem els següents valors propis

$$\lambda_1 = -2(\phi_{11}-3\Lambda)$$
$$\lambda_2 = 2(\phi_{11}+3\Lambda) \qquad (2.14)$$

éssent ambdós dobles.

Per poder fer la classificació necessitem trobar els vectors propis que corresponen a cada valor propi i veure'n el tipus.

** $\phi_{11} \neq 0$

* $\lambda_1 = (\phi_{11}-3\Lambda)$

Considerant un vector arbitrari

$$v^\mu = al^\mu+bm^\mu+cm^\mu+c^*\bar{m}^\mu \qquad (2.15)$$

l'equació de vectors propis $R^a{}_bv^b = \lambda_1 v^a$ es redueix a les equacions

$$\phi_{22}b+\phi_{12}c+\phi_{12}^{*}c^{*}=0$$
$$\phi_{12}^{*}b+(\phi_{11}+3\Lambda)c=-(\phi_{11}-3\Lambda)c \qquad (2.16)$$

les quals poden expressar-se

$$c=-\frac{\phi_{12}^{*}}{2\phi_{11}}\,b$$
$$(\phi_{11}\phi_{22}-\phi_{12}\phi_{12}^{*})b=0 \qquad (2.17)$$

Per tant hem de considerar dos casos.

i) $\phi_{11}\phi_{22}\neq\phi_{12}\phi_{12}^{*}$. Llavors cal que b=0 i en conseqüència c=0. Així corresponent a λ_1 hi ha un vector propi isòtrop

$$v^{\mu}_{\lambda_1}=al^{\mu} \qquad (2.18)$$

ii) $\phi_{11}\phi_{22}=\phi_{12}\phi_{12}^{*}$. En aquest cas a, b i c són diferents de zero. Per tant poden haver-hi dos vectors propis, podent ser un d'ells tipus temps:

$$v^{\mu}_{\lambda_1}=al^{\mu}+b\left(n^{\mu}-\frac{\phi_{12}^{*}}{2\phi_{11}}m^{\mu}-\frac{\phi_{12}}{2\phi_{11}}\bar{m}^{\mu}\right) \qquad (2.19)$$

$$v^{\mu}_{\lambda_1}v_{\lambda_1\mu}=2b^{2}\left(\frac{\phi_{22}}{4\phi_{11}}-\frac{a}{b}\right)\gtreqless 0 \qquad a,b \text{ arbitraris}$$

* $\lambda_2=2(\phi_{11}+3\Lambda)$

De l'equació de vectors propis trobem les equacions:

$$2\phi_{11}a+\phi_{22}b+\phi_{12}c+\phi_{12}^{*}c^{*}=0$$
$$\phi_{11}b=0 \qquad (2.20)$$
$$\phi_{12}b=0$$

Com que $\phi_{11} \neq 0$, cal que $b = 0$ i a més

$$a = -\frac{(\phi_{12}\, c+\phi_{12}^{*}\, c^{*})}{2\phi_{11}}$$

Per tant, corresponent a λ_2 hi ha dos vectors propis tipus espai

$$v^{\mu}_{\lambda_2} =-\frac{(\phi_{12}\, c+\phi_{12}^{*}\, c^{*})}{2\phi_{11}}\, l^{\mu}+cm^{\mu}+c^{*}\bar{m}^{\mu}$$

$$v^{\mu}_{\lambda_2} v_{\lambda_2 \mu} = 2cc^{*} > 0$$

** $\phi_{11} = 0$

Hi ha un sol autovalor $\lambda = 6\Lambda$ quadruple. El sistema es redueix a

$$\begin{aligned} &\phi_{22}\, b+\phi_{12}\, c+\phi_{12}^{*}\, c^{*} = 0 \\ &\phi_{12}\, b = 0 \end{aligned} \qquad (2.22)$$

* $\phi_{12} \neq 0$

Llavors b=0 i $\frac{c}{\phi_{12}^{*}} = -\frac{c^{*}}{\phi_{12}} = id$ i hi ha dos vectors propis tipus espai

$$\begin{aligned} &v^{\mu}_{\lambda} = al^{\mu}+id(\phi_{12}^{*}\, m^{\mu}-\phi_{12}\, \bar{m}^{\mu}) \\ &v^{\mu}_{\lambda} v_{\lambda\mu} = 2d^{2}\phi_{12}\, \phi_{12}^{*} > 0 \quad \text{tipus espai} \end{aligned} \qquad (2.23)$$

* $\phi_{12} = 0$

En aquest cas $\phi_{22} = 0$ i qualsevol vector és propi. Correspon a m constant.

Dels diferents tipus de tensor de Ricci (i per tant de tensor d'impulsió-energia), destaquen pel seu sentit físic els següents casos:

1) $\phi_{12} \neq 0$, $\phi_{11}\phi_{12} = \phi_{12}\phi^{*}_{12}$. Ja que llavors podem tenir un vector tipus temps i tres tipus espai. En la notació de Segré es tracta del cas A1 [(1.1)(1,1)] que s'interpreta com un camp electromagnètic no nul i pot incloure un fluid no perfecte (Kramer et al., 1980; pg.67). Com veurem a continuació, si considerem m(r) solament, es troba la mètrica de Kerr-Newman o mètrica de Kerr carregada (Newman et al., 1965).

2) $\phi_{11} \neq 0$, $\phi_{11}\phi_{22} = \phi_{12}\phi^{*}_{12}$. Hi ha un vector propi isòtrop corresponent a un dels valors propis i dos vectors tipus espai corresponent a l'altre. Es el cas A3[(1,1), 2] que correspon a radiació pura.

A partir del tensor de Ricci podem construir el tensor d'impulsió energia (equacions d'Einstein, k=1).

$$T^{a}{}_{b} = R^{a}{}_{b} - \frac{1}{2} R\,\delta^{a}{}_{b}$$

que resulta:

$$T^{a}{}_{b} = 2\begin{bmatrix} -\phi_{11}-3\Lambda & -\phi_{12} & -\phi_{12} & -\phi^{*}_{12} \\ 0 & -\phi_{11}-3\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \phi^{*}_{12} & \phi_{11}-3\Lambda & 0 \\ 0 & \phi_{12} & 0 & \phi_{11}-3\Lambda \end{bmatrix} \qquad (2.24)$$

Si considerem m funció solament de r i demanem que aquest tensor s'impulsió-energia sigui el d'un camp electromagnètic, la traça ha de ser nul.la per tant $\Lambda=0$. Amb aquestes condicions les ϕ_{ab} de (2.10) resulten:

$$\phi_{00} = \phi_{01} = \phi_{02} = \phi_{12} = \phi_{22} = \Lambda = 0$$
$$\phi_{11} = \dot{m} r^2 (r^2+a^2\cos^2\theta)^{-2} \tag{2.25}$$

D'on trobem que les components en la tètrade del tensor camp electromagnètic (1.60) sôn zero llevat de

$$\phi_1 = \sqrt{\dot{m}}\, r (r^2+a^2\cos^2\theta)^{-1} e^{i\xi} \tag{2.26}$$

amb ξ funciô real arbitrària. Determinem ξ mitjançant les equacions de Maxwell (1.61) que en aquest cas es redueixen a

$$D\phi_1 = 2\rho\phi_1 \tag{2.27,a}$$

$$\Delta\phi_1 = -2\mu\phi_1 \tag{2.27,b}$$

$$\delta\phi_1 = 2\tau\phi_1 \tag{2.27,c}$$

$$\bar{\delta}\phi_1 = -2\pi\phi_1 \tag{2.27,d}$$

De (2.27,a) i Λ=0 trobem:

$$m = -\frac{e^2}{2r} + M \qquad i \qquad \xi,_r = -\frac{2a\cos\theta}{\Sigma} \tag{2.28}$$

De (2.27,b)

$$\Omega\xi,_u + a\xi,_\theta = 0 \tag{2.29}$$

De (2.27,c) obtenim la relaciô:

$$-a\sin\theta\,\xi,_u - \frac{\xi,_\psi}{\sin\theta} + i\xi,_\theta = -\frac{2iar\sin\theta}{\Sigma} \tag{2.30}$$

I finalment, de (2.27,d):

$$a\sin\theta\,\xi,_u + \frac{\xi,_\psi}{\sin\theta} + i\xi,_\theta = -\frac{2iar\sin\theta}{\Sigma} \tag{2.31}$$

D'aquestes quatre darreres equacions és immediat veure que

$$\xi,_u = \xi,_\psi = 0; \quad \xi,_\theta = -\frac{2ar\sin\theta}{\Sigma}; \quad \xi,_r = -\frac{2a\cos\theta}{\Sigma} \tag{2.32}$$

Integrant, trobem:

$$\xi = -2\arctan\frac{r}{a\cos\theta} + k \tag{2.33}$$

Tenint en compte que

$$e^{i\xi} = e^{-2i\arctan\left(\frac{r}{a\cos\theta}\right)+k} = -\frac{(r+ia\cos\theta)^2}{\Sigma}\, e^{ik} \tag{2.34}$$

i substituint a (2.26) veiem finalment que:

$$\begin{aligned}\phi_1 = -\frac{e}{\sqrt{2}\Sigma}\, 2\{\, [(r^2-a^2\cos^2\theta)\cos k - 2ar\cos\theta\sin k \\ + i\ (r^2-a^2\cos^2\theta)\sin k + 2ar\cos\theta\cos k]\,\}\end{aligned} \tag{2.35}$$

A partir dels escalars ϕ_a podem escriure explicitament el tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$, resultant al nostre cas

$$F_{\mu\nu} = -4\mathrm{Re}(\phi_1)\, l_{[\mu} n_{\nu]} + 4i\,\mathrm{Im}(\phi_1)\, m_{[\mu}\bar{m}_{\nu]}$$

O bé:

$$F_{10} = \frac{\sqrt{2}e}{\Sigma^2}\,[\sin k\, 2ar\cos\theta - \cos k\,(r^2-a^2\cos^2\theta)] = \frac{F_{13}}{a\sin^2\theta}$$

$$F_{20}\,\Omega = F_{23}\, a = \sqrt{2}e\Omega a\sin\theta[\cos k - 2ar\cos\theta + \sin k\,(r^2-a^2\cos^2\theta)]$$

El camp és l'associat amb la mètrica de Kerr-Newman llevat d'una rotació de dualitat ja que hem considerat el tensor d'impulsió-energia.

Pot comparar-se aquest estudi amb l'efectuat per Martin i Mas (1970), destacant la manera simple com s'ha obtingut la solució de Kerr-Newman com un cas particular de camp electromagnètic no nul.

4.- Cas $m = m(r)$ i $a = a(r,\theta)$ als termes $2mr/\Sigma$

En aquest cas s'ha fet una anàlisi paral.lela a la del paràgraf anterior. Els únics coeficients de spin que resulten modificats respecte del cas anterior són μ, γ i ν. Els escalars ϕ_{ab} són diferents pero la forma del tensor de Ricci (2.12) és la mateixa. Així l'anàlisi feta abans val igualment ara. Si ens cenyim a l'existència d'un vector propi tipus temps cal que es verifiqui la relació $\phi_{11}\phi_{22}=\phi_{12}\phi_{12}^*$. Estudiant-la arribem a la conclusió de què només és certa si a és constant retrobant el cas m(r) estudiat abans. No especifiquem detalls dels càlculs donat que no s'aporta cap aspecte essencialment nou a l'estudi ja efectuat.

5.- Classificació de Bel-Petrov(cas $m(r,\theta)$, a=constant)

De les projeccions del tensor de Weyl (2.10) i de l'algoritme de d'Inverno i Russell-Clark (1.72) trobem:

$$I = 3\psi_2^2 \qquad J = -\psi_2^3$$

$$K = -3\psi_4\psi_3\psi_2 + 2\psi_3^2 \qquad N = \psi_3^4 - 2\psi_2\psi_3^2\psi_4 - 2\psi_2^2\psi_4^2$$

així en general les solucions amb $m(r,\theta)$ són tipus II de Bel-Petrov.

Si busquem quines solucions són tipus D hem d'exigir $I, J \neq 0$ i $K=N=0$. La darrera condició és equivalent a $\psi_3=0$ obliga a m ser funció solament de r (i per tant $\psi_4=0$). Veiem així que l'única solució tipus D és precisament l'estudiada al paràgraf 3.

III. SOLUCIONS ESTACIONÀRIES I AXISIMÈTRIQUES AMB FLUID PERFECTE.

1. - La mètrica de Lewis-Papapetrou.

Una de les maneres de restringir les equacions d'Einstein que resulta especialment útil consisteix en simplificar la mètrica suposant que admet un determinat grup de moviments G_r i adaptar les coordenades.

El cas de solucions estacionaries i axisimètriques correspon a un grup G_2 actuant sobre T_2 (òrbita tipus temps, és dir algun vector tangent a la subvarietat de dimensió dos és tipus temps). El grup ve generat per dos vectors de Killing, un és gènere espai , $\vec{\eta}$, amb trajectòries tancades i s'anul.la a l'eix de rotació i l'altre és gènere temps , $\vec{\xi}$, . A més demanem que commutin:

$$[\vec{\xi}\ ,\vec{\eta}] = 0 \qquad \xi^{\mu}\xi_{\mu} < 0\ , \eta^{\mu}\eta_{\mu} > 0 \tag{3.1}$$

és dir , el grup G_2 és abelià. En aquest cas és possible trobar un sistema de coordenades en el qual els dos vectors de Killing estiguin adaptats simultaniament.

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\ (x^1,x^2) \quad \vec{\xi} = \partial_t, \vec{\eta} = \partial_{\phi} \tag{3.2}$$

Si a més existeixen superfícies ortogonals a T_2 , és dir:

$$\xi^{\mu}R_{\mu[\nu}\xi_{\rho}\eta_{\sigma]} = 0 = \eta^{\mu}R_{\mu[\nu}\xi_{\rho}\eta_{\sigma]} \tag{3.3}$$

La mètrica permet una descomposició en blocs

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & 0 & 0 \\ g_{10} & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

La qual cosa simplifica notablement les equacions.

La condició (3.3) se satisfà sempre al buit (Papapetrou, 1966). En el cas d'un fluid perfecte o d'un camp electromagnètic per a què se satisfaci cal que el vector velocitat del fluid o el vector corrent estiguin al pla dels dos vectors de Killing. En el cas d'un fluid perfecte això exclueix la convecció.

Si s'introdueixen coordenades isotròpiques a V_2 amb $x^1 = \rho$ i $x^2 = z$ la mètrica (3.4) s'escriu:

$$ds^2 = e^{-2U}\left[e^{2K}(d\rho^2 + dz^2) + W^2 d\phi^2\right] - e^{2U}(dt^2 + Ad\phi^2)^2 \tag{3.5}$$

on U,K,W i A són funció de ρ i z unicament. Així:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{2U} & 0 & 0 & -Ae^{2U} \\ 0 & e^{2(K-U)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2(K-U)} & 0 \\ -Ae^{2U} & 0 & 0 & W^2e^{-2U}-A^2e^{2U} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

el determinant val:

$$\begin{aligned} g &= -e^{4(K-U)}(W^2 - A^2e^{4U}) - A^2e^{4U}e^{4(K-U)} = \\ &= -W^2e^{4(K-U)} \end{aligned} \tag{3.7}$$

i també:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \dfrac{A^2e^{2U}}{W^2} - e^{-2U} & 0 & 0 & \dfrac{-Ae^{2U}}{W^2} \\ 0 & e^{2(U-K)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2(U-K)} & 0 \\ \dfrac{-Ae^{2U}}{W^2} & 0 & 0 & \dfrac{e^{2U}}{W^2} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

En general a l'element de línia (3.5) se l'anomena de Lewis- Papapetrou (Lewis, 1932; Papapetrou, 1966)

2.- Equacions de camp per a un fluid perfecte

De cara a plantejar les equacions de camp en el cas d'existència d'un fluid perfecte, introduirem una tètrade nul.la a partir de la següent tètrade ortonormal.

$$
\begin{aligned}
e_{t\mu} &= (e^U,\ 0,\ 0,\ Ae^U) & e_t{}^\mu &= (-e^{-U},\ 0,\ 0,\ 0) \\
e_{\rho\mu} &= (\ 0, -e^{K-U},\ 0,\ 0) & e_\rho{}^\mu &= (\ 0, -e^{U-K},\ 0,\ 0) \\
e_{z\mu} &= (\ 0,\ 0, -e^{K-U},\ 0) & e_z{}^\mu &= (\ 0,\ 0, -e^{U-K},\ 0) \\
e_{\phi\mu} &= (\ 0,\ 0,\ 0, We^{-U}) & e_\phi{}^\mu &= (-\frac{Ae^U}{W},\ 0,\ 0,\ \frac{e^U}{W})
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Tètrade que té una interpretació física senzilla com la corresponent a un observador amb coordenades ρ i z fixes i moment angular nul. (Bardeen,1972).

Construïm la tètrade nul.la mitjançant la relació (1.42).

$$
\begin{aligned}
l_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ (\ e^U,\ 0,\ 0,\ Ae^U + We^{-U}) \\
n_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ (\ e^U,\ 0,\ 0,\ Ae^U - We^{-U}) \\
m_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ (\ 0,\ -e^{K-U},\ -ie^{K-U},\ 0\ ) \\
\\
l^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ (\ -e^{-U} - \frac{Ae^U}{W},\ 0,\ 0,\ \frac{e^U}{W}\ ) \\
n^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ (\ -e^{-U} + \frac{Ae^U}{W},\ 0,\ 0,\ -\ \frac{e^U}{W}\ ) \\
m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ (\ 0,\ -\ e^{U-K},\ -\ ie^{U-K},\ 0\ )
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Per calcular els coeficients de spin (1.47) ens cal trobar, a partir de (1.30), els següents λ_{abc} . (Poden trobar-se detalls dels càlculs a l' annex El punt indica derivació respecte de ρ i l'apòstrof respecte de z)

$$\lambda_{112} = \lambda_{122} = \lambda_{132} = \lambda_{133} = \lambda_{134} = \lambda_{233} = \lambda_{243} = \lambda_{314} = \lambda_{324} = 0$$

$$\lambda_{113} = \frac{e^{U-K}}{2\sqrt{2}W}\ [\ 2W(\dot{U} + iU') - e^{2U}(\dot{A} + iA') - (\dot{W} + iW')]$$

$$\lambda_{123} = -\frac{e^{U-K}}{2\sqrt{2}W}\left[e^{2U}(\dot{A} + iA') - (\dot{W} + iW')\right]$$

$$\lambda_{213} = -\frac{e^{U-K}}{2\sqrt{2}W}\left[e^{2U}(\dot{A} + iA') - (\dot{W} + iW')\right] \tag{3.11}$$

$$\lambda_{223} = \frac{e^{U-K}}{2\sqrt{2}W}\left[2W(\dot{U} + iU') + e^{2U}(\dot{A} + iA') - (\dot{W} + iW')\right]$$

$$\lambda_{344} = \frac{e^{U-K}}{\sqrt{2}}\left[(\dot{U} - iU') - (\dot{K} - iK')\right]$$

I aprofitant les relacions (2.7) trobem els coeficients de spin :

$$\sigma = \lambda = \rho = \mu = \gamma = \varepsilon = 0$$

$$\kappa = \frac{e^{U-K}}{2\sqrt{2}W}\left[2W(\dot{U} + iU') - e^{2U}(\dot{A} + iA') - (\dot{W} + iW')\right]$$

$$\nu = \frac{e^{U-K}}{2\sqrt{2}W}\left[-2W(\dot{U} - iU') - e^{2U}(\dot{A} - iA') + (\dot{W} - iW')\right]$$

$$\tau = -\pi^* = \frac{e^{U-K}}{2\sqrt{2}W}(\dot{W} + iW') \tag{3.12}$$

$$\alpha = \frac{e^{U-K}}{2\sqrt{2}}\left[(\dot{K} - iK') - (\dot{U} - iU') - \frac{e^{2U}}{2W}(\dot{A} - iA')\right]$$

$$\beta = \frac{e^{U-K}}{2\sqrt{2}}\left[-(\dot{K} + iK') + (\dot{U} + iU') - \frac{e^{2U}}{2W}(\dot{A} + iA')\right]$$

Per simplificar els càlculs que segueixen i veient la forma com apareixen les derivades de les funcions de la mètrica, fem el següent canvi de coordenades:

$$\sqrt{2}\,x = \rho + iz \quad , \quad \sqrt{2}\,\bar{x} = \rho - iz \tag{3.13}$$

Així :

$$\frac{\partial}{\partial\rho} + i\frac{\partial}{\partial z} = \sqrt{2}\,\frac{\partial}{\partial\bar{x}} \tag{3.14}$$

També és convenient definir les noves funcions:

$$F = U - K \qquad S = We^{-2U} + A$$
$$H = \ln W \qquad T = We^{-2U} - A \tag{3.15}$$

D'aquesta manera l'element de línia (3.5) pot escriure's :

$$ds^2 = 2e^{-2F}dx\,d\bar{x} + \frac{2e^H}{S+T}[STd\phi^2 - (S-T)d\phi dt + dt^2] \tag{3.16}$$

I els coeficients de spin (3.12) queden de la forma simple següent:

$$\sigma = \lambda = \rho = \mu = \gamma = \varepsilon = 0$$
$$\kappa = -\frac{e^F S_{\bar{x}}}{S+T} \qquad \nu = \frac{e^F T_x}{S+T}$$
$$\tau = -\pi^* = \frac{1}{2}e^F H_{\bar{x}} \qquad \alpha + \beta^* = -e^F F_x \tag{3.17}$$
$$\alpha - \beta^* = -\frac{e^F}{2(S+T)}(S_x - T_x)$$

Resolent les equacions de Newman-Penrose trobem els escalars de Ricci i de curvatura:

$$\Phi_{10} = \Phi_{12} = 0$$
$$\Phi_{00} = -\frac{e^{2F}}{S+T}\left[S_{x\bar{x}} + \mathrm{Re}(H_x S_{\bar{x}}) - \frac{2S_x S_{\bar{x}}}{S+T}\right]$$
$$\Phi_{22} = -\frac{e^{2F}}{S+T}\left[T_{x\bar{x}} + \mathrm{Re}(H_x T_{\bar{x}}) - \frac{2T_x T_{\bar{x}}}{S+T}\right] \tag{3.18}$$
$$2\Phi_{11} = e^{2F}\left[F_{x\bar{x}} + \frac{1}{4}H_x H_{\bar{x}} - \frac{\mathrm{Re}(S_x T_{\bar{x}})}{(S+T)^2}\right]$$
$$6\Lambda - 2\Phi_{11} = -e^{2F}(H_{x\bar{x}} + H_x H_{\bar{x}})$$
$$\Phi_{02} = -e^{2F}\left[\frac{1}{2}H_{xx} + \frac{1}{4}H_x^2 + H_x F_x + \frac{S_x T_x}{(S+T)^2}\right]$$

I les projeccions del tensor de Weyl:

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= \psi_3 = 0 \\
\psi_0{}^* &= -\frac{e^{2F}}{S+T}\left(S_{xx} + 2F_x S_x + H_x S_x - \frac{2S_x^2}{S+T} \right) \\
\psi_4 &= -\frac{e^{2F}}{S+T}\left(T_{xx} + 2F_x T_x + H_x T_x - \frac{2T_x^2}{S+T} \right) \\
\psi_2 &= -\frac{e^{2F}}{6}\left[H_{x\bar{x}} + 2F_{x\bar{x}} + \frac{5S_{\bar{x}}T_x - S_x T_{\bar{x}}}{(S+T)^2} \right]
\end{aligned}
\qquad (3.19)
$$

Ara , i a partir de ϕ_{ab}, escrivim les components del tensor de Ricci (1.51) resultant:

$$
R_{ab} = 2 \begin{vmatrix} \phi_{00} & \phi_{11}-3\Lambda & 0 & 0 \\ \phi_{11}-3\Lambda & \phi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{02} & \phi_{11}+3\Lambda \\ 0 & 0 & \phi_{11}+3\Lambda & \phi^*_{02} \end{vmatrix} \qquad (3.20)
$$

A continuació construïm el tensor d'Einstein:

$$
G_{ab} = R_{ab} - 12\Lambda\eta_{ab} \qquad (3.21)
$$

Obtenint:

$$
G^a{}_b = \eta^{ac}G_{cb} = 2 \begin{vmatrix} -(\phi_{11}+3\Lambda) & -\phi_{22} & 0 & 0 \\ \phi_{00} & -(\phi_{11}+3\Lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{11}-3\Lambda & \phi^*_{02} \\ 0 & 0 & \phi_{02} & \phi_{11}-3\Lambda \end{vmatrix}
$$

(3.22)

De cara a la identificació amb un tensor d'impulsió-energia tipus fluid perfecte, determinem els valors propis de $G^a{}_b$. Hem de resoldre les equacions:

$$
\begin{aligned}
&[2(\phi_{11} + 3\Lambda) + \lambda]^2 - 4\phi_{00}\phi_{22} = 0 \\
&[2(\phi_{11} - 3\Lambda) - \lambda]^2 - 4\phi_{02}\phi_{02}^* = 0
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Trobant els quatre valors propis:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -2(\phi_{11} + 3\Lambda) - 2\sqrt{\phi_{00}\phi_{22}} \\
\lambda_2 &= -2(\phi_{11} + 3\Lambda) + 2\sqrt{\phi_{00}\phi_{22}} \\
\lambda_3 &= 2(\phi_{11} - 3\Lambda) + 2\sqrt{\phi_{02}\phi_{02}^*} \\
\lambda_4 &= 2(\phi_{11} - 3\Lambda) - 2\sqrt{\phi_{02}\phi_{02}^*}
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

De l'equació de valors propis trobem facilment els corresponents vectors propis. És immediat veure que les condicions generals per a l'existència d'un vector propi tipus temps i tres vectors propis tipus espai són:

$$
\begin{aligned}
\phi_{02} &= 0 \\
2\phi_{11} &= \sqrt{\phi_{00}\phi_{22}}
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

I els valors propis (3.24) esdevenen:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -6(\phi_{11} + \Lambda) \\
\lambda_2 &= \lambda_3 = \lambda_4 = 2(\phi_{11} - 3\Lambda)
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

A través de les equacions d'Einstein podem plantejar les equacions de camp en presència d'un fluid perfecte ($\kappa = 1$)

$$\begin{aligned} &a) && \phi_{02} = 0 \\ &b) && 2\phi_{11} = \sqrt{\phi_{00}\phi_{22}} \\ &c) && 6(\phi_{11}+\Lambda) = \rho \\ &d) && 2(\phi_{11} - 3\Lambda) = p \end{aligned} \tag{3.27}$$

Com a comprovació del que s'ha comentat al començament del capítol, és facil veure que la quadrivelocitat té la forma:

$$u^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\phi_{22}}{\phi_{00}}\right]^{\frac{1}{4}} l^{\mu} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\phi_{00}}{\phi_{22}}\right]^{\frac{1}{4}} n^{\mu} \tag{3.28}$$

Es dir que efectivament està al pla dels vectors de Killing.

3. - Classificació de Bel-Petrov

Evidentment les equacions (3.27) són força complicades i no és possible intentar resoldre-les sense imposar abans algunes restriccions. Es de cara a l'estudi de les restriccions que comporta l'imposar un tipus concret de Bel-Petrov que veurem a continuació quina forma concreta pren l'algoritme de d'Inverno/Russell-Clark (1.72) en el cas general d'una mètrica axisimètrica i estacionària.

En el nostre cas, per tant, els invariants (1.71) prenen la forma:

$$I = \psi_0\psi_4 + 3\psi_2^2 \qquad J = (\psi_0\psi_4 - \psi_2^2)\psi_2 \qquad K = 0$$
$$L = \psi_2\psi_4 \qquad N = (9\psi_2^2 - \psi_0\psi_4)\psi_4^2 \tag{3.29}$$

La condició $I^3 = 27\,J^2$ s'escriu ara:

$$\psi_0\psi_4(\psi_0^2\psi_4^2 + 81\psi_2^4 - 18\psi_0\psi_4\psi_2^2) = 0 \quad (3.30)$$

Per tant la solució serà tipus I si $\psi_0\psi_4 \neq 9\psi_2^2$ (que és la condició per a que no s'anul.li el parèntesi) i a més $\psi_0\psi_4 \neq 0$

Si volem que es verifiqui (3.30) hi ha dues possibilitats:

** $\psi_0 = 0$. Llavors els invariants (3.29) valen:

$$I = 3\psi_2^2 \quad J = -\psi_2^3 \quad K = 0$$
$$L = \psi_2\psi_4 \quad N = 9\psi_2^2\psi_4^2$$

* Si $\psi_2 \neq 0$ és tipus II si $\psi_4 \neq 0$ i tipus D si $\psi_4 = 0$

* Si $\psi_2 = 0$ i $\psi_4 \neq 0$ és tipus N i si $\psi_4 = 0$ és tipus 0..

És possible bescanviar els papers de ψ_0 i ψ_4

** $\psi_0\psi_4 = 9\psi_2^2 \neq 0$. En aquest cas els invariants esdevenen:

$$I = 12\psi_2^2 \quad J = 8\psi_2^3 \quad K = 0 \quad L = \psi_2\psi_4 \quad N = 0$$

Per tant ens trobem davant d'un tipus D.

Hem d'assenyalar que hi ha dues maneres d'arribar a un tipus D de Bel-Petrov (Collinson & Dodd, 1971) i que no és possible trobar tipus III.

A continuació resumim la classificació:

Tipus de Bel-Petrov	Condicions
0	$\psi_0 = \psi_2 = \psi_4 = 0$
I	$\psi_0\psi_4 \neq 0 \quad \psi_0\psi_4 \neq 9\psi_2^2$
II	$\psi_2\psi_4 \neq 0, \psi_0 = 0$ o $\psi_2\psi_0 \neq 0$, $\psi_4 = 0$
D(1)	$\psi_0\psi_4 \neq 0$, $\psi_0\psi_4 = 9\psi_2^2$
D(2)	$\psi_0 = \psi_4 = 0$, $\psi_2 \neq 0$
N	$\psi_0 = \psi_2 = 0, \psi_4 \neq 0$ o $\psi_4 = \psi_2 = 0$, $\psi_0 \neq 0$

(3.31)

4.- Imposició d'un tipus de Bel-Petrov

* Tipus D(2).

Veiem a continuació a què condueix imposar el tipus D(2) de Bel-Petrov a la solució amb fluid perfecte.

De (3.31) $\psi_0 = \psi_4 = 0$, $\psi_2 \neq 0$; això és:

$$S_{xx} + 2F_x S_x + H_x S_x - \frac{2S_x^2}{S+T} = 0 \tag{3.32,a}$$

$$T_{xx} + 2F_x T_x + H_x T_x - \frac{2T_x^2}{S+T} = 0 \tag{3.32,b}$$

Restant (3.32,b) de (3.32,a)

$$(S-T)_{xx} + 2F_x (S-T)_x + H_x (S-T)_x - \frac{2}{S+T}(S_x^2 - T_x^2) = 0$$

Integrant

$$\frac{(S-T)_x}{(S+T)^2} = f(\bar{x})\, e^{-(2F+H)} \tag{3.33}$$

Dividint (3.32,a) per S_x i sumant-li (3.32,b) dividida per T_x

$$\frac{S_{xx}}{S_x} + \frac{T_{xx}}{T_x} + 4F_x + 2H_x - \frac{2(S+T)_x}{(S+T)} = 0$$

Integrant

$$\frac{S_x T_x}{(S+T)^2} = g^2(\bar{x})\; e^{-2(2F+H)} \tag{3.34}$$

Es dir que a més de les equacions de camp (3.27) tindrem les condicions (3.33) i (3.34).

* Tipus 0.

En aquest cas $\psi_0 = \psi_2 = \psi_4 = 0$ i pot demostrar-se que, en el cas que estem considerant d'un fluid perfecte, l'espai-temps necessariament ha de ser estàtic, arribant a trobar-se la mètrica interior d'Schwarzschild usual (Collinson, 1976).

5.- Espai conformement pla

Si s'exigeix que l'espai tridimensional sigui conformement pla hem de comparar

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{oi}g_{oj}}{g_{oo}} = \begin{bmatrix} e^{2(k-u)} & 0 & \\ 0 & e^{2(k-u)} & \\ 0 & 0 & w^2e^{-2u} \end{bmatrix}$$

amb

$$\bar{g}_{ij} = C(\rho,z)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

C factor de comformitat.

així cal que es verifiqui la condició

$$e^{2k}\rho^2 = W^2$$

que amb el canvi (3.13-3.15) s'escriu

$$e^{-(2F+H)} = \frac{S+T}{(x+\bar{x})^2} \tag{3.35}$$

6.- Equació d'estat $p = n\rho$

Suposar una equació d'estat de la forma $p=n\rho$ restringeix les equacions de camp.

De (3.27,c i d) trobem

$$p + \rho = 8\phi_{11}$$

i com que $p = 2(\phi_{11} - 3\Lambda) = e^{2F}(H_{x\bar{x}} + H_x H_{\bar{x}})$

s'haurà de complir, a més de les equacions de camp, que

$$\phi_{11} = \frac{n+1}{8n} e^{2F}(H_{x\bar{x}} + H_x H_{\bar{x}}) \qquad (3.36)$$

7.- Construcció d'una solució tipus D(1)

Si volem una solució tipus D(1) de (3.31) cal que

$$\psi_0 \psi_4 = 9\psi_2^2 \qquad (3.37)$$

Per poder treballar aquesta relació farem una nova redefinició de funcions.

Introduïm

$$B = We^{-2U},\ H = luW,\ C = \frac{1}{W} e^{2(k-u)},\ a = \frac{A}{B} \qquad (3.38)$$

I usarem les funcions a, B, C i H que considerem funcions de x i $\bar{x}$. D'aquesta forma l'element de línia (3.5) es converteix en

$$ds^2 = 2Ce^H dxd\bar{x} + e^H [B(1-a^2)d^2\phi - 2ad\phi dt + \frac{1}{B} dt^2] \qquad (3.39)$$

La relació (3.37) és, en general, molt complicada per això fem la hipòtesi següent,

$$B = \text{ctant} \qquad (3.40)$$

amb tot això els escalars ψ_0, ψ_4 i ψ_2 són:

$$\psi_0 = -\frac{e^{-H}}{2C}\left[a_{xx} - (\ln C)_x a_x - a_x^2 \right]$$

$$\psi_4 = \frac{e^{-H}}{2C}\left[a_{\bar{x}\bar{x}} - (\ln C)_{\bar{x}}\, a_{\bar{x}} + a_{\bar{x}}^2 \right]$$

$$\psi_2 = \frac{e^{-H}}{6C}\left[(\ln C)_{x\bar{x}} - a_x a_{\bar{x}} \right]$$

La condició (3.37) s'escriurà ara:

$$\{a_x^2 - [a_{xx} - (\ln C)_x a_x]\}\{a_{\bar{x}}^2 + [a_{\bar{x}\bar{x}} - (\ln C)_x - a_x]\}$$
$$= [(\ln C)_{x\bar{x}} - a_x a_{\bar{x}}]^2 \qquad (3.41)$$

observant que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{a_x}{C}\right) = \frac{a_{xx}}{a_x} - \frac{C_x}{C}$$

Trobem

$$a_x a_{\bar{x}}\left[a_x - \left(\ln\frac{a_x}{C}\right)_x\right]\left[a_{\bar{x}} + \left(\ln\frac{a_{\bar{x}}}{C}\right)_{\bar{x}}\right] = \left|(\ln C)_{x\bar{x}} - a_x a_{\bar{x}}\right|^2$$

D'on deduïm les dues equacions reals

$$\left|(\ln C)_{x\bar{x}}\right|^2 - 2(\ln C)_{x\bar{x}} a_x a_{\bar{x}} - \left(\ln\frac{a_x}{C}\right)_x\left(\ln\frac{a_{\bar{x}}}{C}\right)_{\bar{x}} a_x a_{\bar{x}} = 0 \qquad (3.42,a)$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}}\left(\frac{C}{a_{\bar{x}}}\right)_{\bar{x}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{a_x}\right) \qquad (3.42,b)$$

A les quals hem d'afegir les equacions de camp Tenint en compte que dues d'elles poden considerar-se les definicions de p i ρ, tenim quatre equacions a solucionar. A més de (3.42, a i b) tindrem

$$2H_{\bar{x}\bar{x}}-H_{\bar{x}}^2-2H_{\bar{x}}(\ln C)_{\bar{x}}-a_{\bar{x}}^2=0 \qquad (3.42,c)$$

$$2H_{x\bar{x}}-H_xH_{\bar{x}}+2(\ln C)_{x\bar{x}}-a_xa_{\bar{x}}$$

$$+2\{a_x^2a_{\bar{x}}^2-[a_{x\bar{x}}+R_e(H_xa_{\bar{x}})]^2\}=0 \qquad (3.42,d)$$

Les equacions (3.42) encara són massa difícils de resoldre per això fem una nova hipòtesi:

$$a_{\bar{x}}=f(x)C \qquad (3.43)$$

Amb la qual cosa l'equació (3.42,b) es verifica identicament i podem integrar l'equació (3.42,c) que queda de la forma

$$2H_{\bar{x}\bar{x}}-H_{\bar{x}}^2-2H_{\bar{x}}(\ln C)_{\bar{x}}-f^2(x)C^2=0 \qquad (3.44)$$

I és una equació de Ricatti. Es fàcil comprovar que la solució es:

$$H=2\ln\frac{v(x)}{\cos\left|\frac{a}{2}+l(x)\right|} \qquad (3.45)$$

Amb la singular

$$H_0=\pm ia+l_0(x) \qquad (3.46)$$

on $v(x)$, $l(x)$, $l_0(x)$ són funcions holomorfes.

Si considerem la solució singular i degut a que a i H_0 han de ser harmòniques:

$$a_{x\bar{x}}=0=H_{0\,x\bar{x}} \qquad (3.47)$$

A més de $C=\dfrac{a_{\bar{x}}}{f(x)}$ veiem:

$$(\ln C_{x\bar{x}}=(\ln a_x)_{x\bar{x}}=\left(\frac{a_{x\bar{x}}}{a}\right)_x=0 \qquad (3.48)$$

I amb (3.43) i (3.47) l'equació (3.42,a) també es verifica queda, així, l'equació (3.42,d) que amb (3.43), (3.46) i (3.47) es compleix identicament.

Integrant $(\ln C)_{x\bar{x}} = 0$ és dir $C_{x\bar{x}} = \frac{C_x C_{\bar{x}}}{C}$ trobem

$$C = \bar{s}'(\bar{x})t'(x)$$

i tenint en compte que C ha de ser real i de les condicions de Cauchy-Riemann veiem:

$$C = |s'(x)|^2 \tag{3.49}$$

De (3.43)

$$a = f(x)s'(x)\bar{s}(\bar{x}) + t(x)$$

Aprofitant l'harmonicitat de a

$$f(x) = \frac{k}{s'(x)} \qquad k = \text{constant complexa}$$

D'altra banda a ha de ser real, aquest fet juntament amb les condicions de Cauchy-Riemann sobre s(x) i t(x) i una redefinició de funcions englobant les constants a s(x) i t(x) ens permet escriure

$$a = m(x) + \bar{m}(\bar{x}) \tag{3.50}$$

D'on deduim:

$$C = \alpha^2 m'(x)\bar{m}'(x) \qquad \alpha = \text{constant real} \tag{3.51}$$

i també, tenint en compte les condicions de Cauchy-Riemann sobre l(x)

$$H = \pm i[\bar{m}(\bar{x}) - m(x)] + \beta \qquad \beta = \text{constant real} \tag{3.52}$$

Quedant totalment determinat l'element de línia (3.39) gràcies a (3.50), (3.51) i (3.52).

Usant les equacions de camp (3.27,c i d) es immediat comprovar que l'equació d'estat que verifica aquesta solució és de la forma $p = \rho$.

IV.- EL MÈTODE DEL SCATTERING INVERS: OBTENCIÓ I ESTUDI DE SOLUCIONS ESTACIONÀRIES I AXISIMÈTRIQUES A LES EQUACIONS D'EINSTEIN.

1.- Solucions solitòniques

El mètode del scattering invers o de la transformada espectral inversa s'ha utilitzat per trobar solucions tipus solitònic dins de dominis molt diferents de la Física.

El primer treball sobre aquest tipus de solucions fou presentat per J.Scott Russell a "Reports of the British Association for the Advancement of Science" al 1845, fent referència a una observació que l'autor efectuà a l'agost de 1834 de la propagació en un canal del que ell anomenava "ona de transllació" i més endavant "ona solitària" indicant que aquest objecte representaria un tipus general de solucions regulars estables i no dissipatives de la hidrodinàmica. La polèmica que generà aquest article va durar fins l'any 1895 en que Korteweg i de Vries donaren el que ara s'anomena solució solitònica de l'equació hidrodinàmica no lineal.

Fora de la hidrodinàmica han anat aparequent, al llarg dels anys, articles que fan referència a solucions solitòniques de diferents equacions no lineals d'aplicació en camps molt variats (destaquem d'entre elles l'equació de sine-Gordon). L'any 1978, Belinskiĭ i Zakharov presentaren una manera d'obtenir noves solucions a les equacions d'Einstein que es fonamenta en la tècnica del scattering invers. Aquesta tècnica pot utilitzar-se per resoldre les equacions no lineals d'Einstein al buit si l'espai temps admet dos camps de vectors de Killing que commutin.

Aquesta exigència deixa encara una ampla gamma de possibilitats. Destaquem en primer lloc els camps estacionaris i axisimètrics, alguns aspectes dels quals es discuteixen en aquesta memòria; i a més les mètriques d' Einstein-Rosen i les mètriques cosmològiques (i generalitzacions) amb tipus de Bianchi I a VII.

En aquesta part ens centrarem en l'aplicació de la tècnica solitònica per a la generació de solucions estacionàries i axisimètriques a partir d'una coneguda, en l'anàlisi de les solucions que s'obtenen (fent servir resultats d'altres capítols) i en la presentació de maneres d'obtenir solucions noves relacionades amb les trobades amb la tècnica esmentada. Així en el paràgraf 2 descrivim breument el mètode del scattering invers aplicat al cas estacionari i axisimètric i presentem els principals resultats coneguts. En el paràgraf 3 analitzem la família 1-solitònica de solucions obtinguda per E. Verdaguer (1982), destacant com a resultats la classificació de les solucions i la identificació del paper que juguen els paràmetres que hi intervenen. Finalment l'apartat 4 el dediquem a un estudi d'aquesta mateixa família, fent servir el potencial d'Ernst (que també hem calculat), discutim breument com obtenir solucions relacionades a la família i presentem alguns casos concrets interesants (Comellas, Mas, Verdaguer 1982).

2.- El mètode de l'scattering invers i solucions estacionàries axisimètriques

Per algunes equacions diferencials no lineals és possible construir un problema d'autovalors lineal; les funcions incògnita de les equacions originals no lineals estan incluïdes com termes potencials en les equacions lineals, i les condicions d'integrabilitat de les equacions lineals porten a les equacions no lineals. Estudiem l'estructura de les solucions del problema d'autovalors en funció d'un paràmetre espectral complex. Si donem les dades de l'estructura analítica, aleshores podem determinar la forma funcional dels termes potencials.

Aquesta és, doncs, la idea principal del mètode del scattering invers, idea que desenvolupem seguidament.

En concret, per al cas estacionari i axisimètric, la mètrica pot escriure's:

$$ds^2 = f(d\rho^2 + dz^2) + g_{AB}dx^A dx^B \qquad (x^0 = t, x^1 = \phi; A,B = 0,1) \qquad (4.1)$$

on el coeficient de la mètrica i la matriu 2×2 g depenen solament de ρ i z.

Sempre podem escollir coordenades ρ i z tals que

$$\det g = -\rho^2 \qquad (4.2)$$

les equacions d'Einstein del buit prenen la forma

$$U,_{\rho} + V,_{z} = 0 \qquad (4.3)$$

$$(\ln f),_{\rho} = -\rho^{1} + (4\rho^{-1})\,\mathrm{Tr}(U^2 - V^2) \qquad (\ln f),_{z} = (2\rho)^{-1}\,\mathrm{Tr}(U.V) \qquad (4.4)$$

on U i V són matrius 2x2 donades per:

$$U = \rho g,_{\rho} g^{-1} \qquad V = \rho g,_{z} g^{-1} \qquad (4.5)$$

Així la matriu g ve determinada pel sistema no lineal (4.3) independentment de f. Una vegada coneguda g gràcies a (4.4) trobem el coeficient f. La tècnica solitònica se centra en el problema de trobar una solució per a g. La clau rau en associar al sistema (4.3) el problema d'autovalors següent:

$$D_1\psi = \frac{\rho V-\lambda U}{\lambda^2+\rho^2}\,\psi \quad , \quad D_2\psi = \frac{\rho U+\lambda V}{\lambda^2+\rho^2}\,\psi \tag{4.6}$$

on

$$D_1 = \partial_z - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2+\rho^2}\,\partial_\lambda \quad , \quad D_2 = \partial_\rho + \frac{2\lambda\rho}{\lambda^2+\rho^2}\,\partial_\lambda \tag{4.7}$$

i λ és un paràmetre espectral complex, $\psi(\lambda,\rho,z)$ és una matriu complexa de dues dimensions. El conmutador dels operadors D_1 i D_2 s'anul.la, així tenim la condició d'integrabilitat $(D_1D_2-D_2D_1)\psi=0$ que equival a (4.3). Substituint el valor $\lambda=0$ a (4.6) trobem

$$g(\rho,z) = \psi(0,\rho,z) \tag{4.8}$$

De cara a resoldre les equacions (4.6) considerant que una solució particular g_0 de (4.3) -pot ser Minkowski- es coneix i així són calculables ψ_0, U_0 i V_0 corresponent a g_0.

Busquem ara una nova solució amb la forma

$$\psi = \chi\ \psi_0 \tag{4.9}$$

les matrius de transformació χ satisfan les equacions:

$$\begin{aligned} D_1\chi &= \frac{\rho V-\lambda U}{\lambda^2+\rho^2}\,\chi - \chi\frac{\rho V_0-\lambda U_0}{\lambda^2+\rho^2} \\ D_2\chi &= \frac{\rho U+\lambda V}{\lambda^2+\rho^2}\,\chi - \chi\frac{\rho U_0+\lambda V_0}{\lambda^2+\rho^2} \end{aligned} \tag{4.10}$$

De cara a tenir una solució física la matriu g hauria de ser real i simètrica. La primera condició està assegurada si demanem que χ i ψ siguin reals sobre el pla λ.

$$\chi(\lambda^*) = [\chi(\lambda)]^* \qquad \psi(\lambda^*) = [\psi(\lambda)]^* \tag{4.11}$$

La segona condició pot veure's així: Si g és simètrica i $\chi(\lambda)$ satisfa (4.10) la nova matriu

$$\chi'(\lambda) = g\tilde{\chi}^{-1}\left(-\frac{\rho^2}{\lambda}\right) g_0^{-1}$$

també satisfa les equacions (la tilde indica la matriu transposta). Si considerem $\chi'(\lambda) = \chi(\lambda)$, que no afecta la simetria de g aleshores

$$g = \chi\left(-\frac{\rho^2}{\lambda}\right) g_0 \tilde{\chi}(\lambda) \tag{4.12}$$

A mes, a partir de (4.8) i (4.9) tenim

$$g = \chi(0) g_0 \tag{4.13}$$

Relacions que comporten que $\chi(\infty)$ és la matriu unitat.

Hi ha encara una altra condició que hauria de satisfer g, $\det g = -\rho^2$, amb tot, si aquesta condició no es manté en fer la transformació $\chi(0)$, sempre podem obtenir una solució física g_F fent la renormalització

$$g_F = \rho(-\det g)^{-1/2}\, g \tag{4.14}$$

Es fàcil de veure que g_F també satisfà l'equació (4.3) si

$$[\rho(\ln(\det g))_{,\rho}]_{,\rho} + \rho(\ln(\det g))_{,zz} = 0$$

Anem ara a construir les solucions solitòniques. Anomenem g una solució tipus solitònic si el determinant de χ s'anul.la en alguns punts del pla λ i χ^{-1} hi té pols simples. Per tant, per a una solució solitònica pura, χ^{-1} pren la forma

$$\chi^{-1} = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{\lambda - \nu_k} \tag{4.15}$$

On I indica la matriu unitat i la matriu S_k no depen de λ. La matriu χ^{-1} té n pols a $\lambda = \nu_k$. L'equació (4.12), per tant, comporta que χ també té n pols a $\lambda = \mu_k$, on $\mu_k = -\frac{\rho^2}{\nu_k}$. Es dir:

$$\chi = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{\lambda - \mu_k} \tag{4.16}$$

La matriu R_k està lligada amb la S_k per l'equació $\chi\chi^{-1} = I$. La condició (4.11) exigeix que si μ_k és complex, el terme complex conjugat $R_k^* / (\lambda - \mu_k^*)$, també estigui incluit en la suma de (4.16).

Substituim (4.16) a (4.10) i desenvolupem les equacions als pols $\lambda = \mu_k$. Dels termes amb $(\lambda - \mu_k)^{-2}$ trobem

$$\begin{aligned} &\mu_{k,z} + 2\mu_k(\mu_k^2 + \rho^2)^{-1} = 0 \\ &\mu_{k,\rho} - 2\rho\mu_k(\mu_k^2 + \rho^2)^{-1} = 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Això és:

$$\mu_k^2 - 2(W_k - Z)\mu_k - \rho^2 = 0 \tag{4.18}$$

On W_k és una constant arbitrària. Degut a la presència de l'operador ∂_λ tant a D_1 com a D_2, tenim trajectòries de pols $\mu_k(\rho, z)$ i no pols estacionaris. Anàlisis més detallades mostren que la matriu R_k no és invertible i que té la forma

$$(R_k)_{AB} = n_A^{(k)} \; m_{(B)}^{(k)} \tag{4.19}$$

Els vectors $m_A^{(k)}$ i $n_A^{(k)}$ venen determinats per les equacions *)

$$m_A^{(k)} = m_{C_0}^{(k)} [\psi_0^{-1}(\mu_k, \rho, z)]_{CA} \tag{4.20}$$

$$n_A^{(k)} = \sum_{l=1}^{n} D_{lk} \mu_l^{-1} N_A^{(l)} \tag{4.21}$$

on $m_{C_0}^{(k)}$ és una constant arbitrària i

$$N_A^{(k)} = m_C^{(k)} (g_0)_{CA} \tag{4.22}$$

La matriu D ve definida per

$$\sum_{m=1}^{n} D_{km} \Gamma_{ml} = \delta_{kl}$$

$$\Gamma_{kl} = m_C^{(k)} (g_0)_{CB} m_B^{(l)} (\rho^2 + \mu_k \mu_l)^{-1} \tag{4.23}$$

Així trobem les solucions n-solitòniques pures amb el fons de la mètrica g_0

$$g = \chi(0) g_0 = g_0 - \sum_{k=1}^{0} R_k \mu_k^{-1} g_0 \tag{4.24}$$

o bé

$$g_{AB} = (g_0)_{AB} - \sum_{k,l=1}^{n} D_{kl} \mu_k^{-1} \mu_l^{-1} N_A^{(k)} N_B^{l} \tag{4.25}$$

Observem, que fora del pas per trobar ψ_0 a partir d' una solució donada g_0, per trobar la solució solitònica només calen manipulacions algebràiques.

---

*) Sumem els índex llatins A, B, C,... repetits.

A més, Belinskiǐ i Zakharov han mostrat que podem donar una expressió simple del determinant de g:

$$\det g = (-1)^n \rho^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k^2\right)\det g_0 \tag{4.26}$$

Expressió que mostra que solament per a n parell les signatures de g i g_0 coincideixen. Així si volem obtenir una solució física amb un n imparell ens caldrà partir d'una mètrica g_0 amb signatura no física.

Considerant ara el coeficient f, cal destacar que per a la solució n-solitònica f pot integrar-se explicitament. En termes de la corresponent solució "llavor" f_0, el coeficient f ve donat per:

$$f = Cf_0\rho^{-n^2/2}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{n+1}\left[\prod_{\substack{k,l=1\\ k>l}}^{n}(\mu_k-\mu_l)^2\right]^{1}\det\Gamma_{kl} \tag{4.27}$$

on C és una constant arbitrària i el claudator val 1 quan n=1.

Passant a resultats concrets direm que les solucions 2-solitòniques obtingudes a partir de la mètrica de Minkowski han estat estudiades per Belinskiǐ i Zakharov (1980). Es poden escollir dos pols reals o dos pols complex conjugats. En el primer cas s'obté la mètrica de Kerr-NUT amb horitzons i en el segon la mètrica de Kerr-NUT nua.

Les solucions 2n solitòniques han estat estudiades per Alekseev i Belinskii (1981) i la mètrica que s'obté s'interpreta en el límit estàtic ($g_{01}=0$) com una cadena de forats negres de Schwazschild situats a l'eix de simetria i units per segments singulars. En el cas estacionari ($g_{01}\neq 0$) s'obté una superposició no lineal de mètriques de Kerr-NUT i poden posarse condicions en els paràmetres de tal manera que l'eix z sigui regular entre les partícules de Kerr-NUT, resultant compensada l'atracció gravitatòria per la repulsió rotatòria (en una situació d'inestabilitat). Si considerem la superposició de n mètriques de Kerr amb masses iguals i el mateix moment angular i **hom** fa que s'aproximin fins coincidir, s'obté una solució de la classe de Tomimatsu-Sato amb $\delta = n$ (Tomimatsu, 1980; Tomimatsu & Sato, 1981).

El cas més simple de solucions 2n+1 solitòniques que s'obtenen a partir d'una mètrica no física relacionada amb la mètrica de Kasner (que conté l'euclidiana) ha estat publicat per Verdaguer (1982).

El seu estudi és presentat en aquesta memòria als paragrafs 3 i 4. Trobem que la família de solucions obtinguda depen de dos paràmetres. Un d'ells, q, es relaciona amb la mètrica llavor i es responsable de la força del camp (q=0 dóna Minkowski). Es interessant destacar que la mètrica de Minkowski ha estat, d'aquesta manera, generada pel mètode del scattering invers a partir d'una llavor no física. L'altre paràmetre, D, està lligat amb la rotació del camp, aleshores quan $D \to \infty$ les mètriques esdevenen estàtiques. Per classificar les solucions hem utilitzat el formulisme de tètrades nul.les (Capítol I). Alguns casos interessants són el membre $q = -1/2$ que correspon al tipus I de Bel-Petrov amb un límit de "rotació extrema" que pertany a la classe de Van Stockum i és tipus II; el membre $q = 0$ que és l'espai minkowskià i el membre $q = 1$ que és una mètrica tipus D en el límit estàtic i pot comparar-se amb la solució de Schwarzchild en algunes regions de l'espai temps.

3.- Classificació y propietats de les solucions 1-solitòniques obtingudes d'una mètrica no física tipus Kasner

Com hem vist al paràgraf anterior per a la generació de solucions estacionàries i axisimètriques de les equacions d'Einstein al buit amb la tècnica solitònica, cal una mètrica llavor. Si prenem com llavor la mètrica no física

$$ds^2 = \rho^{2q^2-1/2}(d\rho^2+dz^2)+\rho^{1-2q}d\phi^2+\rho^{1+2q}dt^2 \qquad (4.28)$$

que es redueix a la solució de Kasner cosmològica mitjançant una transformació complexa de coordenades, la solució 1-solitònica que s'obté és la família biparamètrica

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{C\rho^{2q^2}\,\mathrm{Ch}(q\psi+D)}{\sqrt{\rho^2+z^2}}(d\rho^2+dz^2) + \\ &+\frac{1}{\mathrm{Ch}(q\psi+D)}\Big[-\rho^{1+2q}\mathrm{Sh}(q\psi+\tfrac{\psi}{2}+D)dt^2- \\ &-\rho^{1-2q}\mathrm{Sh}(-q\psi+\tfrac{\psi}{2}-D)d\phi^2-2\rho\,\mathrm{Ch}\,\tfrac{\psi}{2}d\phi dt\Big] \end{aligned} \qquad (4.29)$$

amb

$e^{-\psi} = \left[\frac{\rho}{\mu}\right]^2$, $\mu = -z+\sqrt{\rho^2+z^2}$ i q,D dos paràmetres arbitraris (Verdaguer, 1982).

Per classificar les solucions compararem (4.29) amb (3.5) i utilitzarem les equacions (3.19) que ens donen les projeccions del tensor de Weyl en la tètrade (3.10). A partir d'aquí i gràcies a l'algoritme de Rusell-Clark (3.31) és possible trobar el tipus de Bel-Petrov. Els càlculs poden trobar-se a l'annex. En general les solucions (4.29) són del tipus I del Bel-Petrov. Destaquem els casos següents:

* q=0. En aquest cas tots els escalars ψ són zero. L'espai-temps és pla. Podem trobar la transformació que ens mostra explicitament que és l'espai de Minkowski.

Quan q=0, (4.29) queda:

$$ds^2 = \frac{CChD}{\sqrt{\rho^2+z^2}}(d\rho^2+dz^2) + \frac{1}{ChD}\left[-\rho Sh\left(\frac{\psi}{2}+D\right)dt^2 - \right.$$
$$\left. -\rho Sh\left(\frac{\psi}{2}-D\right)d\phi^2 - 2\rho Ch\,\frac{\psi}{2}d\phi dt\right] \tag{4.30}$$

fent una rotació al pla $t\phi$ d'angle $\theta = -\frac{1}{2}$ arcotg(ShD) podem escriure aquesta mètrica com:

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}(d\rho^2+dz^2) + (z+\sqrt{\rho^2+z^2})d\phi^2 - (z+\sqrt{\rho^2+z^2})dt^2 \tag{4.31}$$

la qual reconeixem directament com plana (Kramer & al. 1980) o bé fent ara el canvi de coordenades:

$$R = [(z^2+\rho^2)^{1/2}+z]^{1/2}$$
$$z = Ch\{t\cdot[(z^2+\rho^2)^{1/2}-z]^{1/2}\} \tag{4.32}$$
$$T = Sh\{t\cdot[(z^2+\rho^2)^{1/2}-z]^{1/2}\}$$

reduïm a la mètrica de Minkowski en cilíndriques,

$$ds^2 = dR^2+dz^2+R^2d\phi^2-dT^2 \tag{4.33}$$

Veiem, doncs com la tècnica del scattering invers genera la mètrica de Minkowski a partir d'una llavor no física que pot ser deduïda de la mètrica de Kasner "isotròpica" (q=0). En aquest cas coneixem les solucions 2n+1 solitòniques per a un n general ja que una solució 2n+1 solitònica pot interpretar-se com la 2n solitònica generada a partir de la 1 solitònica, i com s'ha dit al §2 són conegudes les solucions 2n solitòniques generades a partir de Minkowski.

* $q \neq 0$. Límit D=0 o de "rotació extrema". La raó d' aquest nom la veurem en el següent paràgraf.

Quan $q=-1/2$, la mètrica llavor és la mètrica euclídiana. La solució pren la forma

$$ds^2 = C\rho^{1/2}(d\rho^2+dz^2) - 2\rho dt d\phi + 2z\rho d\phi^2 \tag{4.34}$$

i és un membre de la classe de van Stockum (Van Stockum 1973) amb tipus II de Bel-Petrov.

Limit $D\to\infty$ o "estàtic". En aquest límit els escalars ψ prenen una forma particularment simple:

$$\begin{aligned}\psi_0 = \psi_4^* = -\frac{q}{2B}\,\rho^{-2q^2-1}\,\frac{e^{-q\psi}}{\mathrm{Ch}\,\frac{\psi}{2}} & \left| -2+\mathrm{Sh}^2\frac{\psi}{2} - 3q\,\mathrm{Sh}\,\frac{\psi}{2}\mathrm{Ch}\,\frac{\psi}{2} + \right. \\ & \left. + 2q^2\,\mathrm{Ch}^2\frac{\psi}{2} + 3i\left(\mathrm{Sh}\frac{\psi}{2} - q\,\mathrm{Ch}\frac{\psi}{2}\right)\right| . \\ \psi_2 = \frac{q}{2B}\rho^{-2q^2-1}e^{-q\psi}\left(\mathrm{Sh}\frac{\psi}{2} - q\,\mathrm{Ch}\frac{\psi}{2}\right) &\end{aligned} \tag{4.35}$$

A partir de la classificació de Bel-Petrov per a mètriques tipus Lewis-Papapetrou §3 veiem que, en general, per a un valor arbitrari de q, les mètriques son tipus I, i a part del cas q=0 en que tenim l'espai pla, solament podria haver-hi un cas tipus D(1), quan $\psi_0, \psi_4 \neq 0$ i $\psi_0\psi_4 = 9\psi_2^2$ aquesta darrera equació s'escriu:

$$\left|1+q\,\mathrm{Ch}\,\frac{\psi}{2}\mathrm{Sh}\,\frac{\psi}{2} - \frac{(2q^2+1)}{3}\,\mathrm{Ch}^2\frac{\psi}{2}\right|^2 = \mathrm{Sh}^2\frac{\psi}{2}\left(\mathrm{Sh}\frac{\psi}{2} - q\,\mathrm{Ch}\frac{\psi}{2}\right)^2$$

i té per solució $q=\pm 1$.

En concret per a q=1 (el cas q=-1 es equivalent, només cal fer el canvi $t \rightleftarrows \phi$) la solució tipus D pren la forma:

$$ds^2 = \frac{B}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\,\rho^2 e^{\psi}(d\rho^2+dz^2)+\frac{e^{-\psi/2}}{\rho}\,d\phi^2-\rho^3 e^{\psi/2}dt^2 \tag{4.36}$$

Per estudiar aquesta mètrica considerarem els seus escalars de curvatura.

L'únic escalar de curvatura no nul és:

$$I = 12\psi_2^2 = \frac{3e^{-3\psi}}{B^2\ \rho^6} = \frac{3}{B^2\mu^6} \tag{4.37}$$

El significat del qual pot entendre's millor si emprem coordenades esferoidals:

$$\begin{aligned} \rho &= \sigma(x^2-1)^{1/2}(1-\rho^2)^{1/2} \\ z &= \sigma xy \qquad\qquad \sigma = \text{constant} \end{aligned} \tag{4.38}$$

Que podem relacionar amb les coordenades de Boyer-Lindquist (r,θ) mitjançant

$$\begin{aligned} \sigma x &= r-m \\ y &= \cos\theta \end{aligned} \tag{4.39}$$

L'escalar de curvatura (4.37) en el límit de r gran s' escriu: $I = \dfrac{3}{B^2 r^6(1-\cos\theta)^6}$ que podem comparar amb l'invariant d'Schwarzschild: $I_S = \dfrac{48\ M^2}{r^6}$

Suggerint-nos una interpretació física per a la constant B. L'escalar de curvatura (4.40) es singular per $\theta = 0$, per tant la solució (4.36) no és asimptoticament plana. Sería interessant estudiar si existeix una solució assimptoticament plana que pogués ser aproximada per la (4.36) en determinades regions de l'espai-temps d'una manera similar, com això és possible per a les mètriques de Kinnersley-Kelly (1974) tipus "Kerr extrem". Observem que en general els escalars de curvatura es comporten en termes de r com r^{-4q^2-2} aleshores per a q grans el camp s'anul.la rapidament. El sentit de q queda, doncs, clar.

4.- La formulació d'Ernst. Obtenció de solucions relacionades assimptoticament planes

El mètode que introduí F.J. Ernst (Ernst, 1968) redueix les equacions d'Einstein per al cas estacionari i axisimètric a un sistema equivalent més simple d'equacions diferencials que resulta útil en la recerca de noves solucions i de cara una interpretació física. Primerament exposarem breument aquesta formulació i després l'aplicarem al nostre cas de solucions 1-solitòniques (4.29).

Podem escriure l'element de línia general estacionari i axisimètric com:

$$ds^2 = F^{-1}[e^{2k}(d\rho^2+dz^2)+\rho^2 d\phi^2] - F(dt+Ad\phi)^2 \qquad (4.41)$$

El potencial d'Ernst és una funció complexa

$$\varepsilon = F + i\omega$$

en termes del qual les equacions d'Einstein al buit s'escriuen:

$$(\varepsilon+\varepsilon^*)\nabla^2\varepsilon = 2\nabla\varepsilon\cdot\nabla\varepsilon \qquad (4.42.a)$$

$$(\varepsilon+\varepsilon^*)k_{,\xi} = \sqrt{2}\rho\varepsilon_{,\xi}\varepsilon^*_{,\xi} \qquad (4.42.b)$$

$$(\varepsilon+\varepsilon^*)A,_\xi = 2\rho(\varepsilon-\varepsilon^*),_\xi \tag{4.42.c}$$

on $\nabla = (\partial_\rho, \partial_z)$, $\nabla^2 = \partial_\rho^2+\rho^{-1}\partial_\rho+\partial_z^2$ i $\sqrt{2}\partial_\xi = \partial_\rho - i\partial_z$.
Es millor introduir un altre potencial

$$\xi = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \tag{4.43}$$

llavors quan usem coordenades esferoidals (4.38) l'equació (4.42.a) queda:

$$(\xi\xi^*-1)\{[(x^2-1)\xi,_x],_x + [(1-y^2)\xi,_y],_y\} =$$

$$= 2\xi^*[(x^2-1)\xi^2,_x + (1-y^2)\xi^2,_y] \tag{4.44}$$

Aquesta darrera equació té una manifesta simetria en x i y que es pot aprofitar per a l'obtenció de noves solucions (p.e. Tomimatsu & Sato, 1972).

Per a la nostra solució (4.29) calculem en primer lloc el potencial d'Ernst $\varepsilon = F+i\omega$. Identificant directament a la mètrica trobem:

$$F = \frac{\rho^{2q+1}\mathrm{Sh}((q+1/2)\psi+D)}{\mathrm{Ch}(q\psi+D)}$$

Per trobar ω cal integrar (4.42.c), i ho farem introduint coordenades r i θ, $\rho = r\sin\theta$ i $z = r\cos\theta$ convertint aquesta equació en

$$\frac{\partial\omega}{\partial\theta} = -\frac{F^2}{\sin\theta}\frac{\partial A}{\partial r} \qquad \frac{\partial\omega}{\partial r} = \frac{F^2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A}{\partial\theta} \tag{4.45}$$

De la mètrica deduim:

$$A = \frac{r^{2q}\sin\theta^{-1-2q}}{\mathrm{Sh}((q+1/2)\psi+D)} \quad \text{amb} \quad e^{-\psi} = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

Substituint $\frac{\partial A}{\partial r}$ i $\frac{\partial A}{\partial \theta}$ a (4.45) i integrant trobem finalment

$$\omega = -\frac{r^{1+2q}\sin^{2q}\theta}{Ch(q\psi+D)} = -\frac{\rho^{2q}\sqrt{\rho^2+z^2}}{Ch(q\psi+D)}$$

Així el potencial d'Ernst per a la família (4.29) és:

$$\varepsilon = \frac{\rho^{1+2q}}{Ch(q\psi+D)}\{Sh[(q+\frac{1}{2})\psi+D] - \frac{i}{\rho}\sqrt{\rho^2+z^2}\} \qquad (4.46)$$

En el límit estàtic ($D\to\infty$) el potencial d'Ernst (4.46) es redueix a la família de Weyl (no plana) següent:

$$\varepsilon = \mu\rho^{2q} \qquad (4.47)$$

Que pot obtenir-se "combinant" les solucions planes $\varepsilon = \mu$ i $\varepsilon = \rho$ (Kramer et al., 1980).

Així la solució 1-solitònica (4.29) es pot interpretar com la generalització estacionària de la familia estàtica de Weyl (4.47).

Quan $q = -1/2$ el potencial d'Ernst és particularment interessant. En termes de les coordenades esferoidals (4.38) i en el limit de x gran es redueix a

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\gamma+y} - \frac{i\eta}{\gamma+y} \qquad (4.48)$$

On hem introduit $\gamma = \mathrm{Coth}D$ i $\eta = \sqrt{\gamma^2-1}$. Aquest potencial límit també és solució de l'equació d'Ernst. (Per veure-ho, es convenient introduir el potencial ξ definit a (4.43) i substituin a l'equació (4.44). Aprofitant la simetria de l'equació (4.44) en les coordenades x i y podem construir la nova solució

$$\varepsilon = i\,\frac{\sqrt{x^2-1}-\eta}{\gamma+x} \qquad (4.49)$$

que ens suggereix la solució estàtica següent

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{x^2-1} - \eta}{\gamma+x} \tag{4.50}$$

Més exactament, aquest darrer potencial correspon a una solució electrostàtica que s'obté de la solució del buit

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{x^2-1} + \eta\gamma^{-1} x}{\gamma+x} \tag{4.51}$$

mitjançant una transformació d'invariància finita del tipus $\varepsilon' = \varepsilon - 2\bar{\beta}\phi - \beta\bar{\beta}$, $\phi' = \phi+\beta$ amb $\beta = \sqrt{\eta/\gamma}$, $\gamma > 1$ (Kramer et al., 1980 §30.3).

Es interessant de constatar que les solucions (4.50) i (4.51) són asimptoticament planes i que a més, quan $\gamma = 1$ contenen la mètrica de Zipoy-Voorhees

$$\varepsilon = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\delta} \tag{4.52}$$

amb paràmetre de deformació $\delta = 1/2$.

Voorhes (1970) donà una interpretació física a la família (4.52) relacionant-la amb el membre $\delta = 1$ que és la mètrica de Schwarzschild. Quan fem servir coordenades (r,θ) i prenem $\sigma = m$, aquestes coordenades poden considerar-se esfèriques i (4.52) dóna el camp d'una partícula de massa m. En general amb coordenades "adaptades a la font" fent $\sigma = \frac{m}{\delta}$, si es desenvolupa ε en termes de (r,θ) per a r gran i es compara amb les coordenades d'Schwarzschild ($\alpha = m$) les solucions (4.52) poden interpretar-se com camps exteriors de barres (si $\delta < 1$) de massa m. Per a $\delta = 1/2$ la barra té longitud 4m.

Per a x gran i γ finit podem desenvolupar (4.51)

$$\varepsilon = 1+\varepsilon\gamma^{\ 1} - (1+\varepsilon\gamma^{\ 1})\gamma\frac{1}{x} + \left|(1+\varepsilon\gamma^{\ 1})\gamma^2 - \frac{1}{2}\right|\frac{1}{x^2} + \ldots$$

Que es pot reduir a la forma usual·

$$\varepsilon = 1 - \frac{2m}{r} + (\text{polinomi en } \cos\theta)\frac{1}{r^2} + \ldots$$

mitjançant una transformació d'Ehlers lligada al paràmetre γ (Cosgrove, 1980).

D'aquesta manera la solució (4.51), almenys assimptoticament, pot interpretar-se com la transformada de la mètrica de Zipoy-Voorhees amb $\delta = 1/2$, mitjançant una transformació d'Ehlers lligada a γ, d'una manera similar a un dels resultats obtinguts per Verdaguer (1982). La relació entre les solucions (4.48) que no són asimptoticament planes i les asimptoticament planes deduides d'elles pot ser similar a la que hi ha entre les solucions tipus "Kerr extrem" de Kinnersley & Kelly (1974) amb les de Tomimatsu & Sato (1972), representant les primeres una regió a les proximitats de l'ergosfera de les darreres. Al nostre cas les solucions 1-solitòniques descriurien alguna regió exterior a les barres (almenys en el limit $\gamma = 1$).

Finalment, comentar que les solucions (4.48) i (4.49) es relacionen amb les trobades per Verdaguer (1982) mitjançant una transformació d'invariància finita $\varepsilon' = \varepsilon + ik$ amb $k = \eta\gamma^{-1}$ i que per a un valor de q general la relació de (4.46) amb solucions asimptòticament planes no és tan evident ja que el potencial d'Ernst, asimptòticament, dependrà de les dues coordenades esferoidals i hom haurà de verificar si es té una solució abans de fer el canvi $x \rightleftarrows y$. De totes maneres hem de recordar que el potencial d'Ernst no té un sentit intrínsec, es dir, que s'haurien d'estudiar d'una manera completa totes les solucions que s'obtingéssin amb els mètodes esmentats.

ANEX

1. Càlcul dels coeficients de spin per al cas $m = m(r,\theta)$ i a = ctant..

De (2.5) i (2.6) construim.

$$\ell_{\mu,\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a\sin\theta\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$n_{\mu,\nu} = \frac{1}{\Sigma}\begin{bmatrix} 0 & (r-m-\dot{m}r) - \frac{r\Upsilon}{\Sigma} & \frac{\Upsilon a^2\sin\theta\cos\theta}{\Sigma} - m'r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [(r-m-\dot{m}r) - \frac{r\Upsilon}{\Sigma}](-a\sin^2\theta) & -\frac{\Upsilon\Omega a\sin\theta\cos\theta}{\Sigma} + m'ra\sin^2\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$m_{\mu,\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}(r+ia\cos\theta)}\begin{bmatrix} 0 & -ia\frac{\sin\theta}{(r+ia\cos\theta)} & ia\cos\theta - \frac{a^2\sin^2\theta}{(r+ia\cos\theta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2r + \frac{\Sigma}{(r+ia\cos\theta)} & 2a^2\sin\theta\cos\theta - \frac{ia\Sigma\sin\theta}{(r+ia\cos\theta)} & 0 \\ 0 & -2ir\sin\theta + \frac{i\Omega\sin\theta}{(r+ia\cos\theta)} & -i\Omega\cos\theta + \frac{a\Omega\sin^2\theta}{(r+ia\cos\theta)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\ell^\mu n^\nu - \ell^\nu n^\mu = \frac{1}{\Sigma}\begin{bmatrix} 0 & -\Omega & 0 & 0 \\ \Omega & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\ell^\mu m^\nu - \ell^\nu m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r+ia\cos\theta)}\begin{bmatrix} 0 & -ia\sin\theta & 0 & 0 \\ ia\sin\theta & 0 & 1 & \frac{i}{\sin\theta} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\sin\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$n^{\mu}m^{\nu}-n^{\nu}m^{\mu}=\frac{1}{\sqrt{2}\,\Sigma\,(r+ia\cos\theta)}\begin{pmatrix}0 & \frac{ia\Upsilon\sin\theta}{2} & \Omega & \frac{i\Sigma}{\sin\theta}\\ -\frac{ia\Upsilon\sin\theta}{2} & 0 & -\frac{\Upsilon}{2} & -\frac{i\Upsilon}{2\sin\theta}\\ -\Omega & \frac{\Upsilon}{2} & 0 & -a\\ -\frac{i\Sigma}{\sin\theta} & \frac{i\Upsilon}{2\sin\theta} & a & 0\end{pmatrix}$$

$$m^{\mu}\bar{m}^{\nu}-m^{\nu}\bar{m}^{\mu}=\frac{1}{\Sigma}\begin{pmatrix}0 & 0 & ia\sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -ia\sin\theta & 0 & 0 & -\frac{i}{\sin\theta}\\ 0 & 0 & \frac{i}{\sin\theta} & 0\end{pmatrix}$$

I de l'equació (1.30) trobem

$$\lambda_{311}=l_{\mu,\nu}(m^{\mu}l^{\nu}-m^{\nu}l^{\mu})=0$$

$$\lambda_{314}=l_{\mu,\nu}(m^{\mu}\bar{m}^{\nu}-m^{\nu}\bar{m}^{\mu})=-\frac{2ai\cos\theta}{\Sigma}$$

$$\lambda_{312}=l_{\mu,\nu}(m^{\mu}n^{\nu}-m^{\nu}n^{\mu})=\frac{2a^{2}\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{2}\,\Sigma\,(r+ia\cos\theta)}$$

$$\lambda_{211}=l_{\mu,\nu}(n^{\mu}l^{\nu}-n^{\nu}l^{\mu})=0$$

$$\lambda_{223}=n_{\mu,\nu}(n^{\mu}m^{\nu}-n^{\nu}m^{\mu})=\frac{1}{\sqrt{2}\,\Sigma(r+ia\cos\theta)}\Big[\frac{ia\Upsilon\sin\theta}{2}\Big\{\frac{(r-m-\dot{m}r)}{\Sigma}-\frac{r\Upsilon}{\Sigma^{2}}\Big\}+$$
$$+\frac{\Upsilon a^{2}\sin\theta\cos\theta}{\Sigma^{2}}\Omega+\Big\{\frac{(r-m-\dot{m}r)}{\Sigma}-\frac{r\Upsilon}{\Sigma^{2}}\Big\}(-a\sin^{2}\theta)\frac{i\Upsilon}{2\sin\theta}-\frac{\Upsilon a\,\Omega\sin\theta\cos\theta\,a}{\Sigma^{2}}$$
$$-\frac{m'r}{\Sigma}\Omega+\frac{m'ra\sin^{2}\theta}{\Sigma}a\Big]=-\frac{m'r}{\sqrt{2}\,\Sigma(r+ia\cos\theta)}$$

$$\lambda_{324}=n_{\mu,\nu}(m^{\mu}\bar{m}^{\nu}-m^{\nu}\bar{m}^{\mu})=\frac{1}{\Sigma}\Big[ia\sin\theta\Big(\frac{\Upsilon a^{2}\sin\theta\cos\theta}{\Sigma^{2}}-\frac{m'r}{\Sigma}\Big)+$$
$$+\frac{i}{\sin\theta}\Big(-\frac{\Upsilon\Omega a\sin\theta\cos\theta}{\Sigma^{2}}+\frac{m'ra\sin^{2}\theta}{\Sigma}\Big)\Big]=-\frac{ia\Upsilon\cos\theta}{\Sigma^{2}}$$

$$\lambda_{123}=n_{\mu,\nu}(l^{\mu}m^{\nu}-l^{\nu}m^{\mu})=0$$

$$\lambda_{122} = m_{\mu;\nu}(\ell^\mu m^\nu - \ell^\nu m^\mu) = \frac{1}{\Sigma}(-\Omega + a^2\sin^2\theta)\left(\frac{(r-m-\dot m r)}{\Sigma} - \frac{r\Upsilon}{\Sigma^2}\right) = \frac{r\Upsilon}{\Sigma^2} - \frac{(r-m-\dot m r)}{\Sigma}$$

$$\lambda_{331} = m_{\mu;\nu}(m^\mu \ell^\nu - m^\nu \ell^\mu) = -\frac{1}{2(r+ia\cos\theta)^3}\left[-a^2\sin^2\theta + 2r(r+ia\cos\theta) - \Sigma - 2r(r+ia\cos\theta) + \Omega\right]$$
$$= 0$$

$$\lambda_{233} = m_{\mu;\nu}(m^\mu m^\nu - m^\nu m^\mu) = \frac{1}{2\Sigma(r+ia\cos\theta)^3}\left[\frac{a^2\Upsilon\sin^2\theta}{2} - r\Upsilon(r+ia\cos\theta) + \frac{\Upsilon\Sigma}{2} + r\Upsilon(r+ia\cos\theta)\right.$$
$$\left. - \frac{\Upsilon\Omega}{2} + \dots\right] = 0$$

$$\lambda_{431} = m_{\mu;\nu}(\bar m^\mu \ell^\nu - \bar m^\nu \ell^\mu) = -\frac{1}{2\Sigma(r+ia\cos\theta)}\left[a^2\sin^2\theta + 2r(r+ia\cos\theta) - \Sigma + 2r(r+ia\cos\theta) - \right.$$
$$\left. - \Omega\right] = \frac{1}{(r+ia\cos\theta)} - \frac{2r}{\Sigma} = -\frac{1}{r-ia\cos\theta}$$

$$\lambda_{432} = m_{\mu;\nu}(\bar m^\mu m^\nu - \bar m^\nu m^\mu) = -\frac{1}{2\Sigma^2(r+ia\cos\theta)}\left[-a^2\sin^2\theta\frac{\Upsilon}{2} - r\Upsilon(r+ia\cos\theta) + \frac{\Upsilon\Sigma}{2} - \right.$$
$$\left. - \Upsilon r(r+ia\cos\theta) + \Omega\frac{\Upsilon}{2}\right] = \frac{r\Upsilon}{\Sigma^2} - \frac{\Upsilon}{2\Sigma(r+ia\cos\theta)}$$

$$\lambda_{231} = m_{\mu;\nu}(m^\mu \ell^\nu - m^\nu \ell^\mu) = -\frac{1}{\sqrt2\,\Sigma(r+ia\cos\theta)^2}\left[ia\Omega\sin\theta + 2iar\sin\theta(r+ia\cos\theta) - \right.$$
$$\left. - ia\Omega\sin\theta\right] = -\frac{2iar\sin\theta}{\sqrt2\,\Sigma(r+ia\cos\theta)}$$

$$\lambda_{344} = \bar m_{\mu;\nu}(m^\mu \bar m^\nu - m^\nu \bar m^\mu) = \frac{1}{\sqrt2\,\Sigma(r-ia\cos\theta)^2}\left[a^2\sin\theta\cos\theta(r-ia\cos\theta) - ia^3\sin^3\theta - \right.$$
$$\left. - \Omega\cot\theta(r-ia\cos\theta) + ia\Omega\sin\theta\right] = \frac{ia\sin\theta}{\sqrt2(r-ia\cos\theta)^2} - \frac{\cot\theta}{\sqrt2(r-ia\cos\theta)}$$

I obtenim els coeficients de spin (2.9) a partir d'aquests resultats emprant les relacions (2.7).

2. <u>Càlcul dels escalars ϕ_{ab} i ψ_a per al cas $m=m(r,\theta)$, a=ctant. a partir de les equacions de Newman-Penrose</u>

Escrivim els coeficients de spin en funció de f éssent

$$\nu = \frac{m'r}{\sqrt2}\rho^2\rho^* \qquad \pi = -\frac{ia\sin\theta}{\sqrt2}\rho^2 \qquad \mu = \frac{\Upsilon}{2}\rho^2\rho^* \qquad \alpha = \pi - \beta^*$$

$$\beta = -\frac{\cot\theta}{2\sqrt2}\rho^* \qquad \tau = \frac{ia\sin\theta}{\sqrt2}\rho\rho^* \qquad \gamma = \mu - \frac{(r-m-\dot m r)}{2}\rho\rho^*$$

Per als càlculs ens cal

$$\rho + \rho^* = 2r\rho\rho^* \qquad \rho - \rho^* = 2ia\cos\theta\, \rho\rho^*$$

$$\dot{\rho} = -\rho^2 \qquad \dot{\rho}^* = -\rho^{*2} \qquad \rho' = -ia\sin\theta\, \rho^2 \qquad \rho^{*\prime} = -ia\sin\theta\, \rho^{*2}$$

I les derivades direccionals són:

$$D\rho = \rho^2 \qquad D\beta = -\frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}}\rho^{*2} \qquad D\pi = -\frac{2ia\sin\theta}{\sqrt{2}}\rho^3$$

$$D\tau = -\frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}}(\rho^2\rho^* + \rho\rho^{*2}) = \frac{2iar\sin\theta}{\sqrt{2}}\rho^2\rho^{*2}$$

$$D\mu = -(r - m - \dot{m}r)\rho^2\bar{\rho} + \Upsilon\rho^3\rho^* + \frac{\Upsilon}{2}\rho^2\rho^{*2}$$

$$D\gamma = D\mu + \frac{(1 - 2\dot{m} - \ddot{m}r)}{2}\rho\rho^* - (r - m - \dot{m}r)r\rho^2\rho^{*2}$$

$$D\nu = -\frac{(\dot{m}'r + m')}{\sqrt{2}}\rho^2\rho^* + \frac{2m'r}{\sqrt{2}}\rho^3\rho^* + \frac{m'r}{\sqrt{2}}\rho^2\rho^{*2}$$

$$D\alpha = -\frac{2ia\sin\theta}{\sqrt{2}}\rho^3 + \frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}}\rho^2$$

$$\Delta\pi = \frac{ia\Upsilon\sin\theta}{\sqrt{2}}\rho^4\rho^*$$

$$\Delta\alpha = \frac{ia\Upsilon\sin\theta}{\sqrt{2}}\rho^4\rho^* - \frac{\Upsilon\cot\theta}{4\sqrt{2}}\rho^3\rho^*$$

$$\Delta\beta = \frac{\Upsilon\cot\theta}{4\sqrt{2}}\rho\rho^{*3}$$

$$\Delta\mu = \frac{\Upsilon}{2}(r - m - \dot{m}r)\rho^3\rho^{*2} - \frac{\Upsilon^2}{2}\rho^4\rho^{*2} - \frac{\Upsilon^2}{4}\rho^3\rho^{*3}$$

$$\delta\pi = \frac{ia\cos\theta}{2}\rho^2\rho^* + a^2\sin^2\theta\, \rho^3\rho^*$$

$$\delta\tau = -\frac{ia\cos\theta}{2}\rho\rho^{*2} - ia^3\sin^2\theta\cos\theta\, \rho^2\rho^{*3}$$

$$\delta\mu = \frac{rm'}{\sqrt{2}}\rho^2\rho^{*2} + \frac{ia\Upsilon\sin\theta}{\sqrt{2}}\rho^3\rho^{*2} - \frac{ia\Upsilon\sin\theta}{2\sqrt{2}}\rho^2\rho^{*3}$$

$$\delta\gamma = \delta\mu - \frac{(m' + \dot{m}'r)}{2\sqrt{2}}\rho\rho^{*2} + \frac{(r - m - \dot{m}r)}{\sqrt{2}}a^2\sin\theta\cos\theta\, \rho^2\rho^{*3}$$

$$\delta\nu = -\frac{m''r}{2}\rho^2\rho^{*2} + iar\sin\theta\, m'\rho^3\rho^{*2} - \frac{iarm'\sin\theta}{2}\rho^2\rho^{*3}$$

$$\delta\alpha = \delta\pi + \frac{1}{4\sin^2\theta}\rho\rho^* + \frac{ia\cos\theta}{4}\rho^2\rho^*$$

$$\delta^*\beta = -\frac{1}{4\sin^2\theta}\rho\rho^* + \frac{ia\cos\theta}{4}\rho\rho^{*2}$$

Ara només cal substituir a les equacions (1.58).-Indiquem en cada cas l'equació (o equacions) que considerem.-

(a) $$\Phi_{00} = D\rho - \rho^2 = 0$$

(d) $$\Phi_{10} = D\alpha - \rho\alpha - \pi\rho = -\frac{2ia\sin\theta}{\sqrt2}\rho^3 + \cancel{\frac{\cot\theta}{2\sqrt2}\rho^2} + 2\rho\frac{ia\sin\theta}{\sqrt2}\rho^2 - \cancel{\frac{\cot\theta}{2\sqrt2}\rho^2} = 0$$

(p) $$\Phi_{02} = \delta\tau - \tau(\tau+\beta-\alpha^*) = -\frac{ia\cos\theta}{2}\rho\rho^{*2} + \frac{a^2\sin^2\theta}{2}(-\rho^2\rho^{*2} + \rho\rho^{*3}) +$$
$$+ \frac{ia\sin\theta}{\sqrt2}\rho\rho^*\left(-\frac{ia\sin\theta}{\sqrt2}\rho\rho^* + \frac{2\cot\theta}{2\sqrt2}\rho^* - \frac{ia\sin\theta}{\sqrt2}\rho^{*2}\right) = 0$$

(o) $$\Phi_{12} = \delta\gamma - \Delta\beta - \gamma(\tau-\alpha^*-\beta) - \mu\tau + \beta(\gamma-\gamma^*-\mu) =$$
$$= \frac{rm'}{\sqrt2}\rho^2\rho^{*2} + \frac{ia\Upsilon\sin\theta}{\sqrt2}\rho^3\rho^{*2} - \frac{ia\Upsilon\sin\theta}{2\sqrt2}\rho^2\rho^{*3} - \frac{(m'+\dot m' r)}{2\sqrt2}\rho\rho^{*2}$$
$$+ \frac{(r-m-\dot m r)}{\sqrt2}a^2\sin\theta\cos\theta\,\rho^2\rho^{*3} - \frac{\Upsilon\cot\theta}{4\sqrt2}\rho\rho^{*3} - \frac{ia\Upsilon\sin\theta}{\sqrt2}\rho^3\rho^{*2}$$
$$+ \frac{ia\Upsilon\sin\theta}{2\sqrt2}\rho^2\rho^{*3} + \frac{(r-m-\dot m r)}{2\sqrt2}ia\sin\theta\,\rho^2\rho^{*2} - \frac{(r-m-\dot m r)}{2\sqrt2}ia\sin\theta\,\rho\rho^{*3}$$
$$+ \frac{\Upsilon\cot\theta}{4\sqrt2}\rho\rho^{*3} = \frac{rm'}{\sqrt2}\rho^2\rho^{*2} - \frac{(m'+\dot m' r)}{2\sqrt2}\rho\rho^{*2}$$

(m) $$\Phi_{22} = \delta\nu - \Delta\mu - \mu^2 - \mu(\gamma+\gamma^*) + \nu^*\pi - \nu(\tau-3\beta-\alpha^*) =$$
$$= \delta\nu - \Delta\mu - 2\mu^2 - \mu\mu^* - (r-m-\dot m r)\rho\rho^* + \nu^*\pi - \nu\tau + 2\nu\beta + \nu\alpha^* =$$
$$= -\frac{m'' r}{2}\rho^2\rho^{*2} + iar\sin\theta\, m'\rho^3\rho^{*2} - \frac{iar\sin\theta\, m'}{2}\rho^2\rho^{*3} - \frac{\Upsilon(r-m-\dot m r)}{2}\rho^3\rho^{*2}$$
$$+ \frac{\Upsilon^2}{2}\rho^4\rho^{*2} + \frac{\Upsilon^2}{4}\rho^3\rho^{*3} - \frac{\Upsilon^2}{2}\rho^4\rho^{*2} - \frac{\Upsilon^2}{4}\rho^3\rho^{*3} + (r-m-\dot m r)\frac{\Upsilon}{2}\rho^3\rho^{*2}$$
$$- \frac{ia\sin\theta\, m' r}{2}\rho^3\rho^{*2} - \frac{ia\sin\theta\, m' r}{2}\rho^3\rho^{*2} - \frac{m' r\cot\theta}{2}\rho^2\rho^{*2} +$$
$$+ \frac{ia\sin\theta\, m' r}{2}\rho^2\rho^{*3} = -\frac{r(m''+\cot\theta\, m')}{2}\rho^2\rho^{*2}$$

D'una manera similar es calculen els altres escalars. Els resultats són (sense detallar alguns passos)

(f)+(l) $$\Phi_{11} = \frac12[D\gamma + \delta\alpha - \delta^*\beta - \alpha(\tau+\pi^*) - \beta(\tau^*+\pi) - \tau\pi - \mu\rho - \alpha\alpha^* - \beta\beta^*$$
$$+ 2\alpha\beta - \gamma(\rho-\rho^*)] = \frac12[D\gamma + \delta\alpha - \delta^*\beta - 2\pi\tau - 2\pi\pi^* + \beta^*\tau + 2\beta^*\pi^*$$
$$- \beta\tau^* - \mu\rho - 4\beta\beta^* + 2\pi\beta - \gamma(\rho-\rho^*)] = \dot m r^2\rho^2\rho^{*2} - \frac{(2\dot m + \dot m' r)}{4}\rho\rho^*$$

(b) $\Psi_0 = 0$

(e) $\Psi_1 = D\beta - \beta\rho^* = 0$

(r) $$\Psi_3 = \delta^*\gamma - \Delta\alpha + \nu\rho + \alpha(\gamma^* - \mu^*) + \gamma(\beta^* - \tau^*) =$$
$$= \frac{2r m'}{\sqrt{2}}\rho^3\rho^* - \frac{(m' + \dot{m}' r)}{2\sqrt{2}}\rho^2\rho^*$$

(j) $$\Psi_4 = \delta^*\nu + \nu(3\alpha + \beta^* + \pi - \tau^*) = \delta^*\nu + 4\pi\nu - 2\nu\beta^* - \nu\tau^* =$$
$$= \frac{r(m'\cot\theta - m'')}{2}\rho^3\rho^* - iar\sin\theta\, m'\rho^4\rho^*$$

(f)+(h) $$\Psi_2 = \frac{1}{3}\left[2D\gamma + D\mu - \delta\pi - 2\alpha(\tau + \pi^*) - 2\beta(\tau^* + \pi) - 2\tau\pi - 2\phi_{11} - \rho^*\mu\right.$$
$$\left. - \pi\pi^* + \pi(\alpha^* - \beta)\right] = \frac{1}{3}\left[2D\gamma + D\mu - \delta\pi - 4\pi\tau - 2\pi\pi^* + 2\beta^*\tau + \right.$$
$$\left. + 2\beta^*\pi^* - 2\beta\tau^* - 4\beta\pi - 2\phi_{11} - \rho^*\mu\right] = -m\rho^3 - \frac{(2\dot{m} + \ddot{m}r)}{6}\rho\rho^* + \dot{m}r\rho^2\rho^*$$

(h) $$\Lambda = \frac{1}{2}\left[D\mu - \delta\pi - \rho^*\mu - \pi\pi^* + \pi\alpha^* - \pi\beta - \Psi_2\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[D\mu - \delta\pi - \rho^*\mu - 2\pi\beta - \Psi_2\right] = \frac{(2\dot{m} + \ddot{m}r)}{12}\rho\rho^*$$

3. Càlcul de λ_{abc} per a la mètrica (3.5) i la tètrade (3.10)

$$\ell_{\mu,\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & \dot{U}e^U & U'e^U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{A}e^U + A\dot{U}e^U + \dot{w}e^{-U} - w\dot{U}e^{-U} & A'e^U + AU'e^U + w'e^{-U} - wU'e^{-U} & 0 \end{bmatrix}$$

$$n_{\mu,\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & \dot{U}e^U & U'e^U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{A}e^U + A\dot{U}e^U - \dot{w}e^{-U} + w\dot{U}e^{-U} & A'e^U + AU'e^U - w'e^{-U} + wU'e^{-U} & 0 \end{bmatrix}$$

$$m_{\mu,\nu} = -\frac{e^{k-U}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\dot{k}-\dot{U}) & (k'-U') & 0 \\ 0 & i(\dot{k}-\dot{U}) & i(k'-U') & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell^{\mu}n^{\nu}-\ell^{\nu}n^{\mu} = \frac{1}{W}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad m^{\mu}\bar{m}^{\nu}-m^{\nu}\bar{m}^{\mu} = e^{2(U-k)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell^{\mu}m^{\nu}-\ell^{\nu}m^{\mu} = \frac{e^{-k}}{2W}\begin{pmatrix} 0 & W+Ae^{2U} & i(W+Ae^{2U}) & 0 \\ -(W+Ae^{2U}) & 0 & 0 & e^{2U} \\ -i(W+Ae^{2U}) & 0 & 0 & ie^{2U} \\ 0 & -e^{2U} & -ie^{2U} & 0 \end{pmatrix}$$

$$n^{\mu}m^{\nu}-n^{\nu}m^{\mu} = -\frac{e^{-k}}{2W}\begin{pmatrix} 0 & -W+Ae^{2U} & i(-W+Ae^{2U}) & 0 \\ -(-W+Ae^{2U}) & 0 & 0 & e^{2U} \\ -i(-W+Ae^{2U}) & 0 & 0 & ie^{2U} \\ 0 & -e^{2U} & -ie^{2U} & 0 \end{pmatrix}$$

D'on trobem les λ's que resulten ser

$$\lambda_{211} = \lambda_{122} = \lambda_{233} = \lambda_{432} = \lambda_{331} = \lambda_{431} = \lambda_{314} = \lambda_{231} = 0 = \lambda_{324}$$

$$\lambda_{311} = -\frac{e^{-k}}{2W\sqrt{2}}\left[\{\dot{U}e^{U}(W+\cancel{A}e^{2U}) - e^{2U}(\dot{A}e^{U} + A\cancel{\dot{U}}e^{U} + \dot{W}e^{-U} - W\dot{U}e^{-U})\} + i\{\,'\,\}\right] =$$

$$= -\frac{e^{U-k}}{2\sqrt{2}W}\left[2W(\dot{U}+iU') - e^{2U}(\dot{A}+iA') - (\dot{W}+iW')\right]$$

$$\lambda_{312} = \frac{e^{-k}}{2\sqrt{2}W}\left[\dot{U}e^{U}(-W+Ae^{2U}) - e^{2U}(\dot{A}e^{U} + A\dot{U}e^{U} + \dot{W}e^{-U} - W\dot{U}e^{-U}) + i\{\,'\,\}\right] =$$

$$= -\frac{e^{U-k}}{2\sqrt{2}W}\left[e^{2U}(\dot{A}+iA') + (\dot{W}+iW')\right]$$

$$\lambda_{223} = -\frac{e^{-k}}{2\sqrt{2}W}\left[\dot{U}e^{U}(-W + Ae^{2U}) - e^{2U}(\dot{A}e^{U} + A\dot{U}e^{U} - \dot{W}e^{-U} + W\dot{U}e^{-U}) + i\{'\}\right]$$

$$= -\frac{e^{U-k}}{2\sqrt{2}W}\left[-2W(\dot{U} + iU') - e^{2U}(\dot{A} + iA') + (\dot{W} + iW')\right]$$

$$\lambda_{123} = \frac{e^{-k}}{2\sqrt{2}W}\left[\dot{U}e^{U}(W + Ae^{2U}) - e^{2U}(\dot{A}e^{U} + A\dot{U}e^{U} - \dot{W}e^{-U} + W\dot{U}e^{-U}) + i\{'\}\right]$$

$$= -\frac{e^{U-k}}{2\sqrt{2}W}\left[e^{2U}(\dot{A} + iA') - (\dot{W} + iW')\right]$$

$$\lambda_{344} = -\frac{e^{U-K}}{\sqrt{2}}\left[(\dot{k} - \dot{U}) - i(K' - U')\right] = \frac{e^{U-k}}{\sqrt{2}}\left[(\dot{U} - iU') - (\dot{k} - ik')\right]$$

4. Càlcul dels escalars de Weyl per a la mètrica (4.29).

Per efectuar aquest càlcul emprarem els resultats del capitol tres. Identificant (4.29) amb (3.5) deduïm que les funcions S, T, H i F venen donades per :

$$S = \rho^{-2q}\frac{[Ch(q\Psi + D) + Ch\frac{\Psi}{2}]}{Sh(q\Psi + D + \frac{\Psi}{2})} \qquad T = \rho^{-2q}\frac{[Ch(q\Psi + D) - Ch\frac{\Psi}{2}]}{Sh(q\Psi + D + \frac{\Psi}{2})}$$

$$e^{2F} = \frac{1}{C}\rho^{1-2q^2}\frac{Ch\frac{\Psi}{2}}{Ch(q\Psi + D)} \qquad H = \ln\rho$$

Fent servir les equacions (3.19) trobem directament els escalars de Weyl, que resulten ser.

$$
\begin{matrix}\Psi_0\\ \Psi_4^*\end{matrix} = -\frac{1}{4C}\,\rho^{-1-2q^2}\,\frac{\mathrm{Ch}\frac{\psi}{2}\,\mathrm{Sh}\chi\cdot q}{\mathrm{Ch}^2(q\psi+D)}\left\{ 2\,\frac{\left[\mathrm{Ch}(q\psi+D)\pm\mathrm{Ch}\frac{\psi}{2}\right]}{\mathrm{Sh}\chi}\left[-1+2q^2\mp 2q\,\frac{\mathrm{Ch}\frac{\psi}{2}}{\mathrm{Ch}(q\psi+D)}\right] + \right.
$$

$$
+\hat{D}\psi\left[\frac{1}{(\pm\mathrm{Ch}\chi-1)}\left(-\mathrm{Ch}\frac{\psi}{2}+2\left(q\,\mathrm{Ch}\frac{\psi}{2}\pm\frac{1}{2}\mathrm{Ch}(q\psi+D)\right)\left(q\mp 2\,\frac{\mathrm{Ch}\psi/2}{\mathrm{Ch}(q\psi+D)}\right)\right) - \right.
$$

$$
\left. -2\,\frac{\left(\mathrm{Ch}(q\psi+D)\pm\mathrm{Ch}\frac{\psi}{2}\right)}{\mathrm{Sh}\chi}\left[\frac{1}{2}\mathrm{Th}\frac{\psi}{2}-q\,\mathrm{Th}(q\psi+D)\right]\right] +
$$

$$
+(\hat{D}\psi)^2\left[\frac{1}{(\mathrm{Ch}\chi\mp 1)^2}\left[\pm\mathrm{Sh}(q\psi+D)+\mathrm{Sh}\frac{\psi}{2}-q\,\frac{\mathrm{Sh}\chi\,\mathrm{Ch}^2\frac{\psi}{2}}{\mathrm{Ch}(q\psi+D)}\right] + \right.
$$

$$
\left.\left. +\frac{\mathrm{Th}(q\psi+D)}{(\pm\mathrm{Ch}\chi-1)}\left(q\,\mathrm{Ch}\frac{\psi}{2}\pm\frac{1}{2}\mathrm{Ch}(q\psi+D)\right)\right]\right\}
$$

$$
\Psi_2 = -\frac{1}{6C}\,\rho^{-1-2q^2}\,\frac{\mathrm{Ch}\frac{\psi}{2}\;q}{\mathrm{Ch}(q\psi+D)}\left\{-\mathrm{Th}\frac{\psi}{2}\,\mathrm{Th}(q\psi+D)-2\,\frac{\mathrm{Th}\psi/2}{\mathrm{Sh}\chi}\left(\mathrm{Ch}\chi-\frac{\mathrm{Ch}\psi/2}{\mathrm{Ch}(q\psi+D)}\right) + \right.
$$

$$
+\frac{3i}{\mathrm{Sh}\chi}\left(\frac{\mathrm{Ch}\chi}{\mathrm{Ch}(q\psi+D)}-\frac{1}{\mathrm{Ch}\psi/2}\right) + q\left(1-\frac{2}{\mathrm{Ch}^2(q\psi+D)}\left(1+2\,\mathrm{Ch}^2\frac{\psi}{2}\right)\right. +
$$

$$
\left. +\frac{4\,\mathrm{Sh}\psi/2}{\mathrm{Ch}(q\psi+D)\,\mathrm{Sh}\chi}\left(\mathrm{Ch}\chi-\frac{\mathrm{Ch}\psi/2}{\mathrm{Ch}(q\psi+D)}\right)+\frac{6i}{\mathrm{Sh}\chi\,\mathrm{Ch}(q\psi+D)}\left(1-\frac{\mathrm{Ch}\psi/2\,\mathrm{Ch}\chi}{\mathrm{Ch}(q\psi+D)}\right)\right)\right\}
$$

on $\quad \hat{D}\psi = -\frac{2}{\mathrm{Ch}\psi/2}\left(\mathrm{Sh}\psi/2+i\right) \quad , \qquad \chi \equiv q\psi+D+\frac{\psi}{2}$

BIBLIOGRAFIA

Alekseev, G.A. and V.A. Belinskii; Sov. Phys. JETP 51 655 (1981).

Bade, W.L. and H. Jehle; Revs. Modern Phys. 25, 716, (1953)

Bardeen, J.M.; "Rapidly Rotating Stars, Disks and Black Holes, Les Houches, (1972).

Belinskii, V.A. and V.E. Zakharov; Sov. Phys. JETP 48, 985 (1978).

Belinskii, V.A. and V.E. Zakharov; Sov. Phys. JETP 50, 1 (1980).

Bonnor, W.B. and P.A. Vickers; G.R.G. 13, 29 (1981).

Boyer, R.H. and R.W. Lindquist; J. Math. Phys. 8 265 (1967).

Campbell, S.J. and J. Wainwright, G.R.G. 8 987 (1977).

Carmeli, M. and M. Kaye; Ann. of Phys. 103, 97 (1977).

Cartan, E. ; "Leçons sur la Géométrie des Spaces de Riemann", Gauthiers-Villars (1951).

Chandrasekhar, S. ; "General Relativity, An Einstein Centenary Survey", Edited S.W. Hawking and W. Israel, C.U.P. (1979).

Collinson, C.D. and R.K. Dodd, Nuovo Cimento 3, 281 (1971).

Collinson, C.D., G.R.G. 7 419 (1976).

Comellas, F. i L. Mas, C.R. Acad.Sc. Paris 290 B, 453 (1980).

Comellas, F. , L. Mas i E. Verdaguer, C. R. Acad. Sc. Paris 294 II, 1207 (1982).

Cosgrove, C.M. , J. Math. Phys. 21 2417 (1980).

d'Inverno, R.A. and R.A. Russell-Clark; J.Math. Phys. 12 1258 (1971).

Eisenhart, L.P., "Riemannian Geometry", Princenton University Press (1925).

Ernst, F.J. , Phys. Rev. 167, 1175 (1968).

Ernst, F.J. , Phys. Rev. 168, 1415 (1968).

González, C., L. Herrera and J. Jiménez, J. Math. Phys. 20, 837 (1979).

Kerr, R.P., Phys. Rev. Lett. 11, 237 (1963).

Kinnersley, W. and E.F. Kelly, J. Math. Phys. 15, 2121 (1974).

Kramer, P. H. Stephani, E. Herlt, M. MacCallum and E. Schmutzer, "Exact Solutions of Einstein's Field Equations", C.U.P. (1980).

Levi-Cività, T., Rendiconti di Palermo, 42, 173 (1917).

Lewis, T. , Proc. Roy. Soc. London. A 136, 176 (1932)

Lichnerovicz, A., "Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme", Masson, Paris (1954).

Martin, J. and L. Mas, C.R. Acad. Sc. Paris 271 A, 338 (1970)

Newman, E. T.; J. Math. Phys. 2, 324 (1961).

Newman, E.T. , and R. Penrose, J. Math. Phys. 3, 566 (1962)

Newman, E.T. , et al. , J. Math. Phys. 6, 918 (1965).

Papapetrou, A. , C. R. Acad. Sc. Paris 4 A, 83 (1966).

Papapetrou, A. , C. R. Acad. Sc. Paris 272 A , 1537 (1971, a).

Papapetrou, A. , C. R. Acad. Sc. Paris 272 A , 1613 (1971, b).

Pirani, F.A.E., Phys. Rev. 105, 1089 (1957).

Ross, W., G.R.G. 7, 431 (1976)

Ross, W., G.R.G. 8, 753 (1977)

Tomimatsu, A. and H. Sato, Phys. Rev. Lett. 29, 1344 (1972)

Tomimatsu, A., Prog. Theor. Phys. 63, 1054 (1980).

Tomimatsu, A. and H. Sato, Prog. Theor. Phys. 70, 215 (1981).

Vaidya, P.C., Curr. Sci. 12, 183. (1943).

Vaidya, P.C., Proc. Indian Acad. Sci. 33 A, 264, (1951).

Vaidya, P.C., Nature 171, 260 (1953).

Van Stockum, W.J., Proc. R. Soc. Edinburgh. A 57, 135 (1973).

Verdaguer, E., J.Phys.A 15, 1261 (1982).

Voorhes, B.H., Phys.Rev. Lett. 29, 1344 (1970).

Wainwright, J., Abstracts G.R.G. 9th Conference. (1980).