MATRIZ DE ROTACION PARA UN GIRO ALREDEDOR DE UN EJE CUALQUIERA

Tech. Rep. Octubre 1979

Francesc Comellas
Departament de Física Teòrica
Universitat Autònoma de Barcelona.

Se presenta en este trabajo una parametrización para la matriz de rotación de un giro alrededor de un eje cualquiera que tiene la ventaja, frente a la usual de los ángulos de Euler, de estar relacionada directamente con elementos característicos de la rotación como el ángulo y el eje de giro.

Si suponemos que el referencial S gira para convertirse en el S' un ángulo φ alrededor de un eje cualquiera que pasa por el origen comun, la matriz de rotación, $R^{i}{}_{j}{}'$, relacionará las coordenadas de un vector $\vec{v}$ en los dos referenciales: $v^{i}{}'=R^{i}{}_{j}{}'v_{j}$. Esta matriz vendrá dada en funcion de $\vec{\gamma}$, vector cuya dirección es la del eje de giro, sentido el de avance de un sacacorchos que gira con la rotación y con módulo relacionado con el ángulo de giro φ por $|\vec{\gamma}|=\gamma=(\gamma^{i}\gamma_{i})^{1/2}=2\sin(\varphi/2)$.

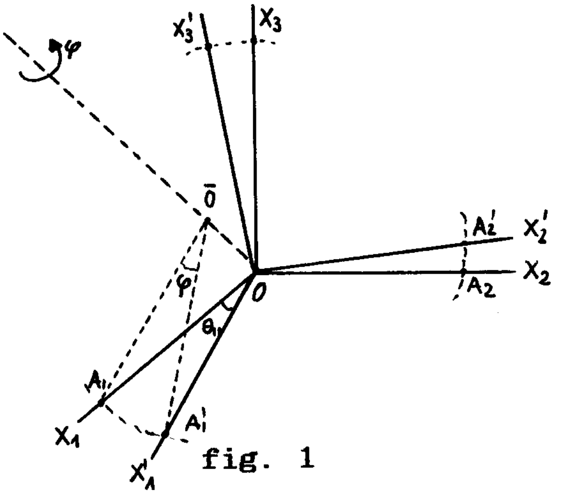

fig. 1

Notación:

OX_{i} : ejes del referencial S.

OX_{i}': ejes del referencial S'.

α_{i} : ángulo formado for el vector $\vec{\gamma}$ con su componente i en el referencial S.

θ_{ij}: ángulo entre OX_{i}' y OX_{j}.

$i,j,k=1,2,3$.

Indicamos con $\bar{O}$ al punto sobre el eje de giro que está situado a una distancia unidad del origen O.

A_i y A_i' son los puntos sobre los ejes que están situados sobre un plano perpendicular al eje de giro que contiene $\bar{O}$. Por construccion $OA_i=OA_i'$.

Consideramos la rotación en el sentido horario.

Cálculo de los elementos diagonales de la matriz de rotación.

Consideremos un vector sobre el eje OX_i. La relación entre sus componentes en los dos sistemas viene dada por $v^{i\prime}=R^{i}{}_{i}{}'v^{i}$ (no hay suma en i).

Por construcción: $v^{i\prime}=v^{i}\cos\theta_{ii}$. Así pués: $R^{i}{}_{i}{}'=\cos\theta_{ii}$.

Calculamos a continuación $\cos\theta_{ii}$ en función de $\vec{\gamma}$.

Aplicando el teorema del coseno en OA_iA_i':

$$(A_iA_i')^2=(OA_i)^2+(OA_i')^2-2(OA_i)(OA_i')\cos\theta_{ii}$$

De donde:

$$\cos\,\theta_{ii}=\frac{2(OA_i)^2-(A_iA_i')^2}{2(OA_i)^2} \qquad [1]$$

Considerando de nuevo el teorema del coseno en $\bar{O}A_iA_i'$

$$(A_iA_i')^2=(\bar{O}A_i)^2+(\bar{O}A_i')^2-2(\bar{O}A_i)(\bar{O}A_i')\cos\varphi =$$
$$=2(\bar{O}A_i)^2(1-\cos\varphi) \qquad [2]$$

En el triángulo $O\bar{O}A_i$ se cumple:

$$\bar{O}A_i=\tan\alpha_i \qquad [3]$$
$$OA_i=\sec\alpha_i \qquad [4]$$

Substituyendo [2], [3] y [4] en [1] encontramos:

$$\cos\theta = \frac{2\sec^2\alpha_i-2\tan^2\alpha_i(1-\cos\varphi)}{2\sec^2\alpha_i}$$
$$=1-\sin^2\alpha_i(1-\cos\varphi) \qquad [5]$$

De las relaciones de definición de γ y α_i encontramos que:

$$sin^2\alpha_i = 1-cos^2\alpha_i = 1-\frac{\gamma_i{}^2}{\gamma^2}$$

y utilizando la identidad trigonométrica:

$$sin^2(\varphi/2) = (1-cos\varphi)/2$$

así como que:

$$(1-cos\varphi) = 2sin^2(\varphi/2) = \gamma^2/2$$

substituyendo en [5], finalmente:

$$R^i_i{}' = cos\theta_{ii} = 1-\frac{(1-\gamma_i^2/\gamma^2)}{2}\gamma^2 = 1-\frac{1}{2}\gamma^2-\frac{1}{2}\gamma_i^2$$

Explicitamente:

$$R^1{}_1{}' = 1 - \frac{1}{2}\gamma^2\gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma^3\gamma_3$$

$$R^2{}_2{}' = 1 - \frac{1}{2}\gamma^1\gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma^3\gamma_3$$

$$R^3{}_3{}' = 1 - \frac{1}{2}\gamma^1\gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma^2\gamma_2$$

Cálculo de los elementos extradiagonales de la matriz de rotación

Analogamente $R^i{}_j{}' = cos\theta_{ij}$.

Considerando la figura 2, en particular el triángulo $OA_i{}'A_j$

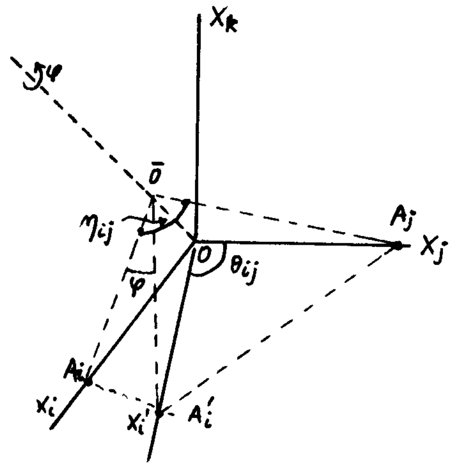

figura 2.

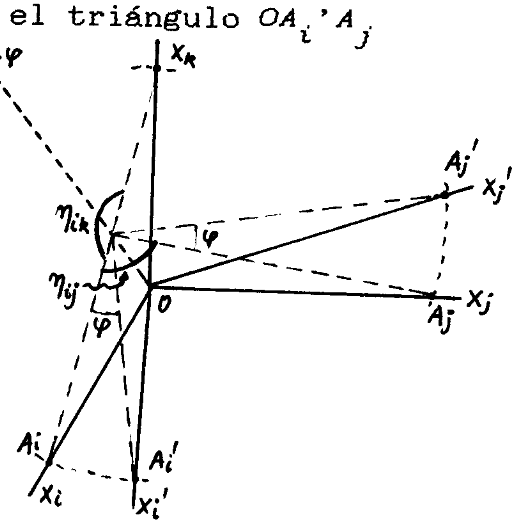

figura 3.

Encontramos:

$$(A_i'A_j)^2=(OA_i')^2+(OA_j)^2-2(OA_i')(OA_j)\cos\theta_{ij}$$

$$\cos\theta_{ij}=\frac{(OA_i')^2+(OA_j)^2-(A_i'A_j)^2}{2(OA_i)(OA_j)} \qquad [6]$$

Considerando el triángulo $\bar{O}A_i'A_j$

$$(A_i'A_j)^2=(\bar{O}A_i')^2+(\bar{O}A_j)^2-2(\bar{O}A_i')(\bar{O}A_j)\cos(\eta_{ij}\mp\varphi)=$$

utilizando [3]:

$$=\tan^2\alpha_i\tan^2\alpha_j-2\tan\alpha_i\tan\alpha_j(\cos\eta_{ij}\cos\varphi\pm\sin\eta_{ij}\sin\varphi) \qquad [7]$$

Donde hay que considerar el signo superior cuando se calcule $R^i{}_k'$ y el inferior si se trata de $R^j{}_i'$, de acuerdo con la figura 3.

Consideremos ahora el triángulo $\bar{O}A_iA_j$:

$$(A_iA_j)^2=(\bar{O}A_i')^2+(\bar{O}A_j)^2-2(\bar{O}A_i)(\bar{O}A_j)\cos\eta_{ij} \qquad [8]$$

Pero también, del triángulo OA_iA_j.

$$(A_iA_j)^2=(OA_i)^2+(OA_j)^2=\sec^2\alpha_i+\sec^2\alpha_j$$

De donde, con [8] y [3]:

$$\cos\eta_{ij}=\frac{\tan^2\alpha_i + \tan^2_j\alpha - \sec^2\alpha_i - \sec^2\alpha_j}{2\tan\alpha_i\tan\alpha_j}$$

Y con la relación trigonométrica $\sec^2\Phi - \tan^2\Phi = 1$ encontramos:

$$\cos\eta_{ij}=-\cot\alpha_i\cot\alpha_j \qquad [9]$$

$$\sin\eta_{ij}=(1-\cot^2\alpha_i\cot^2\alpha_j)^{1/2} \qquad [10]$$

Por último, substituyendo en [6] las relaciones [4], [7], [8], [9] y [10] se encuentra:

$$R^i{}_j'=\cos\theta_{ij}=[\ \sec^2\alpha_i+\sec^2\alpha_j-\{\tan^2\alpha_i\tan^2\alpha_j-2\tan\alpha_i\tan\alpha_j$$

$$[-\cot\alpha_i\cot\alpha_j\cos\varphi\pm(1-\cot^2\alpha_i\cot^2\alpha_j)^{1/2}\sin\varphi]\}](2\sec\alpha_i\sec\alpha_j)^{-1}$$

Simplificando:

$$R^{i}{}_{j}' = \cos\alpha_i \cos\alpha_j (1-\cos\varphi) \pm \sin\alpha_i \sin\alpha_j (1-\cot^2\alpha_i \cot^2\alpha_j)^{1/2} \sin\varphi$$

Y considerando la definición de $\vec{\gamma}$ y de α_i :

$$R^{i}{}_{j}' = \frac{1}{2}\,\gamma^i \gamma_j \pm (1-\cos^2\alpha_i - \cos^2\alpha_j)^{1/2} \sin\varphi$$

y con la relación $\cos^2\alpha_i + \cos^2\alpha_j + \cos^2\alpha_k = 1$, siendo $i \neq j \neq k$.

$$R^{i}{}_{j}' = \frac{1}{2}\,\gamma^i \gamma_j \pm \cos\alpha_k \sin\varphi = \frac{1}{2}\,\gamma^i \gamma_j \pm 2\cos\alpha_k \sin\frac{\varphi}{2} (1-\sin^2\frac{\varphi}{2})^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\gamma^i \gamma_j \pm 2(\gamma^k/\gamma)(\gamma/2)(1-\gamma^2/4)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\gamma^i \gamma_j \pm (1-\frac{\gamma^2}{4})^{1/2} \gamma^k$$

Explicitamente:

$$R^{1}{}_{2}' = \frac{1}{2}\,\gamma^1 \gamma_2 + (1-\frac{\gamma^2}{4})^{1/2} \gamma^3$$

$$R^{1}{}_{3}' = \frac{1}{2}\,\gamma^1 \gamma_3 - (1-\frac{\gamma^2}{4})^{1/2} \gamma^2$$

$$R^{2}{}_{1}' = \frac{1}{2}\,\gamma^2 \gamma_1 - (1-\frac{\gamma^2}{4})^{1/2} \gamma^3$$

$$R^{2}{}_{3}' = \frac{1}{2}\,\gamma^2 \gamma_3 + (1-\frac{\gamma^2}{4})^{1/2} \gamma^1$$

$$R^{3}{}_{1}' = \frac{1}{2}\,\gamma^3 \gamma_1 + (1-\frac{\gamma^2}{4})^{1/2} \gamma^2$$

$$R^{3}{}_{2}' = \frac{1}{2}\,\gamma^3 \gamma_2 - (1-\frac{\gamma^2}{4})^{1/2} \gamma^1$$

Finalmente escribimos el conjunto de elementos de la matriz de rotación usando la delta de Kronecker $\delta^i{}_j$ y el tensor completamente antisimétrico de Levi-Cività $\delta^i{}_{.jm}$.

$$\boxed{R^{i}{}_{j}' = (1-\frac{1}{2}\gamma^2)\delta^i{}_j + \frac{1}{2}\gamma^i \gamma_j + (1-\frac{1}{4}\gamma^2)^{1/2} \delta^i{}_{.jm} \gamma^m}$$

■

Referencia: A. Palazzolo, Am. J. Phys. 44, 63 (1976)