UAB-FT-61
June-1980

ETUDE DES METRIQUES INTERIEURES RACCORDABLES A LA METRIQUE DE KERR

F. Comellas

Departament de Física Teòrica
Universitat Autònoma de Barcelona
BELLATERRA (Barcelona)
SPAIN

L. Mas

Departamento de Física Teórica
Universidad de Granada
GRANADA (SPAIN)

ABSTRACT: On étudie diverses métriques interieures déduites par variation des constantes de la métrique de Kerr en utilisant le formalisme des repères nuls. Dans le cas le plus simple on retombe dans la métrique de Kerr chargée. On trouve des cas avec un possible fluide comme source mais qui n'est pas parfait.

Several interior metrics deduced form the Kerr metric by variation of constants are studied using the null tetrad formalism. In the simplest case the charged Kerr metric is recovered. Cases are found with a possible (but non-perfect) fluid as a source.

1.- Un des moyens les plus faciles de produire des métriques interieures raccordables à la métrique de Kerr.

$$ds^2=\left(1-\frac{2mr}{\Sigma}\right)du^2+2dudr-2a\sin^2\theta drd\phi-\Sigma d\theta^2+\frac{4mra\sin^2\theta}{\Sigma}dud\phi-$$
$$-\sin^2\theta\left(\Omega+\frac{2mra^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right)d\phi^2 \qquad (1)$$

(avec, $\Sigma = r^2+a^2\cos^2\theta$

$\Omega = \Gamma+2mr = r^2+a^2$) ,

est de prendre les constantes de la métrique comme des fonctions des coordennées. Une bonne surface pour raccorder avec la solution du vide serait là où les derivées premières de ces fonctions soient nulles.

Pour limiter la forme de ces fonctions il y a deux possibilités:

a) Prendre une forme tres simple et voire quels tenseurs impulsion-énergie apparaissent.

b) Ne délimiter pas trop la forme de ces fonctions a priori, mais alors imposer que le tenseur impulsion-énergie soit celui qui correspond a une certaine source, ou bien imposer certaines conditions sur la surface de raccordement.

La variation par rapport à la coordonnée temporelle a été déja étudiée dans le cadre du vide [1], dans le but de trouver des solutions avec radiation. En pensant aux sources il serait aussi intéressant d'étudier cette variation mais dans une premiere approche nous nous bornerons a des sources stationnaires.

Nous avons éstudié deux cas:

I: Prendre m fonction de r et de θ.

II: Prendre m fonction de r et a fonction de r et de θ.

Pour le premier cas nous avons obtenu des résultats assez précis et moins définis pour le second, résultats que nous développons dans les paragraphes suivants.

2.- Dans le sisteme de coordonnées utilisé (1), nous prenons le repere nul,

$$
\begin{aligned}
&l^{\mu}:(0,1,0,0)\\
&n^{\mu}:\ \frac{1}{\Sigma}\left(\Omega,-\frac{\Gamma}{2},0,a\right)\\
&m^{\mu}:\frac{1}{\sqrt{2}(r+ia\cos\theta)}\left(ia\sin\theta,0,1,\frac{i}{\sin\theta}\right)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Pour expliciter les équations d'Einstein nous utilisons le formalisme de Newman-Penrose. Dans ce formalism nous pouvons calculer le tenseur d'impulsion-énergie,

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu}=\;&2\phi_{22}\, l^{\mu}l^{\nu}+2\phi_{00}\, n^{\mu}n^{\nu}+2\phi_{20}\, m^{\mu}m^{\nu}+2\phi_{20}\, m^{\mu}m^{\nu}+\\
&+4\phi_{11}[\, l^{(\mu}n^{\nu)}+m^{(\mu}\overline{m}^{\nu)}]-4\phi_{21}\, l^{(\mu}m^{\nu)}-4\overline{\phi_{21}}\, l^{(\mu}\overline{m}^{\nu)}-\\
&-4\phi_{10}\, n^{(\mu}m^{\nu)}-4\overline{\phi}_{10}\, n^{(\mu}\overline{m}^{\nu)}+6\Lambda\,[2l^{(\mu}n^{\nu)}-2m^{(\mu}\overline{n}^{\nu)}]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

ou les ϕ (projections du tenseur de Ricci) et le Λ (scalaire de courbure) dépendent des coefficients de spin a travers de formules bien connues [2].

3.- Premier cas, $m=m(r,\theta)$, a=cte.

Pour les coefficients de spin nous avons obtenu:

$$
\begin{aligned}
&x=\sigma=\lambda=\varepsilon=0\\
&\rho=-\frac{1}{r-ia\cos\theta}\\
&\nu=\frac{m'r}{\sqrt{2}}\rho^{2}\overline{\rho}\\
&\pi\overline{\rho}=-\tau\rho=\frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}}\,\rho^{2}\overline{\rho}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$\mu = \frac{\Gamma}{2}\rho^2\bar{\rho}$$

$$\beta = -\frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}}\bar{\rho} \qquad \text{(cont.4)}$$

$$\gamma = \mu + \frac{r-m-\dot{m}r}{2}\rho\bar{\rho}$$

$$\alpha = \pi - \bar{\beta}$$

où le point indique derivée par rapport à r et l'apostrophe derivée par rapport à θ .

Avec ces résultats les composantes du tenseur de Ricci, et le scalaire de courbure dans le repère sont:

$$\phi_{00} = \phi_{01} = \phi_{02} = 0$$

$$\phi_{11} = \dot{m}r^2\rho^2\bar{\rho}^2 - \frac{2\dot{m}+\ddot{m}r}{4}\rho\bar{\rho}$$

$$\phi_{12} = \frac{rm'}{\sqrt{2}}\rho^2\bar{\rho}^2 + \frac{m'+\dot{m}'r}{2\sqrt{2}}\rho\bar{\rho}^2$$

$$\phi_{22} = -\frac{r(m''+m'\cot\theta)}{2}\rho^2\bar{\rho}^2$$

$$\Lambda = \frac{2\dot{m}+\ddot{m}r}{12}\rho\bar{\rho} \qquad (5)$$

Nous avons donc pour le tenseur d'impulsion-énergie (3) la forme suivante:

$$T^{\mu\nu} = 2\phi_{22}l^{\mu}l^{\nu} + (4\phi_{11}+12\Lambda)l^{(\mu}n^{\nu)} - 4\phi_{21}\,l^{(\mu}m^{\nu)} - 4\bar{\phi}_{21}\,l^{(\mu}\bar{m}^{\nu)} +$$
$$+ (4\phi_{11}-12\Lambda)m^{(\mu}\bar{m}^{\nu)} \qquad (6)$$

ce qui nous donne avec les indices du repère:

$$T^a{}_b: \quad \begin{pmatrix} 2\phi_{11}+6\Lambda & 2\phi_{22} & -2\bar{\phi}_{21} & 2\phi_{21} \\ 0 & 2\phi_{11}+6\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\phi_{21} & -(2\phi_{11}-6\Lambda) & 0 \\ 0 & -2\bar{\phi}_{21} & 0 & -(2\phi_{11}+6\Lambda) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Nous allons étudier les vecteurs propres qu'ont ces types de tenseur d'impulsion-énergie. Du point de vue physique et en pensant a un fluide il est necéssaire d'avoir un vecteur prope du type temps. Pour le $T^a{}_b$ de (7) nous avons les valeurs propes doubles:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\phi_{11} + 6\Lambda \\ \lambda_2 &= -2\phi_{11} + 6\Lambda \end{aligned} \tag{8}$$

Pour les vecteurs propres nous avons les cas suivants,

I.- Le coefficient ϕ_{11} n'est pas nul.

a)Correspondant a λ_1 et si $\phi_{11}\phi_{22} \neq \phi_{21}\bar{\phi}_{21}$, un vecteur isotrope

$$V_{\lambda_1}{}^{\mu} = a l^{\mu} \tag{9}$$

Correspondant a λ_1 et si $\phi_{11}\phi_{22} = \phi_{21}\bar{\phi}_{21}$, deux vecteurs, un pouvant être du type temps

$$V_{\lambda_1}{}^{\mu} = a l^{\mu} + b\left(n^{\mu} - \frac{\phi_{21}}{2\phi_{22}} m^{\mu} - \frac{\phi_{21}}{2\phi_{11}} \bar{m}^{\mu}\right), \text{ avec a, b arbitraires.} \tag{10}$$

b) Correspondant a λ_2 on a deux vecteurs orientes dans l' espace

$$V_{\lambda_2}{}^{\mu} = -\frac{\phi_{21} c + \phi_{21}\bar{c}}{2\phi_{11}} l^{\mu} + c m^{\mu} + \overline{cm}^{\mu}, \text{ avec c arbitraire} \tag{11}$$

II.- Le coefficient ϕ_{11} est nul.

a) Si $\phi_{21} \neq 0$, on a deux vecteurs orientés dans l'espace

$$V_{\lambda}{}^{\mu} = a l^{\mu} + id(\phi_{21} m^{\mu} - \bar{\phi}_{21}\bar{m}^{\mu}), \text{ avec a, d réels arbitraires} \tag{12}$$

b) Si aussi ϕ_{21} est nul on doit avoir $\phi_{22} = 0$ et alors n'importe quel vecteur est propre; ce dernier cas correspond a m égal constante.

Le cas le plus intéressant correspond à I, a, b pour

$$\phi_{11}\,\phi_{22} = \bar{\phi}_{21}\,\phi_{21} \tag{13}$$

puisque nous pouvons avoir un vecteur du type temps et trois du type espace (10) 1t (11). Dans ce cas il est facile de voir [3] que le tenseur que nous trouvons ne représente par un fluide parfait ou bien un fluide parfait plus champ électromagnétique; il peut représenter un fluide non parfait. La condition (13) qui est nécessaire pour avoir un vecteur du type temps donne d'une forme explicite,

$$r^2\Delta\ddot{m}m'' + r^2\Delta\cot\theta\ddot{m}m' - 2r\Delta\dot{m}m'' - 2r\Delta\cot\theta\dot{m}m' +$$

$$+ 2r\Delta\dot{m}'m' - r^2\Sigma(\dot{m}')^2 - \Sigma(m')^2 = 0$$

où, $\Delta = r^2-a^2\cos^2\theta$.

Dans ce cas particulier si nous limitons à prendre m comme fonction de r seulement on retombe sur des résultats bien connus [4] ; si nous demandons que le tenseur d'impulsion-énergie soit celui d'un champ électromagnétique, le coefficient Λ doit etre nul et comme champ on trouve,

$$F_{\mu\nu} = -4\mathrm{Re}(\phi_{11})\,l_{[\mu}n_{\nu]} + 4i\,\mathrm{Im}(\phi_{11})\,m_{[\mu}\bar{m}_{\,]}$$

ce que explicité donne:

$$F_{10} = \frac{\sqrt{2}e}{\Sigma^2}(\sin k.2ar\cos\theta - \cos k.\Delta) = \frac{F_{13}}{a\sin^2\theta}$$

$$F_{20}\Omega = F_{23}\,a = \sqrt{2}e\Omega a\sin\theta(\cos k.2ar\cos\theta + \sin k.\Delta)$$

(avec e,k arbitraires)

Ce champ est celui associé a la métrique de Kerr chargée sauf une rotation de dualité puisque nous partons d'un tenseur d' impulsion-énergie.

4.- Second cas, m=m(r) et $a=a(r,\theta)$ dans les termes qui ont $\frac{2mr}{\Sigma}$.

Nous avouns fait l'analyse du tenseur d'impulsion-énergie résultant et nous avons vu aussi que on a un vecteur propre du type temps seulement si nous avons la relation (13). Cette condition oblige a que la fonction $a(r,\theta)$ soit constante et alors nous retombons dans le cas particulier déjà cité dans la paragraphe antérieur.

1 C. Gonzâlez, L. Herrera, J. Jiménez, J. Math Phys. 20, 1979, p. 837

2 E. Newman, R. Penrose. J. Math. Phys. 3, 1962, p.566

3 A. Lichnerowicz: "Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme", Editorial Masson, 1955.

4 J. Martin, L. Mas. Comptes Rendus, 271, série A, 1970,p.338