RELATIVITÉ. — *Étude d'une famille biparamétrique du type Lewis-Papapetrou, de solutions 1-solitoniques des équations d'Einstein.* Note (*) de **Francesc Comellas, Lluís Mas et Enric Verdaguer**, présentée par André Lichnerowicz.

On étudie une famille biparamétrique de solutions stationnaires et axisymétriques des équations d'Einstein du vide déduite avec la méthode de la diffusion inverse à partir de métriques non physiques. En utilisant des repères nuls on classifie dans cette famille des solutions du type I, II et D de Bel-Petrov et Minkowski. On donne le potenciel d'Ernst et on discute brièvement le rôle des paramètres.

RELATIVITY. — Study of a two-Parameter Family of 1-Solitons, Solutions of the Einstein Equations.

We study a two-parameter family of stationary axisymmetric solutions of the Einstein equations in vacuum, which were generated from non-physical metrics by the inverse scattering technique. By using the null tetrad formalism, the family is found to contain Bel-Petrov types I, II, D and Minkowski metrics. The Ernst potential for the solution is also given and the role of the parameters is briefly discussed.

1. La technique de la diffusion inverse de Belinskii et Zakharov a démontré qu'elle est très puissante pour obtenir des solutions stationnaires et axisymétriques des équations d'Einstein du vide [1]. En suivant cette méthode et en prenant comme germe la métrique non physique :

$$ds^2=\rho^{2q^2-(1/2)}(d\rho^2+dz^2)+\rho^{1-2q}d\varphi^2+\rho^{1+2q}dt^2, \tag{1}$$

qui avec un changement des coordonnées complexe peut se réduire à la solution cosmologique de Kasner, on avait trouvé en utilisant la transformation 1-soliton la famille suivante de solutions [2] :

$$\begin{aligned}(2)\quad ds^2=&\frac{C\,\rho^{2q^2}\,\mathrm{Ch}(q\psi+D)}{\sqrt{\rho^2+z^2}}(d\rho^2+dz^2)\\&+\frac{1}{\mathrm{Ch}(q\psi+D)}\Bigg[-\rho^{1+2q}\,\mathrm{Sh}\left(q\psi+\frac{1}{2}\psi+D\right)dt^2\\&-\rho^{1-2q}\,\mathrm{Sh}\left(-q\psi+\frac{1}{2}\psi-D\right)d\varphi^2-2\rho\,\mathrm{Ch}\frac{\psi}{2}\,d\varphi\,dt\Bigg]\end{aligned}$$

avec :

$$e^{-\psi}=\left(\frac{\rho}{k}\right)^2,\qquad \mu=-z+\sqrt{\rho^2+z^2}$$

et avec les deux paramètres arbitraires q et D, qui sont en rapport avec la « force » du champ et avec la rotation de la source, respectivement.

Dans les paragraphes suivants nous étudions les solutions (2) à partir de l'étude de son type de Bel-Petrov, en utilisant le formalisme des repères nuls, et l'étude de son potentiel d'Ernst.

2. (*a*) Si $q=-1/2$, la métrique germe se réduit à la métrique euclidienne. Ce cas a été étudié dans la référence [2] et on obtient que dans la limite statique ($D\to\infty$) la solution a un rapport avec une autre de la famille de Zipoy-Voorhees et dans la limite magnétique ($D=0$) avec une solution de la classe de Van Stockum.

(*b*) Le cas particulier $q=0$ est aussi intéressant. A la famille des solutions ainsi obtenue on peut appliquer une rotation du plan (t, φ) d'angle :

$$\theta=-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cotg}(\operatorname{Sh} D)$$

et nous arrivons à :

$$ds^2=\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}(d\rho^2+dz^2)+(z+\sqrt{\rho^2+z^2})\,d\varphi^2-(z+\sqrt{\rho^2+z^2})\,dt^2. \tag{3}$$

Cette métrique avec la transformation des coordonnées :

$$\left\{\begin{aligned} R&=[(z^2+\rho^2)^{1/2}+z]^{1/2};\\ Z&=\operatorname{Ch} t\,[(z^2+\rho^2)^{1/2}-z]^{1/2};\\ T&=\operatorname{Sh} t\,[(z^2+\rho^2)^{1/2}-z]^{1/2},\end{aligned}\right. \tag{4}$$

peut être réduite à :

$$ds^2=dR^2+dZ^2+R^2\,d\varphi^2-dT^2.$$

Ainsi la méthode de la diffusion inverse donne une métrique de l'espace plat à partir d'un germe qu'on peut déduire d'une solution de Kasner isotrope.

(*c*) Pour étudier les métriques (2) dans le cas de q quelconque nous utilisons le formalisme des repères nuls [3]. Nous prenons la métrique générale pour le cas stationnaire et axisymétrique sous la forme :

$$ds^2=2e^{-2F}\,dx\,d\bar{x}+\frac{2e^{H}}{S+T}[ST\,d\varphi^2-(S-T)\,d\varphi\,dt-dt^2], \tag{5}$$

avec,

$$x=\rho+iz,$$
$$(x^0, x^1, x^2, x^3)=(t, x, \bar{x}, \varphi)$$

et où F, H, S et T sont fonctions réelles indépendantes de φ et t.

Nous prenons le repère nul,

$$\left\{\begin{aligned} l_\mu&=e^{H/2}(S+T)^{-1/2}(1, 0, 0, S),\\ n_\mu&=e^{H/2}(S+T)^{-1/2}(1, 0, 0, -T),\\ m_\mu&=e^{-F}(0, 1, 0, 0)\end{aligned}\right. \tag{6}$$

et à partir des équations de Newman-Penrose nous trouvons les projections sur le repère du tenseur de Weyl,

$$\left\{\begin{aligned} \Psi_0&=-\frac{e^{2F}}{S+T}\left(S_{xx}+2F_xS_x+H_xS_x-\frac{2S_x^2}{S+T}\right),\\ \Psi_4^*&=-\frac{e^{2F}}{S+T}\left(T_{xx}+2F_xT_x+H_xT_x-\frac{2T_x^2}{S+T}\right),\\ \Psi_2&=-\frac{e^{2F}}{6}\left[H_{x\bar{x}}+2F_{x\bar{x}}+\frac{1}{(S+T)^2}(S_{\bar{x}}T_x-5S_xT_{\bar{x}})\right].\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Avec ces projections on peut étudier le type de Bel-Petrov des solutions (2). En général elles sont du type I, si nous exceptons les cas déjà étudiés d'espace plat ($q=0$) et de Van Stockum ($q=-1/2$, $D=0$) lequel donne un type II et le nouveau cas : $q=1$, dans la limite statique; étudions ce dernier cas.

(*d*) Dans la limite statistique les fonctions Ψ (7), ont une expression plus simple :

$$(8)\quad \begin{cases} \Psi_0=\Psi_4^*=-\dfrac{q}{2\mathrm{B}}\rho^{-2q^2-1}\dfrac{e^{-q\psi}}{\mathrm{Ch}\,\psi/2}\left[-2+\mathrm{Sh}^2\dfrac{\psi}{2}-3q\,\mathrm{Sh}\dfrac{\psi}{2}\mathrm{Ch}\dfrac{\psi}{2}+2q^2\mathrm{Ch}^2\dfrac{\psi}{2}\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\left.+3i\left(\mathrm{Sh}\dfrac{\psi}{2}-q\,\mathrm{Ch}\dfrac{\psi}{2}\right)\right], \\ \Psi_2=\dfrac{q}{2\mathrm{B}}\rho^{-2q^2-1}e^{-q\psi}(\mathrm{Sh}\,\psi/2-q\,\mathrm{Ch}\,\psi/2) \end{cases}$$

et avec ces expressions on peut démontrer facilement, à partir de l'algorithme de Russell-Clark [4], que toutes les solutions sont du type I, si nous exceptons l'espace plat ($q=0$) et le cas $q=1$, lequel donne la métrique du type D suivante :

$$(9)\qquad ds^2=\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\rho^2 e^{\psi}(d\rho^2+dz^2)+\frac{e^{-\psi/2}}{\rho}d\varphi^2-\rho^3 e^{\psi/2}dt^2,$$

métrique que nous étudions à partir des invariants de courbure. Le seul invariant indépendant est :

$$(10)\qquad \mathrm{I}=12\Psi_2^2=\frac{3}{\mathrm{B}^2\mu^6}.$$

Si nous prenons des coordonnées sphéroidales :

$$\rho=\sigma(x^2-1)^{1/2}(1-y^2)^{1/2},$$
$$z=\sigma\times y,$$
$$\sigma=\mathrm{Cte}.$$

que nous pouvons mettre en relation avec les coordonnées de Boyer-Lindquist (r, θ) :

$$\sigma x=r-m,$$
$$y=\cos\theta,$$

dans le cas limite des valeurs de r grandes, l'invariant (10) peut s'écrire :

$$(11)\qquad \mathrm{I}=\frac{3}{\mathrm{B}^2 r^6(1-\cos\theta)^6}.$$

Sous cette forme, nous pouvons le mettre en parallèle avec l'invariant de la métrique de Schwarzschild :

$$\mathrm{I}_{\mathrm{Sch}}=\frac{48\,\mathrm{M}^2}{r^6}$$

ce qui nous permet de donner un sens à la constante B.

L'invariant (11) est singulier pour $\theta=0$ et la solution (9) n'est pas asymptotiquement plane. Il serait intéressant de chercher une solution asymptotiquement plane qui soit en même temps une bonne approximation de la solution (9) en dehors des points singuliers, d'une façon analogue aux cas des métriques de W. Kinnersley et E. F. Kelly [5]. Notons aussi que les invariants de courbure sont fonctions de r puissance $(-2q^2-1)$, c'est-à-dire que pour les valeurs grandes de q le champ s'affaiblit rapidement.

3. Finalement nous donnons le potentiel d'Ernst pour la famille des métriques (2) :

$$\varepsilon=\frac{\rho^{1+2q}}{\operatorname{Ch}(q\psi+\mathrm{D})}\left\{\operatorname{Sh}\left[\left(q+\frac{1}{2}\right)\psi+\mathrm{D}\right]-\frac{i}{\rho}\sqrt{\rho^2+z^2}\right\}. \tag{12}$$

Ce potentiel est utile pour trouver de nouvelles solutions à partir d'une solution connue. Ainsi dans la limite statique [dans ce cas la partie imaginaire du potentiel (12) disparaît] le potentiel :

$$\varepsilon=\mu\rho^{2q},$$

est une combination des potentiels $\varepsilon=\mu$ et $\varepsilon=\rho$ lesquels correspondent à la métrique plane [4]. Dans le cas $q=-1/2$ et en prenant des valeurs de x grandes, le potentiel est aussi une solution, laquelle est fonction d'une seule des coordonnées sphéroidales et on peut alors faire le changement $x \rightleftarrows y$ pour trouver une solution nouvelle asymptotiquement plane.

Pour une valeur de q générale la relation avec des solutions asymptotiquement planes n'est pas évidente puisque le potentiel d'Ernst asymptotique dépend des deux coordonnées spheroidales et on doit vérifier si on a effectivement une solution avant de faire le changement $x \rightleftarrows y$.

On doit aussi rappeler que le potentiel d'Ernst n'a pas un sens intrinsèque, c'est-à-dire qu'on doit étudier d'une façon complète toutes les solutions obtenues par les méthodes citées.

(*) Remise le 3 mai 1982.

[1] V. A. Belinskii et V. E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP*, 50, 1980, p. 1.

[2] E. Verdaguer, *J. Phys. A*, 15, 1982, p. 1261.

[3] E. Newman et R. Penrose, *J. Math. Phys.*, 3, 1962, p. 566.

[4] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, M. MacCallum et E. Schmutzer, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge U.P., 1980.

[5] W. Kinnersley et E. F. Kelly, *J. Math. Phys.*, 15, 1974, p. 2121.

F. C. et E. V. : *Dept. Fisica Teòrica, Universitat Autònoma, Bellaterra*, Barcelona, Espagne;

L. M. : *Dept. Fisica Teòrica, Universitat de Palma de Mallorca*, Palma de Mallorca, Espagne.