

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

DIAMETRO Y VULNERABILIDAD EN REDES DE INTERCONEXION

TESIS DOCTORAL PRESENTADA POR

JOSE GOMEZ MARTI

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

BARCELONA, 1986

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERS DE TELECOMUNICACIÓ

DIAMETRO Y VULNERABILIDAD
EN REDES DE INTERCONEXION

JOSE GOMEZ MARTI

Tesis Doctoral presentada a la
Universitat Politècnica de Catalunya
para la obtención de título de
Doctor Ingeniero de Telecomunicación.

Director de Tesis:

Dr. MIGUEL ANGEL FIOL MORA

Barcelona, 1986.

El trabajo desarrollado en esta Tesis se encuadra dentro de las investigaciones del grupo de Teoría de Grafos del Departament de Matemàtiques de la Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Telecomunicació. Por ello, debo agradecer a todos los compañeros del grupo, y especialmente, a mi director de Tesis Dr. M.A. Fiol y al Dr. J.L.A. Yebra, sus inestimables ideas, sugerencias y comentarios.

J.G.

Barcelona, 1986

INDICE

CAPITULO I.- GRAFOS Y REDES DE INTERCONEXION.....	1
1.1 INTRODUCCION.....	2
1.2 GRAFOS Y DIGRAFOS.....	4
1.3 GRAFOS (Δ, D)	6
1.4 PRINCIPALES METODOS DE CONSTRUCCION DE GRAFOS (Δ, D)	7
1.5 GRAFOS $(\Delta, D, D', 1)$	10
CAPITULO II.- GRAFOS COMPUESTOS Y PRODUCTO DE GRAFOS.....	12
2.1 INTRODUCCION.....	13
2.2 GRAFOS COMPUESTOS BASICOS.....	14
2.3 GRAFOS COMPUESTOS BIPARTITOS.....	15
2.4 GRAFOS COMPUESTOS FF	16
2.5 GRAFOS COMPUESTOS BDQ_2	17
2.6 GRAFOS COMPUESTOS DQ_Δ	18
2.7 GRAFOS COMPUESTOS $B_0 \nabla B_1$	20
2.8 GRAFOS COMPUESTOS $B_0 \Sigma B_1$	26
2.9 GRAFOS COMPUESTOS BIPARTITOS $B_0 \Sigma B_1$	42
2.10 GRAFOS $G < B$ Y $B(G^*)$	46
2.11 GRAFOS $G \Delta_p B$	50
2.12 UNA ADICION DE VERTICES A LOS GRAFOS P_q	56
2.13 TABLA DE MAYORES GRAFOS (Δ, D)	59
CAPITULO III.- GRAFOS SOBRE ALFABETO.....	60
3.1 INTRODUCCION.....	61
3.2 DIGRAFOS DENSOS.....	63
3.3 GRAFOS DENSOS OBTENIDOS DE DIGRAFOS.....	64

3.4 GRAFOS SECUENCIA Y DE BOND.....	66
3.5 GRAFOS DE DELORME Y BISECUENCIA.....	71
3.6 GRAFOS DE TIPO C_s Y C_p	77
3.7 GRAFOS DE TIPO Z.....	80
3.8 GRAFOS $T(d,k)$	90
3.9 CONCLUSIONES.....	98

CAPITULO IV.- VULNERABILIDAD EN GRAFOS.

EL PROBLEMA $(\Delta, D, D, 1)$	100
4.1 INTRODUCCION.....	101
4.2 GRAFOS $P(d,k)$	104
4.3 GRAFOS $G\Lambda^1 B$ Y $B_0 \nabla^1 B_1$	109
4.4 GRAFOS $G\Lambda^2 B$ Y $B_0 \nabla^2 B_1$	114
4.5 GRAFOS $2nB$	117
4.6 GRAFOS $4B$	120
4.7 UN GRAFO $(7,2,2,1)$	123
4.8 MAYORES GRAFOS $(\Delta, D, D, 1)$	124

CAPITULO V.- LOS PROBLEMAS $(\Delta, D, D+1, 1)$ Y $(\Delta, D, D+2, 1)$

5.1 INTRODUCCION.....	127
5.2 VULNERABILIDAD DE LOS GRAFOS FF	128
5.3 GRAFOS $B G $	129
5.4 GRAFO BIPARTITO BISECUENCIA.....	132
5.5 VULNERABILIDAD DE LOS GRAFOS DQ_Λ Y $B_0 \nabla B_1$	136
5.6 GRAFOS $G\Lambda^{II} B$ Y $B_0 \nabla^{II} B_1$	138
5.7 VULNERABILIDAD DE LOS GRAFOS $B\Lambda_{pt}$	140
5.8 VULNERABILIDAD DE LOS GRAFOS $B(G^*)$	142
5.9 VULNERABILIDAD DE LOS GRAFOS $B_0 \Sigma B_1$ Y $G \Sigma B$	144
5.10 MAYORES GRAFOS $(\Delta, D, D+1, 1)$ Y $(\Delta, D, D+2, 1)$	146

BIBLIOGRAFIA.....	149
-------------------	-----

CAPITULO I

GRAFOS Y REDES DE INTERCONEXION

1.1 INTRODUCCION

Todo sistema físico o real en el que exista una relación binaria entre ciertos objetos puede modelarse mediante un grafo, estructura matemática que está formada por un conjunto de puntos (llamados vértices) y de líneas que los enlazan (llamados arcos o ramas).

Debido a ello, y a su simplicidad intrínseca, la teoría de grafos, íntimamente ligada con la teoría combinatoria, se aplica actualmente en numerosos problemas pertenecientes a áreas tan diversas como la Ingeniería Eléctrica y Civil, Ciencias de la Computación, Lingüística, Genética, Psicología, Física, Química, etc., sin olvidar sus relaciones con otras ramas de la Matemática.

Más concretamente, un problema de actualidad en el que tiene aplicación dicha teoría es el diseño de redes de telecomunicación o de interconexión para multiprocesadores.

Los multiprocesadores son sistemas informáticos en los que existen varias unidades de proceso capaces de ejecutar tareas de forma simultánea, lo que redundará en una mayor velocidad de cálculo.

Los objetivos de los sistemas multiprocesadores son [52] [25]:

1. Poder ejecutar los algoritmos de una forma paralela y concurrente.
2. Aumentar la velocidad de cálculo.
3. Fiabilidad, es decir, posibilidad de que el sistema

funcione de forma degradada.

4. Modularidad, o posibilidad de variar el número de procesadores, y de recursos en general, según las necesidades.
5. Optimización en el uso de los recursos.

Parte muy importante de tales sistemas son las redes de interconexión que permiten una adecuada comunicación entre los procesadores, y que pueden modelarse mediante grafos.

Los principales requerimientos exigidos a la topología de dichos sistemas son [29]:

1. Valor reducido del número de enlaces (grado) conectados a cada nodo a fin de minimizar el costo hardware-software de la comunicación.
2. Diámetro mínimo (diámetro=distancia máxima entre nodos, donde la distancia entre dos nodos es el número mínimo de enlaces que se necesitan para interconectarlos).
3. Existencia de algoritmos eficientes y sencillos de encaminamiento de los mensajes a través del sistema.
4. Tráfico uniforme.
5. Fiabilidad frente a posibles fallos de algunas conexiones.

Dos importantes problemas derivados de tales requerimientos son:

- Diseño de redes densas, es decir, con elevado número de nodos para un diámetro y grado dados, con las

cuales se consigue, entre otras cosas, aumentar la velocidad de transferencia de datos.

- Construcción y evaluación de redes densas fiables desde el punto de vista de fallo de un procesador.

Ambos problemas, en general, de muy difícil solución han sido estudiados por numerosos autores ver [5], [7], [10], [21], [48], [50] y [53], y constituyen el tema central de este trabajo.

En este primer capítulo introducimos los conceptos fundamentales usados para el estudio de dichas cuestiones, y se resumen los principales métodos conocidos para el diseño de tales redes.

1.2 GRAFOS Y DIGRAFOS

Como se sabe, las redes de interconexión pueden ser modeladas mediante las estructuras matemáticas llamadas grafos.

En general usaremos la terminología empleada en [4], [8], [9], [25] y [42].

Un *grafo* $G = (V, E)$ consiste en un conjunto $V = V(G)$ de puntos llamados *vértices* y un conjunto $E = E(G)$ de pares *no ordenados* de vértices distintos llamados *ramas* (o *líneas*). Dos vértices, x e y , se dicen *adyacentes* si el par no ordenado $e = \{x, y\} = xy = yx$ es un elemento de E . Se dice entonces que e *incide* en x (o en y). El *grado* $\delta(x)$ del vértice x es el número de líneas que inciden en él, y el grado del grafo G es $\Delta = \Delta(G) = \max_{x \in V} \delta(x)$. Un *recorrido* de longitud 1 es una se-

cuencia de vértices y ramas $x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, e_{l-1}, x_{l-1}, e_l, x_l$. Un *camino* es un recorrido con todos los vértices distintos. La *distancia* entre dos vértices $x, y \in V(G)$, denotada por $d(x, y)$, es la mínima longitud de un camino x - y .

Un importante parámetro relacionado con la distancia es el *diámetro* D que viene definido por

$$D = \max_{x, y \in V} \{d(x, y)\} \quad (1.1)$$

Un grafo G es *regular* de grado Δ o Δ -*regular* si en cada uno de sus vértices inciden Δ ramas, es decir, si todos sus vértices tienen grado Δ

$$d(x) = |r(x)| = \Delta \quad \forall x \in V$$

donde $r(x)$ representa el conjunto de vértices adyacentes a x .

Un grafo $G(V, E)$ es bipartito con conjuntos de vértices V_1 y V_2 si $V(G) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y cada rama une un vértice de V_1 con un vértice de V_2

El concepto de *grafo dirigido* o *digrafo* deriva directamente del de grafo sin más que exigir que las ramas, ahora, llamados *arcos* sean *pares ordenados* de vértices. Por tanto la mayor parte de los conceptos y terminología correspondiente a grafos tiene una directa generalización para digrafos, ver [25].

Notar que en un digrafo todos los caminos son unidireccionales.

1.3 GRAFOS (Δ, D)

Un destacado problema en el diseño de redes de interconexión es el llamado *problema (Δ, D)* , que consiste en construir grafos con el máximo número de vértices N , dado su grado Δ y diámetro D (*grafos (Δ, D)*).

Por otra parte el *problema (d, k)* , equivale al anterior pero para digrafos, tiene un interés más teórico que práctico ya que actualmente se conocen familias de digrafos con número de vértices muy cercano a la inalcanzable cota máxima, llamada *cota de Moore*, véase [49].

Los tres parámetros considerados en la construcción de grafos densos, N , Δ y D , están relacionados de manera que, p.e. la especificación de Δ y D determina, dentro de unos límites el valor de N . La cota máxima del número de vértices de un grafo viene dada por la cota de Moore. Un simple razonamiento (ver, por ejemplo [2]) conduce a

$$N \leq 1 + \Delta + \Delta(\Delta-1) + \dots + \Delta(\Delta-1)^{D-1} = \begin{cases} \frac{\Delta(\Delta-1)^D - 2}{\Delta - 2}, & \Delta > 2 & (1.2a) \\ 1 + 2D, & \Delta = 2 & (1.2b) \end{cases}$$

Al número dado por (1.2) en el caso de igualdad se llama *cota de Moore*, y a los grafos que alcanzan dicho valor *grafos de Moore (Δ, D)* .

Para $\Delta = 2$ los grafos de Moore de diámetro D corresponden a ciclos de longitud $2D + 1$.

Sin embargo para $\Delta > 2$, se ha probado [3], [31] y [43] que los grafos de Moore sólo existen para unos pocos valores de Δ y D . Así, sólo son posibles los grafos $(3,2)$ -grafo de Petersen- y $(7,2)$ -grafo de Hoffman y Singleton- (y quizá también $(57,2)$).

También es posible, siguiendo razonamientos análogos al mencionado anteriormente, obtener la cota de Moore para grafos bipartitos de grado Δ , la cual viene dada por:

$$N = 2 \left(\frac{(\Delta - 1)^D - 1}{\Delta - 2} \right) \quad D \geq 3 \quad (1.3)$$

El grafo bipartito completo $K_{\Delta, \Delta}$ es el grafo bipartito de Moore de grado Δ y diámetro 2. Para $\Delta = 2$ los ciclos de longitud $2D$ constituyen también los grafos bipartitos de Moore. Sin embargo, para $\Delta \geq 3$ y $D \geq 3$, hasta ahora, sólo se ha probado la existencia de estos grafos para valores del grado $\Delta = q + 1$, donde q es una potencia de un primo, y diámetro $D = 3, 4, 6$. En el siguiente capítulo se utilizarán dichos grafos, entre otros, para construir nuevos grafos densos.

1.4 PRINCIPALES METODOS DE CONSTRUCCION DE GRAFOS (Δ, D)

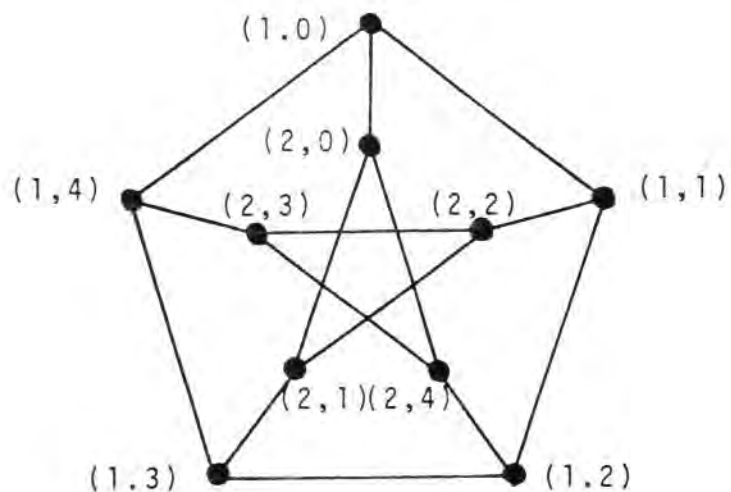
Producto de grafos.

Una forma sencilla de describir el producto de grafos es la siguiente:

Se toman varias copias de un grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ y se unen, no necesariamente todas con todas, empleando una cantidad de ramas que, entre cada dos copias unidas, es del mismo orden que su número de vértices $N_1 = |V_1|$.

Por ejemplo, el grafo de Petersen se puede construir como el producto de dos ciclos de longitud 5, según muestra la Figura 1.1.

Fig. 1.1



En el Capítulo 2 definiremos un producto de grafos bipartitos que mejora bastantes valores conocidos en la tabla de los mejores grafos (Δ, D) (con mayor número de vértices).

Composición de grafos.

Al igual que en el producto de grafos, se toman varias copias de un grafo G_1 y se unen entre sí según la estructura de un grafo G_2 . El grafo compuesto obtenido se denota por $G_1[G_2]$. Sin embargo en esta construcción se desea que existan pocas ramas de unión entre copias. La Figura 1.2 muestra el grafo $C_5[K_6]$, composición del ciclo de 5 vértices con el grafo completo de 6 vértices.

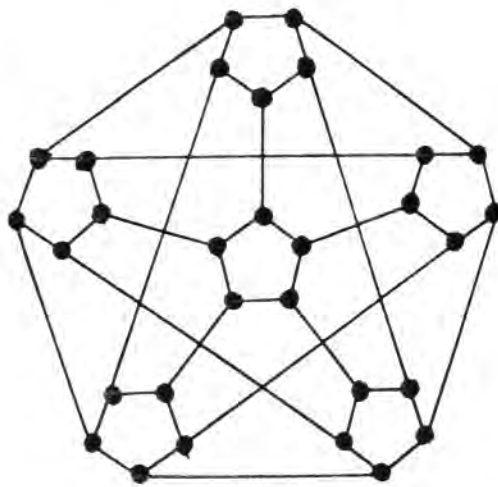


Fig. 1.2

En el siguiente capítulo, después de hacer un pequeño resumen de los diferentes tipos de grafos compuestos conocidos hasta ahora, se proponen nuevos métodos de construcción de tales grafos, los cuales mejoran numerosos valores en la tabla de los mayores grafos (Δ, D) conocidos.

Grafos sobre alfabetos o método directo.

En este caso los vértices son denotados por palabras formadas a partir de un alfabeto dado. Esta construcción posee una doble ventaja:

- Es fácil hallar métodos para encaminar mensajes de un vértice a otro.
- La elaboración de dichos grafos es sencilla.

En el capítulo 3 se resumen las principales familias de grafos sobre alfabetos conocidas, y además se definen otras nuevas que mejoran, en algunos casos, las propuestas anteriormente.

1.5 GRAFOS (Δ, D, D', s)

Otro importante problema relacionado con el descrito en la Sección 1.3 es el denominado problema (Δ, D, D', s) , ligado con el diseño de redes densas fiables. Más concretamente, se trata de obtener grafos (Δ, D) tales que cuando se les suprimen s vértices quedan con diámetro $\leq D'$, donde D' es cercano o incluso igual a D .

Muchos de los estudios realizados con el problema (Δ, D, D', s) se han realizado considerando $s = 1$ (caso más interesante) y $D' = D, D + 1$ o $D + 2$. Véanse, por ejemplo las tesis doctorales de Bond [10] y de Peyrat [48].

La Figura 1.3 muestra el grafo óptimo (es decir, con el máximo número de vértices) $(4, 2, 2, 1)$.

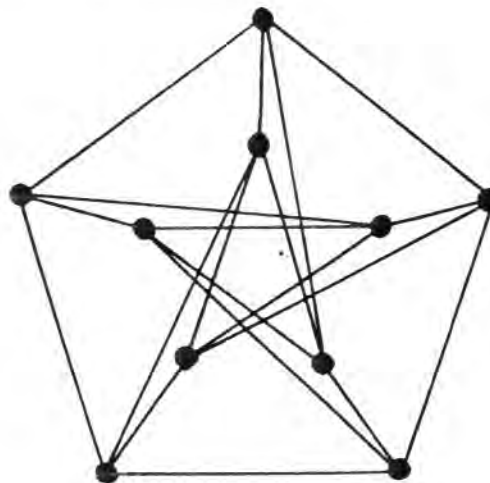


Fig. 1.3

En el capítulo 4 se mejoran numerosos valores de la tabla de mayores grafos $(\Delta, D, D, 1)$ conocido, muchos de ellos corresponden a grafos obtenidos mediante varios productos especiales de grafo. También en este capítulo se define una nueva familia de grafos sobre alfabetos $(\Delta, D, D, 1)$ para $\Delta = 4n + 1, n \in \mathbb{N}$.

En el capítulo 5, y último de este trabajo, se estudian los problemas $(\Delta, D, D+1, 1)$ y $(\Delta, D, D+2, 1,)$. Nuestra contribución consiste, en este caso, en la propuesta de nuevos métodos que permiten mejorar muchos de los resultados conocidos anteriormente.

CAPITULO II

GRAFOS COMPUESTOS Y PRODUCTO DE GRAFOS

2.1 INTRODUCCION.

En este capítulo y en el siguiente se trata el problema (Δ, D) (ver Secc.1.3), que ha merecido especial atención en los últimos años por sus implicaciones en el diseño de redes de interconexión.

Como se comentó en el capítulo anterior, los principales métodos de construcción de grafos densos son: la *composición de grafos*, *producto de grafos* y *grafos sobre alfabetos*. Sin embargo, para valores reducidos de N (número de vértices), tales grafos también se han obtenido mediante el empleo de ordenador, ver [21] y [12].

En este capítulo se tratan los dos primeros métodos de construcción y el tercero se estudia en el Capítulo III. Más concretamente, después de revisar las construcciones más representativas de grafos compuestos (desde la Sección 2.2 hasta la Sección 2.6), presentamos en las Secciones 2.7, 2.8 y 2.9 nuevas familias de tales grafos. Seguidamente, en la Sección 2.10 se define un producto especial de grafos bipartitos. En la Sección 2.11 se realizan varias modificaciones a los grafos DQ_Λ (véase Sección 2.6), consiguiendo nuevas mejoras en la tabla de grandes grafos. Posteriormente, en la siguiente sección, se propone una adición de vértices a los grafos P_q (grafos bipartitos de Moore de diámetro 3 véase Sección 1.3) y, finalmente, en la Sección 2.13 se muestra la tabla de mayores grafos densos conocidos para $\Delta \leq 16$ y $D \leq 10$ que incluye todos los nuevos valores derivados de las construcciones propuestas en este capítulo.

2.2 GRAFOS COMPUESTOS BASICOS.

Una construcción conceptualmente simple, pero que da buenos resultados en la obtención de "grandes grafos" (grafos densos), es la propuesta por Bermond, Delorme y Quisquater en [5, Teor. 1]. Esta construcción produce los llamados grafos compuestos ("compound graphs"). Como se comentó, básicamente consiste en considerar varias copias de un grafo dado G_1 unidas entre sí según la estructura de otro grafo G_2 . Más concretamente, dados los grafos $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$, con $N_i = |V_i|$ vértices, grado Δ_i y diámetro D_i , se construye su grafo compuesto $G_1[G_2]$, con $N = N_1 N_2$ vértices, sustituyendo cada vértice $x \in V_2$ por una copia de G_1 , que representaremos por G_1^x ; y cada línea $xy \in E_2$ por una línea que une un vértice de G_1^x con otro de G_1^y . Así podremos construir $G_1[G_2]$ de tal manera que su grado sea Δ si y sólo si $\Delta \geq \Delta_1$ y

$$\Delta - \Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \Delta N_1 - \sum_{x \in V_1} \delta(x) \quad (2.1)$$

Como se explica en [6], el diámetro D de $G_1[G_2]$ depende de como se conectan las copias de G_1 (es decir, de los vértices terminales elegidos para las líneas que conectan dichas copias), pero es fácil ver que debe cumplirse

$$D \leq (D_2 + 1)D_1 + D_2 \quad (2.2)$$

En efecto, para ir de un vértice situado en la copia G_1^x hasta otro en G_1^y necesitamos atravesar un máximo de D_2 líneas "inter-copias" (distancia máxima entre x e y en G_2),

lo que supone pasar por un máximo de $D_2 + 1$ copias, y como en el peor de los casos, atravesar cada copia puede costarnos D_1 pasos, resulta la cota indicada.

2.3 GRAFOS COMPUESTOS BIPARTITOS

En [6], Delorme propone una construcción análoga a la anterior pero para la obtención de grafos bipartitos. En ella, $G_1 = (V_1 \cup U_1, E_1)$ es un grafo bipartito con conjuntos de vértices V_1 y U_1 . Igualmente, cada vértice $x \in V_2$ (misma notación que antes) se sustituye por una copia de G_1 , G_1^x , pero a diferencia de la anterior construcción, cada línea $xy \in E_2$ da lugar a dos líneas que unen las copias G_1^x y G_1^y . Una de estas líneas tiene un vértice terminal en V_1^x y el otro en U_1^y , y viceversa la otra, Así, dado $\Delta \geq \Delta_1$ tal que

$$\Delta - \Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \min \left\{ |V_1| \Delta - \sum_{x \in V_1} \delta_1(x), |U_1| \Delta - \sum_{x \in U_1} \delta_1(x) \right\} \quad (2.3)$$

se obtiene un grafo compuesto bipartito con $N = N_1 N_2$ vértices, grado Δ y diámetro

$$D \leq D_2(D_1 - 1) + D_1 + D_2 = D_1(D_2 + 1) \quad (2.4)$$

La demostración de esta cota se basa en que, por ser G_1 bipartito, si su diámetro D_1 es par [impar], la distancia entre dos vértices situados en conjuntos distintos (U_1 y V_1) [en el mismo conjunto] es menor o igual que $D_1 - 1$.

2.4 GRAFOS COMPUESTOS FF.

Las dos construcciones de grafos compuestos propuestas por M.A. Fiol y J. Fàbrega en [27] tienen ciertas similitudes con las anteriores. Ambas pueden unificarse en una sola como hacemos a continuación: Al igual que en la Sección 2.3, $G_1 = (V_1 \cup U_1, E_1)$ es un grafo bipartito pero el grafo compuesto no lo es. Además ahora cada línea de G_2 da lugar a *cuatro* líneas cuya disposición recuerda al grafo bipartito completo $K_{2,2}$. Así, si existe la rama xy en G_2 , se unen las copias G_1^x y G_1^y de la siguiente forma:

Se eligen los vértices $a, a' \in V_1^x$; $b, b' \in U_1^x$; $c, c' \in V_1^y$; $d, d' \in U_1^y$, y se unen tal como muestra la Figura 2.1

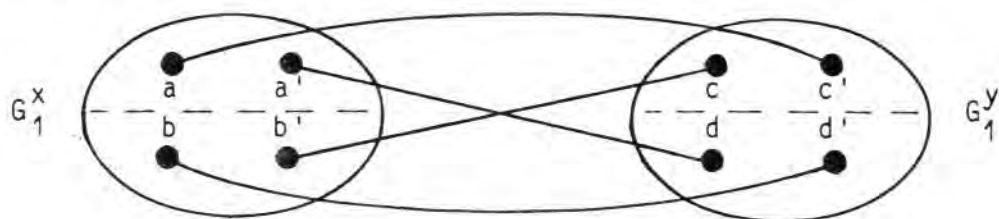


Figura 2.1

Vértices de un mismo conjunto i e i' , $i \in \{a, b, c, d\}$, pueden *no ser distintos*. La elección de dichos vértices puede hacerse de tal modo que el grafo resultante tenga grado Δ si $\Delta \geq \Delta_1$ y

$$\Delta - \Delta_1 \leq 2\Delta_2 \leq \min\left\{ |V_1| \Delta - \sum_{x \in V_1} \delta_1(x), |U_1| \Delta - \sum_{x \in U_1} \delta_1(x) \right\} \quad (2.5)$$

Su número de vértices es $N = N_1 N_2$ y su diámetro es tal que

$$D \leq D_1(D_2 + 1) - 1 \quad (2.6)$$

(comparar con (2.4)) lo que se demuestra siguiendo un razonamiento totalmente análogo al que conduce a (2.4).

2.5 GRAFOS COMPUESTOS BDQ_2 .

Una construcción que presenta una complejidad algo mayor que las anteriores es la propuesta por Bermond, Delorme y Quisquater en [5, Teor. 2]. En ella se unen copias de dos grafos, en general distintos, $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G'_1 = (V'_1, E'_1)$, siguiendo la estructura de un grafo bipartito $G_2 = (V_2 \cup V'_2, E_2)$. Cada vértice $x \in V_2$ [$y \in V'_2$] se sustituye por una copia de G_1 , G_1^x , [G'_1 , $G_1'^y$]. Al igual que en la construcción básica de la Sección 2.2, cada rama $xy \in E_2$ se sustituye por otra que une un vértice de G_1^x con otro de $G_1'^y$, pero con la condición adicional de elegir estos vértices de manera que, al final, *todos* ellos sean vértices terminales de al menos una rama inter-copia. Entonces podemos construir el grafo compuesto $(G_1, G'_1)[G_2]$ de tal manera que su grado máximo sea Δ si y sólo si $\Delta > \Delta_1$, $\Delta > \Delta'_1$ y

$$N_1 - 1 + \Delta - \Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \Delta N_1 - \sum_{x \in V_1} \delta(x) \quad (2.7a)$$

$$N'_1 - 1 + \Delta - \Delta'_1 \leq \Delta'_2 \leq \Delta N'_1 - \sum_{y \in V'_1} \delta(y) \quad (2.7b)$$

donde Δ_2 y Δ'_2 denotan los grados de los vértices de los conjuntos V_2 y V'_2 respectivamente.

El grafo resultante tiene $N = N_1|V_2| + N'_1|V'_2|$ vértices y, suponiendo $D_1 \geq D'_1$, su diámetro satisface

$$D \leq D_2 + \left\lceil \frac{D_2}{2} \right\rceil D_1 + \left\lfloor \frac{D_2}{2} \right\rfloor D_1' \quad (2.8)$$

(su demostración puede verse en [5]). Si D_2 es impar y $D_1 \geq D_1' + 2$ se puede modificar ligeramente el razonamiento seguido en la anterior referencia para mejorar la acotación (2.8). Resulta entonces

$$D \leq D_2 + \left\lceil \frac{D_2}{2} \right\rceil D_1 + \left\lfloor \frac{D_2}{2} \right\rfloor D_1' + 1 \quad (2.9)$$

2.6 GRAFOS COMPUESTOS DQ_A .

En [19], Delorme y Quisquater proponen una construcción en la que convergen ideas descritas en las secciones anteriores. Esta construcción se asemeja a los grafos tipo $(G_1, G_1')[G_2]$ (Sección 2.5) ya que también se usan copias de dos grafos distintos, unidas entre sí según la estructura de un grafo bipartito (en este caso completo), y todos los vértices son terminales de alguna rama inter-copia.

Concretamente, sean los grafos $G_1 = B = (V_B \cup U_B, E_B)$ bipartito con $|V_B| = |U_B|$ y $G_1' = G = (V_G, E_G)$, con grados y diámetros Δ_B, D_B y Δ_G, D_G respectivamente. Sea $G_2 = K_{1,m} = (V \cup U, E)$ el grafo bipartito completo con $1+m$ vértices (1 y m dependerán del grado del grafo resultante). Entonces cada vértices $x \in V$ [$y \in U$] se sustituye por una copia de B, B^x [G, G^y] de manera que tenemos 1 copias de B y m copias de G . Al igual que en la Sección 2.3, cada línea $xy \in E$ da lugar a dos líneas que unen las copias de B^x y G^y . Para ello se eligen los vértices

$a \in V_B$, $b \in U_B$ y $c, c' \in V_G$ (no necesariamente distintos), y se establecen las ramas ac y bc' según muestra la Figura 2.2. Como hemos dicho, la elección de estos vértices debe hacerse de manera que, en el grafo resultante, *todos* ellos sean terminales de al menos una rama inter-copia.

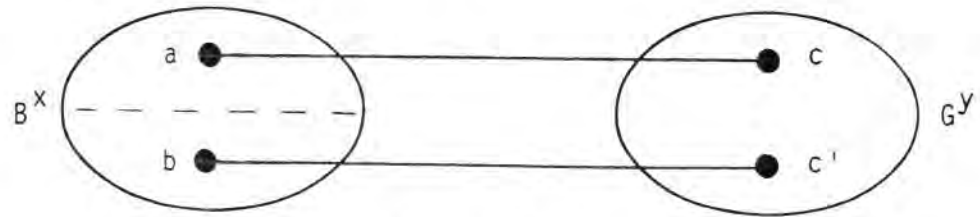


Figura 2.2

Entonces podemos construir el grafo compuesto $B \Delta G$ de tal manera que su grado sea Δ si y sólo si $\Delta > \Delta_B$, $\Delta > \Delta_G$ y l y m vienen dados por las expresiones

$$l = \left\lfloor \frac{\Delta |V_G| - \sum_{x \in V_G} \delta(x)}{2} \right\rfloor \quad (2.10.a)$$

$$m = \Delta |V_B| - \sum_{x \in V_B} \delta(x) = \Delta |U_B| - \sum_{x \in U_B} \delta(x) \quad (2.10.b)$$

Por ejemplo, si B y G son grafos regulares de grados Δ_B y Δ_G respectivamente nos queda

$$l = \left\lfloor \frac{\Delta |V_G| (\Delta - \Delta_G)}{2} \right\rfloor, \quad m = |U_B| (\Delta - \Delta_B) = |V_B| (\Delta - \Delta_B) \quad (2.11)$$

Comprobemos ahora que el diámetro D del grafo $B \Delta G$ está acotado de la forma

$$D \leq D_B + D_G + 1 \quad (2.12)$$

Como *cada* vértice de una copia de B es adyacente a un vértice de una copia de G , basta comprobar que la distancia entre los vértices genéricos $s \in B^X$ y $t \in G^Y$ es menor o igual que $D_B + D_G$. Por ser B bipartito, desde s y en un máximo de $D_B - 1$ pasos podemos alcanzar un vértice $v \in B^X$ (en la Fig. 2.2 a ó b), que es adyacente a un vértice $w \in G^Y$ (en la figura c ó c') —ya que $G_2 = K_{1,m}$ — el cual está a distancia $\leq D_G$ del vértice t .

2.7 GRAFOS COMPUESTOS $B_0 \nabla B_1$.

Esta *nueva* construcción que proponemos conjuga las principales características de los grafos compuestos FF y DQ_Δ . Al igual que en la sección anterior se usan copias de dos grafos distintos G_1 y G'_1 , en este caso *ambos bipartitos*, unidas entre sí siguiendo la estructura de un grafo bipartito completo $K_{1,m} = (V \cup U, E)$ de manera que todos los vértices sean terminales de alguna rama intercopia. Además, cada línea de $K_{1,m}$ da lugar a *cuatro* líneas dispuestas de la misma forma que en los grafos compuestos FF , ver Figura 2.1.

Entonces, usando la notación $G_1 = B_0$, $G'_1 = B_1$, grafos bipartitos $B_i = (V_{i0} \cup V_{i1}, E_i)$, $i = \{0, 1\}$, $|V_{i0}| = |V_{i1}|$, con número de vértices $N_i = 2|V_{i0}| = 2|V_{i1}| = 2n_i$, grado Δ_i y diámetro D_i , podemos construir el grafo compuesto $B_0 \nabla B_1$ con máximo número de vértices $N = 1N_0 + mN_1$ y grado Δ si y sólo si $\Delta > \Delta_0$, $\Delta > \Delta_1$ y $1, m$ satisfacen

$$l = \left\lfloor \frac{|V_{10}| - \sum_{x \in V_{10}} \delta(x)}{2} \right\rfloor \quad (2.13.a)$$

$$m = \left\lfloor \frac{|V_{00}| - \sum_{x \in V_{00}} \delta(x)}{2} \right\rfloor \quad (2.13.b)$$

Teorema 2.7.1: El grafo compuesto $B_0 \nabla B_1$ tiene diámetro $D \leq D_0 + D_1$.

Demostración:

La demostración es análoga a la dada en la secc. anterior para los grafos DQ_Λ . Por el mismo motivo que antes, basta demostrar que la distancia entre un vértice de una copia de B_0 , $s \in V_{0i}^x$ a otro de una copia de B_1 , $t \in V_{1j}^y$ no excede $D_0 + D_1 - 1$.

Por ser B_0 bipartito, el vértice s está a distancia $\leq D_0 - 1$ de un vértice $v \in V_{0i'}^x$, $i' = i + (D_0 - 1) \bmod 2$, que, por construcción de $B_0 \nabla B_1$, puede elegirse de manera que sea adyacente a un vértice $w \in V_{1j'}^y$, $j' = j - (D_1 - 1) \bmod 2$, el cual está a distancia $\leq D_1 - 1$ (B_1 bipartito) del vértice t .

Veamos ahora dos casos particulares en los que se hace una construcción directa uniendo entre sí copias de B_0 y B_1 .

2.7.1 Con la misma notación anterior, sean B_i , $i = 0, 1$, dos grafos bipartitos regulares de grado $\Delta_0 = \Delta_1$ con número de vértices $N_i = 2|V_{i0}| = 2|V_{i1}| = 2n_i$. Supongamos que los vértices del conjunto V_{ij} están rotulados con los elementos del conjunto $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$. Tomemos ahora n_1 copias de B_0 y n_0 copias de B_1 identificadas respectivamente con los enteros mod n_1 y n_0

de manera que un vértice genérico puede denotarse con el vector (s, i, j, t) donde $s \in V_{ij} \cong \mathbb{Z}/n_i \mathbb{Z}$ pertenece a la copia $z \in \mathbb{Z}/n_{\bar{i}} \mathbb{Z}$ del grafo $B_{\bar{i}}$ ($\bar{i} = i + 1 \pmod{2}$). Unimos las copias de B_0 con las de B_1 incrementando el grado de todos los vértices en dos unidades estableciendo las nuevas adyacencias:

$$(s, i, j, t) \sim \begin{cases} (t, \bar{i}, j, s) \\ (t, \bar{i}, \bar{j}, s) \end{cases} \quad (2.14)$$

Ver Figura 2.3.

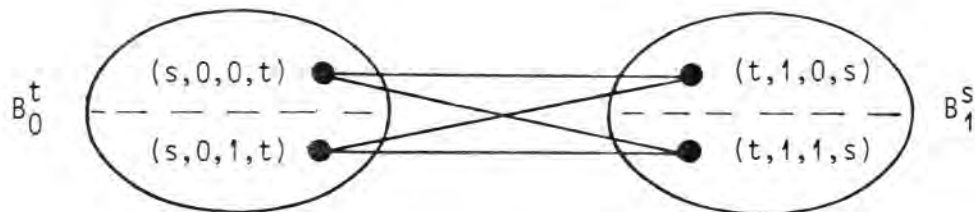


Figura 2.3

El grafo $B_0 \nabla B_1$ así construido es regular de grado $\Delta = \Delta_0 + 2$ ($= \Delta_1 + 2$), tiene $N = n_0 N_1 + n_1 N_0 = \frac{N_0}{2} N_1 + \frac{N_1}{2} N_0 = N_0 N_1$ vértices y su diámetro es $D \leq D_0 + D_1$ (Teorema 2.7.1).

Notar que en esta construcción, vista como paso particular de la primeramente descrita, se tiene $K_{1,m} = K_{\frac{N_1}{2}, \frac{N_0}{2}}$ (fórmulas (2.13.a) y (2.13.b) con $\Delta = \Delta_0 + 2$, $|V_{i0}| = n_i = N_i/2$, $\sum_{x \in V_{i0}} \delta(x) = \Delta_0 n_i = \Delta_0 N_i/2$).

Ya que cada vértice de una copia de B_i es adyacente a dos vértices de una copia de $B_{\bar{i}}$, existen al menos dos caminos de longitud $\leq D_0 + D_1$ entre vértices pertenecientes a copias del mismo grafo. Esta duplicidad de caminos induce a

pensar en suprimir ramas sin aumentar el diámetro y, en realidad, no es difícil comprobar que de cada conjunto de 4 ramas situadas entre 2 copias, según muestra la Figura 2.3, se puede *suprimir una* obteniéndose un grafo con el mismo diámetro $D_0 + D_1$. En la siguiente sección usaremos esta idea para obtener estructuras con menor redundancia de camino y, por tanto, grafos más densos.

2.7.2 Si los grafos B_i considerados son tales que

$$|V_{ij}| = n_i = 2n'_i, \quad i = 0, 1 \quad (2.15)$$

podemos hacer una construcción en la que el grado sólo aumenta en una unidad. En efecto, según (2.15) podemos descomponer cada V_{ij} en dos subconjuntos disjuntos V_{ijk} , $k \in \{0, 1\}$ con n'_i vértices cada uno a los que identificamos con los enteros mod n'_i . Sean n'_1 copias de B_0 y n'_0 copias de B_1 (identificadas respectivamente con los enteros mod n'_1 y n'_0). Un vértice genérico está representado ahora por el vector (s, i, j, k, t) , $s \in \mathbb{Z}/n'_i\mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{Z}/n'_i\mathbb{Z}$, $i, j, k \in \{0, 1\}$ y se establecen las nuevas adyacencia

$$(s, i, j, k, t) \sim (t, \bar{i}, k, j, s) \quad (2.16)$$

según muestra la Figura 2.4.

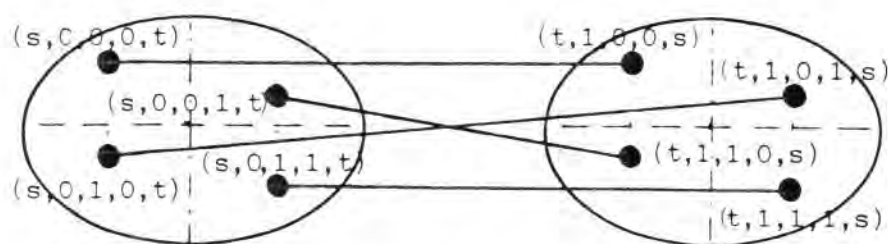


Figura 2.4

(comparar con la Figura 2.1).

Así obtenemos el grafo $B_0 \nabla B_1$ regular de grado $\Delta = \Delta_0 + 1$ ($=\Delta_1 + 1$), con $N = n_1^1 N_0 + n_0^1 N_1 = N_0 N_1 / 2$ vértices y diámetro $D \leq D_0 + D_1$ (según el esquema de la construcción general se ha tomado ahora $K_{1,m} = K_{\frac{N_1}{4}, \frac{N_0}{4}}$).

Mostraremos, como ejemplo, un camino entre los vértices $(x, 0, j, k, y)$ y $(s, 1, l, m, t)$, donde todas las operaciones son módulo 2.

$$(x, 0, j, k, y), \dots, (t, 0, j + D_0 - 1, l - (D_1 - 1), y), \\ (y, 1, l - (D_1 - 1), j + D_0 - 1, t), \dots, (s, 1, l, m, t)$$

en donde se puede observar que primeramente se utilizan un máximo de $D_0 - 1$ pasos para "elegir" el número t de la copia del vértice destino, después se da un paso para ir a dicha copia B_1^t y finalmente se usan un número de pasos $\leq D_1 - 1$ para "elegir" el número s de dicho vértice.

Un inconveniente de la construcción anterior es que, según (2.15), B_0 y B_1 deben tener orden múltiplo de 4. Para solucionar esto se puede usar una variante en la que se puede tener

$$|V_{ij}| = n_i = \alpha n_i^1, \quad i = 0, 1, \quad \alpha \text{ impar} > 1 \quad (2.17)$$

En ella se consideran primero $(\alpha-1)n_i^!$ vértices en cada V_{ij} y con ellos se hace la construcción anterior. Además, para que el diámetro no se incremente, cada uno de los restantes $2n_0^!$ vértices "sobrantes" en cada copia de B_0 se une a un vértice análogo de una copia de B_1 .

Por ejemplo, si $N_i/2 = n_i = 5n_i^!$ ($N_i=10$), las ramas que unen cada 4 copias pueden ser las que se muestran en la Figura 2.5. El grafo así obtenido que denotaremos por $B_0 \nabla_2 B_1$ tiene $N = 2n_1^!N_0 + 2n_0^!N_1 = \frac{2}{5}N_0N_1$ vértices y mismo grado y diámetro que antes.

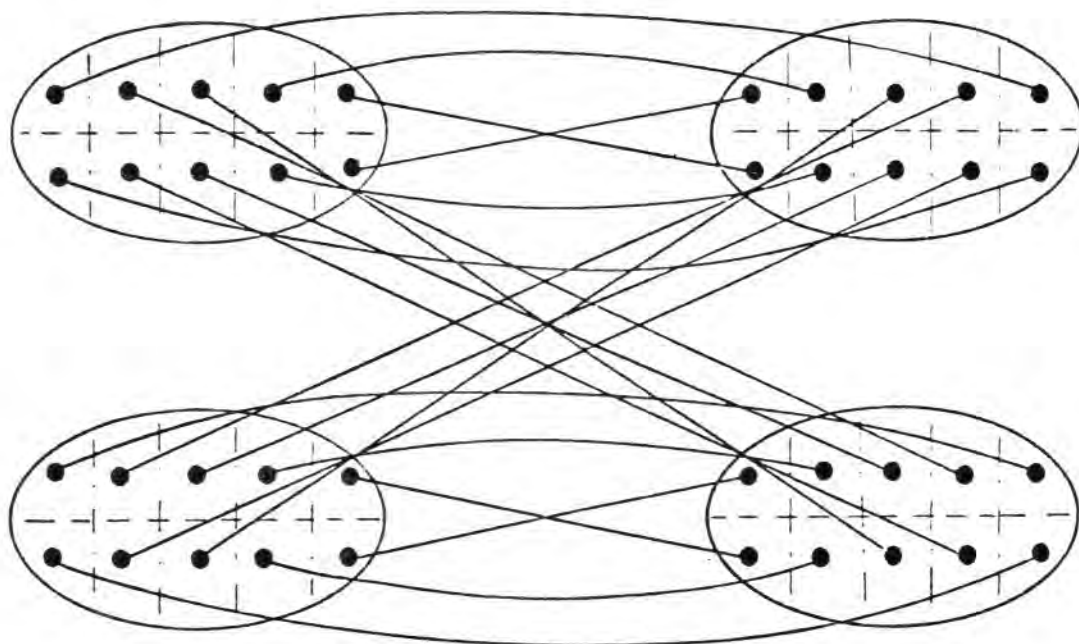


Figura 2.5

Evidentemente, tanto las construcciones particulares descritas en los anteriores Apartados 2.7.1 y 2.7.2, como las que definiremos en la sección siguiente, admiten generalización en el sentido de que, siguiendo el esquema de la construcción estudiada al principio de esta sección (o las correspondientes a secciones anteriores):

- a) No es imprescindible que los grafos B_0 y B_1 sean regulares.
- b) Los grados Δ_0 y Δ_1 pueden ser distintos con lo cual, si usamos por ejemplo la construcción del apdo. 2.7.2, el grado de ciertos vértices puede incrementarse en más de una unidad y, por tanto, el número de copias es mayor.

Naturalmente, todos estos grafos se representarán usando la misma notación que la introducida para sus correspondientes *configuraciones "básicas"*.

2.8 GRAFOS COMPUESTOS $B_0 \supset B_1$

Ya comentamos que en la construcción particular definida en el apdo. 2.7.1 existe duplicidad de caminos de longitud $\leq D$ para muchos pares de vértices. Lo mismo ocurre, y por igual motivo, en el caso general de la Secc. 2.7 o en los grafos DQ_A (Secc. 2.6) cada vez que vértices pertenecientes a copias de un grafo son adyacentes a dos o más vértices de las copias del otro. Además, nótese que en todos estos grafos, a partir de un vértice cualquiera se alcanza, a una distancia $\leq D-1$ una cantidad de vértices que es del orden $\frac{N}{2}$ (los pertenecientes a las copias del grafo distinto al del vértice inicial). Con el fin de evitar estos inconvenientes, y aumentar así el número de vértices conservando el grado y diámetro, en esta sección definiremos nuevas familias de grafos compuestos en los que se evitan, en lo posible los caminos múltiples.

2.8.1 Sean los grafos bipartitos B_0 y B_1 como en el Apdo. 2.7.1 con diámetros D_0 *par* y D_1 *impar*. Tomamos ahora 3 conjuntos de n_1 ($=N_1/2$) copias de B_0 y otros 3 de n_0 copias de B_1 . Denotamos con el vector

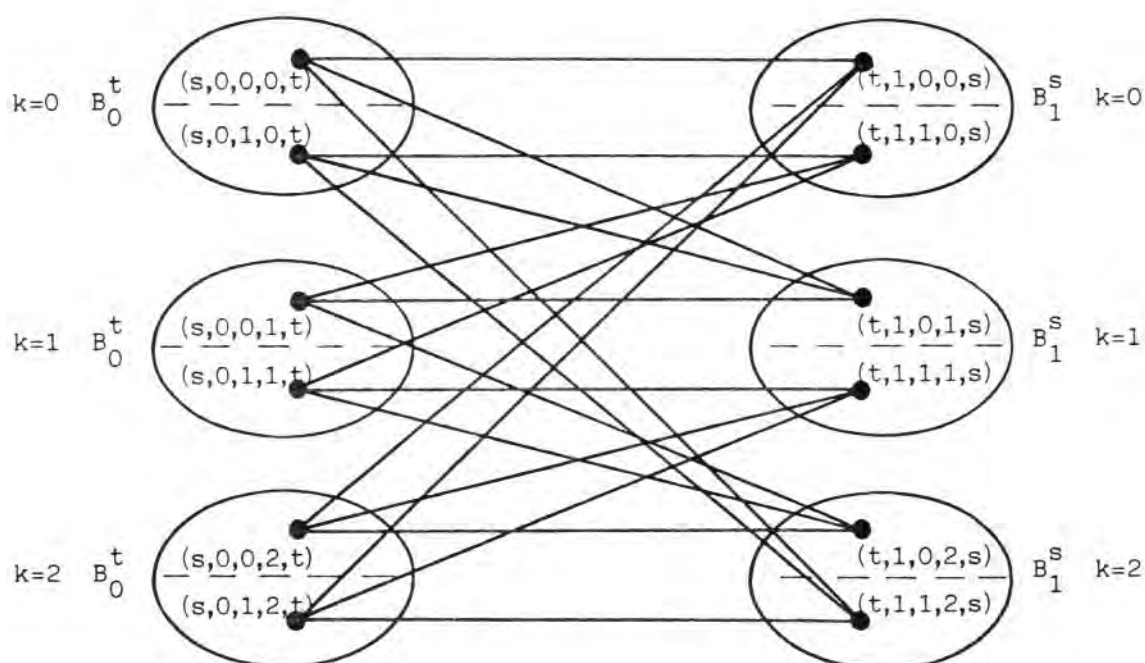
$$(s, i, j, k, t)$$

al vértice (s, i, j, t) (misma notación que en dicho apdo.) del conjunto k , $k \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Para unir las copias de B_0 con las de B_1 utilizamos las siguientes condiciones de adyacencia

$$(t, 1, j, k, s) \sim \begin{cases} (s, 0, j, k, t) \\ (s, 0, 0, k-1+2j, t) \\ (s, 0, 1, k-1+2j, t) \end{cases} \quad (2.18)$$

según muestra la Figura 2.6

Figura 2.6



$(=\Delta_1+2)$ y $D \leq D_0 + D_1 + 1$, donde ahora D_1 puede ser cualquiera.

2.8.4 Consideremos la anterior construcción cuando G_0 es el grafo trivial, $G_0 = K_1$. Entonces la estructura de interconexión para la configuración básica ($\Delta_1 = \Delta - 2$) nos queda según muestra la Figura 2.9.

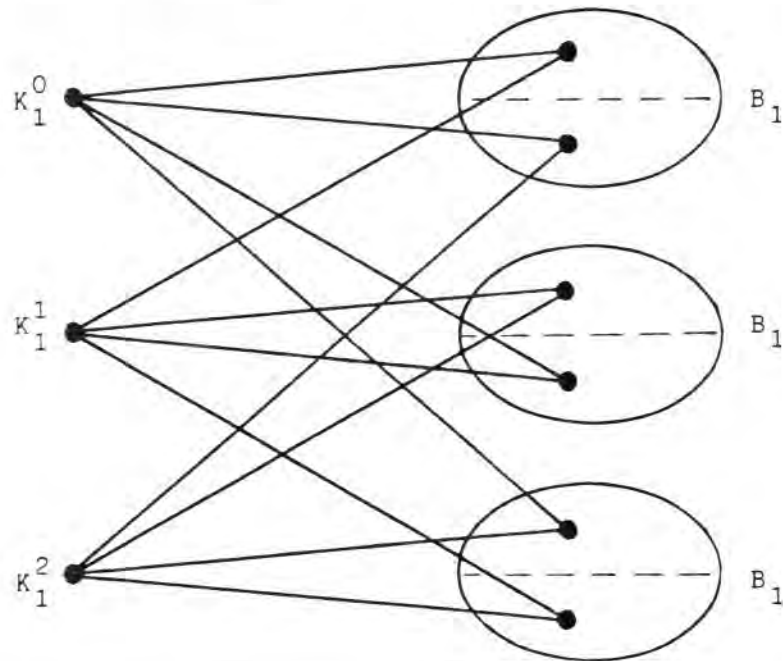


Figura 2.9

En general si tomamos B_1 con grado Δ_1 tal que $\Delta_1 + 2 = 4\alpha + \beta$, $0 \leq \beta \leq 3$, podemos incrementar el grado de los vértices K_1 hasta 4α obteniendo el grafo $K_1 \Sigma_3 B_1$ con $N = 3 \left[\frac{N_1}{2} + \alpha N_1 \right] = \frac{3(2\alpha+1)}{2} N_1$ vértices, grado $\Delta = \Delta_1 + 2$ y diámetro $\leq D_1 + 1$. Notar que si $\beta \neq 0$ los vértices K_1 quedan con grado menor que los pertenecientes a las copias de B_1 . Esto induce a pensar en modificar la construcción de manera que permita tomar más copias de B_1 (incrementando en β unidades el grado de dichos vértices K_1). Aunque existen múltiples soluciones, definiremos sólo las que dan lugar a grafos densos con mayor número de vértices que los anteriormente conocidos. En todos los

El grafo resultante, que denotamos por $B_0 \Sigma_1 B_1$, tiene grado $\Delta = \Delta_0 + 3$ ($= \Delta_1 + 3$) y su número de vértices es $N = 3n_1 N_0 + 3n_0 N_1 = 3N_0 N_1$.

Teorema 2.8.1: El grafo compuesto $B_0 \Sigma_1 B_1$ tiene diámetro $D \leq D_0 + D_1$.

Demostración:

La estructura de interconexión inter-copias mostrada en la Figura 2.6 tiene los automorfismos

$$\begin{aligned} (s, i, j, k, t) &\longmapsto (s, i, j, [k+1]_3, t) \\ (s, i, j, k, t) &\longmapsto (s, i, [j+1]_2, -[k+2]_3, t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

(donde $[]_n$ significa operar módulo n) que dejan únicamente las órbitas constituidas respectivamente por los vértices de la izquierda ($i=0$) y los de la derecha ($i=1$). Por tanto, en la comprobación de distancia podemos tomar siempre como vértices iniciales el $(s, 0, 0, 0, t)$ y el $(t, 1, 0, 0, s)$. Entonces los distintos caminos a considerar son:

- a.1) de $(s, 0, 0, 0, t)$ a $(x, 1, 1, m, y)$
- a.2) de $(s, 0, 0, 0, t)$ a $(x, 0, 1, m, y)$
- b.1) de $(t, 1, 0, 0, s)$ a $(x, 0, 1, m, y)$
- b.2) de $(t, 1, 0, 0, s)$ a $(x, 1, 1, m, y)$

Analicemos los casos (a). (Para los casos (b) la demostración es análoga). Los caminos de longitud $\leq D_0 + D_1$ son, en cada situación los siguientes:

-a.1

$$\begin{array}{l}
(\leq D_0 - 1) \quad (1) \quad (\leq D_1) \\
(s, 0, 0, 0, t), \dots, (y, 0, 1, 0, t), (t, 1, 1, 0, y), \dots, (x, 1, 0, 0, y) \\
\quad (\leq D_1 - 1) \\
\quad \dots, (x, 1, 1, 0, y) \\
(1) \quad (\leq D_1 - 1) \\
\quad (t, 1, 0, 1, y), \dots, (x, 1, 0, 1, y) \\
\quad (\leq D_1) \\
\quad \dots, (x, 1, 1, 1, y) \\
(1) \quad (\leq D_1) \\
\quad (t, 1, 1, 2, y), \dots, (x, 1, 0, 2, y) \\
\quad (\leq D_1 - 1) \\
\quad \dots, (x, 1, 1, 2, y)
\end{array}$$

-a.2

$$\begin{array}{l}
(\leq D_0 - 1) \quad (1) \quad (\leq D_1 - 1) \quad (1) \\
(s, 0, 0, 0, t), \dots, (x, 0, 1, 0, t), (t, 1, 0, 1, x), \dots, (y, 1, 0, 1, x), (x, 0, 0, 0, y) \\
\quad (1) \\
\quad \quad (x, 0, 1, 0, y) \\
\quad (\leq D_1 - 1) \quad (1) \\
\quad (t, 1, 1, 0, x), \dots, (y, 1, 1, 0, x), (x, 0, 0, 1, y) \\
\quad (1) \\
\quad \quad (x, 0, 1, 1, y) \\
(1) \quad (\leq D_1 - 1) \quad (1) \quad (\leq D_0 - 1) \\
\quad (t, 1, 0, 0, s), \dots, (y, 1, 0, 0, s), (s, 0, 1, 2, y), \dots, (x, 0, 0, 2, y) \\
\quad (1) \quad (\leq D_0 - 1) \\
\quad \quad (s, 0, 0, 2, y), \dots, (x, 0, 1, 2, y)
\end{array}$$

Notar que los casos a.1, en que ambos vértices están en copias de grafos distintos, los caminos se obtienen de forma análoga al del ejemplo del Apdo. 2.7.2, es decir primero se elige copia y luego vértice. Sin embargo, a diferencia de antes puede ocurrir ahora que algunos de estos vértices estén a

distancia máxima $D_0 + D_1$, por tanto también hay que investigar los casos a.2 en los que los vértices inicial y final pertenecen a copias del mismo grafo.

2.8.2 Las construcciones que definimos en este apdo. y en los siguientes son análogas a la anterior. Por tanto, nos limitaremos a destacar las características (tales como condiciones de los grafos de partida, estructura de interconexión inter-copias, número de vértices, etc.) de sus configuraciones básicas, prescindiendo de las demostraciones que, aunque son largas, no ofrecen ninguna dificultad pues se basan en las mismas ideas desarrolladas hasta ahora.

Tomando los grafos bipartitos B_0 y B_1 con diámetros D_0 y D_1 cualesquiera, el grafo compuesto $B_0 \Sigma_2 B_1$ se construye usando la estructura de la Figura 2.7,

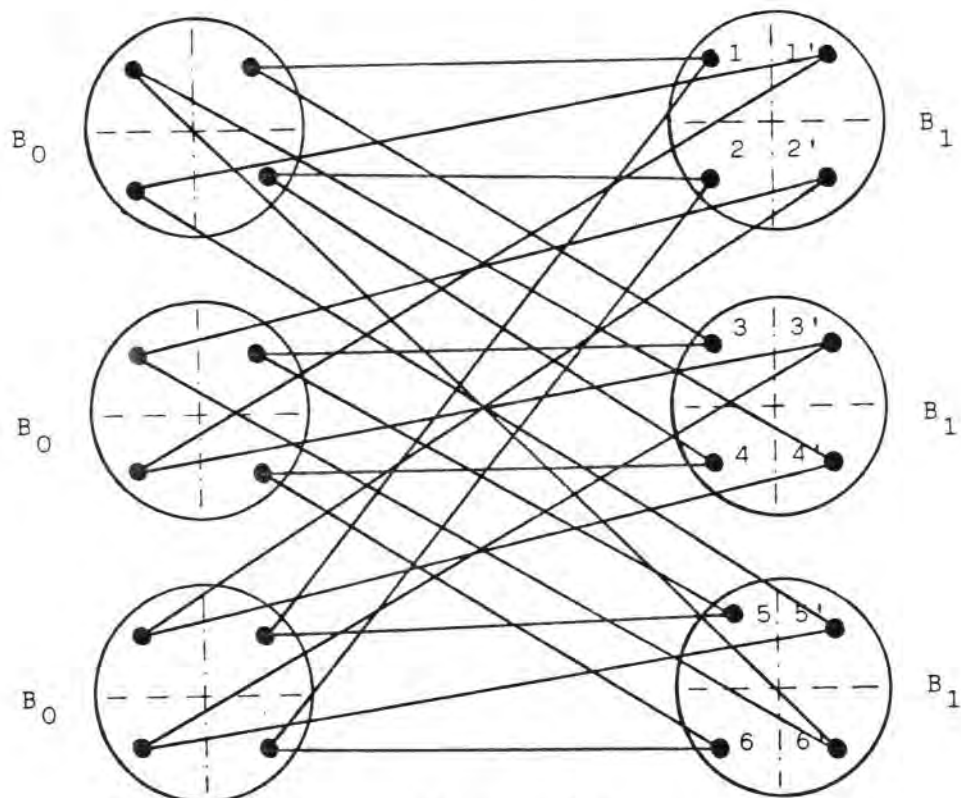


Figura 2.7

y tiene $N = \frac{3}{2} N_0 N_1$ vértices, grado $\Delta = \Delta_0 + 2$ ($= \Delta_1 + 2$) y diámetro $D \leq D_0 + D_1$.

Una variante de esta construcción, que denotamos de igual forma, supone $\Delta_0 = \Delta_1 + 2$. Entonces se identifican los vértices i e i' , $i = 1, 2, \dots, 6$, de B_1 , ver figura, resultando $N = \frac{9}{2} N_0 N_1$, $\Delta = \Delta_0 + 2$ ($= \Delta_1 + 4$) y diámetro $D \leq D_0 + D_1$.

2.8.3 Al igual que en los grafos DQ_Λ , en esta construcción se utilizan copias de un grafo G_0 cualquiera y otro B_1 bipartito, con diámetros respectivos D_0 y D_1 *par*. La estructura de interconexión es la mostrada en la Figura 2.8.

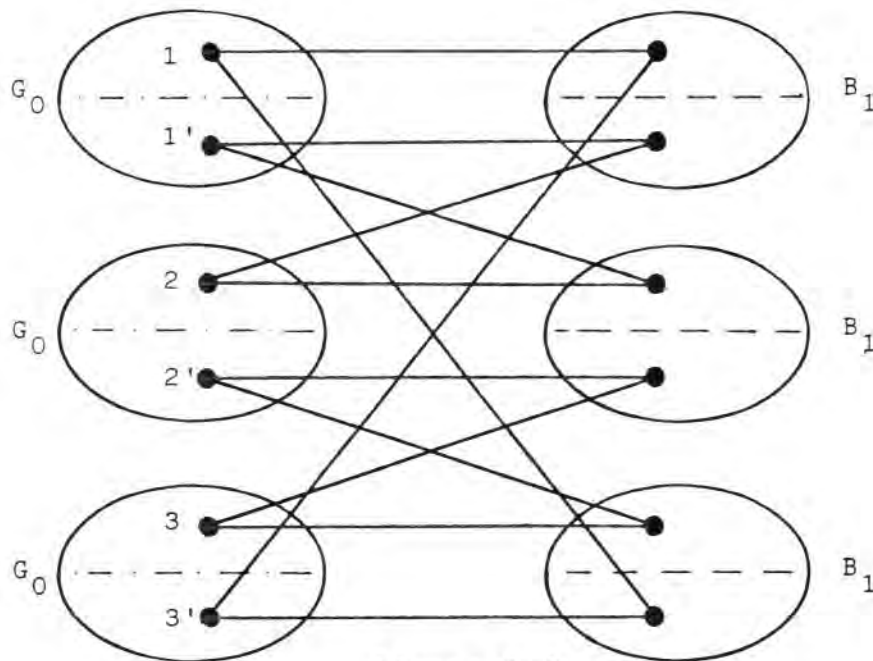


Figura 2.8

El grafo compuesto resultante $G_0 \Sigma_3 B_1$ tiene (considerando, como siempre, la configuración básica) $N = 3N_0 N_1$ vértices, $\Delta = \Delta_0 + 2$ ($= \Delta_1 + 2$) y diámetro $D \leq D_0 + D_1 + 1$.

Suponiendo $\Delta_0 + 2 = \Delta_1$, los vértices i e i' , $i = 1, 2, 3$, pueden identificarse con lo cual obtenemos $N = \frac{9}{2} N_0 N_1$, $\Delta = \Delta_0 + 4$

casos tenemos que suponer D_1 par.

Veamos primero una modificación que permite obtener una mejora incluso cuando $\beta = 0$. La estructura que se añade es la mostrada en la Figura 2.10.

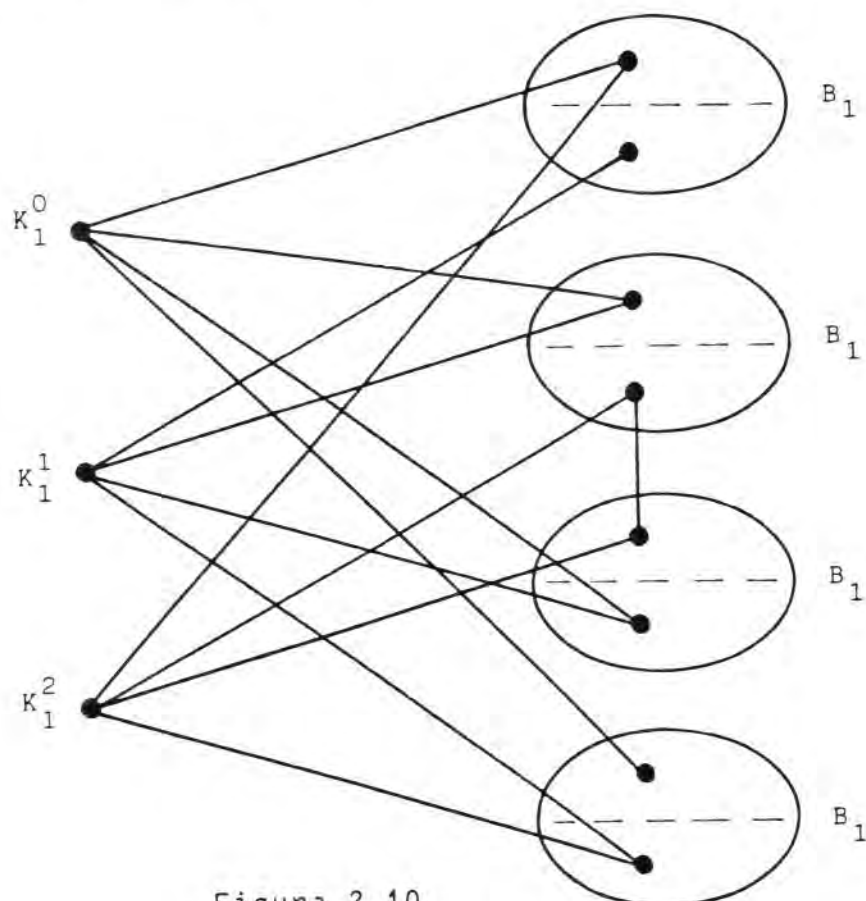


Figura 2.10

(notar que ahora también se establecen líneas entre copias de B_1). Suponiendo $\Delta_1 + 2 = 4(\alpha - 1) + 4$, la estructura de interconexión resultante es la obtenida al tomar conjuntamente la generalización de la mostrada en la Figura 2.9 —correspondiente a un grado $4(\alpha - 1)$ para los vértices K_1 — y la de la Figura 2.10 mediante identificación de los vértices K_1^k ($k = 0, 1, 2$). Se obtiene así el grafo con parámetros

$$N = 3 \frac{N_1}{2} + 3(\alpha - 1)N_1 + 4N_1 = \frac{6\alpha + 5}{2} N_1, \quad \Delta = \Delta_1 + 2 = 4\alpha \quad \text{y} \quad D \leq D_1 + 1.$$

Para el caso en que $\beta = 2$, la estructura adicional que puede usarse es la mostrada en la Figura 2.11. Suponiendo entonces que $\Delta_1 + 2 = 4(\alpha - 1) + 6$, y según se ha explicado antes, se obtiene una estructura de interconexión que da lugar a grafos compuestos con parámetros $N = 3 \frac{N_1}{2} + 3(\alpha - 1)N_1 + 6N_1 = \frac{6\alpha + 9}{2} N_1$, $\Delta = \Delta_1 + 2 = 4\alpha + 2$ y $D \leq D_1 + 1$.

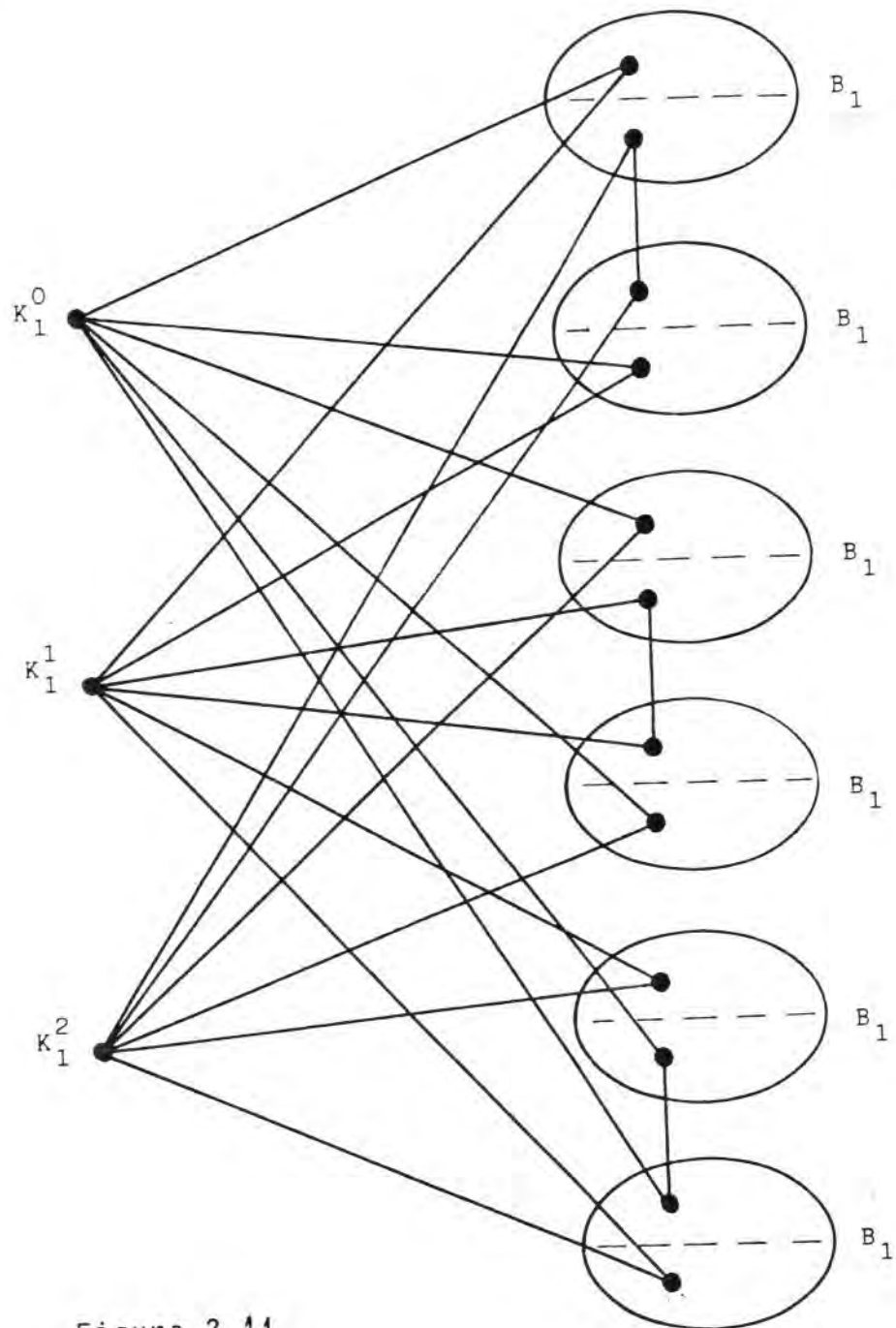


Figura 2.11

Finalmente, cuando $\Delta_1 + 2 = 4\alpha + 3$ ($\alpha=3$), usamos la estructura adicional de la Figura 2.12 a partir de la cual obtenemos grafos cuyos parámetros son $N = 3 \frac{N_1}{2} + 3(\alpha+1)N_1 = \frac{6\alpha+9}{2} N_1$, $\Delta = \Delta_1 + 2 = 4\alpha + 3$ y $D \leq D_1 + 1$.

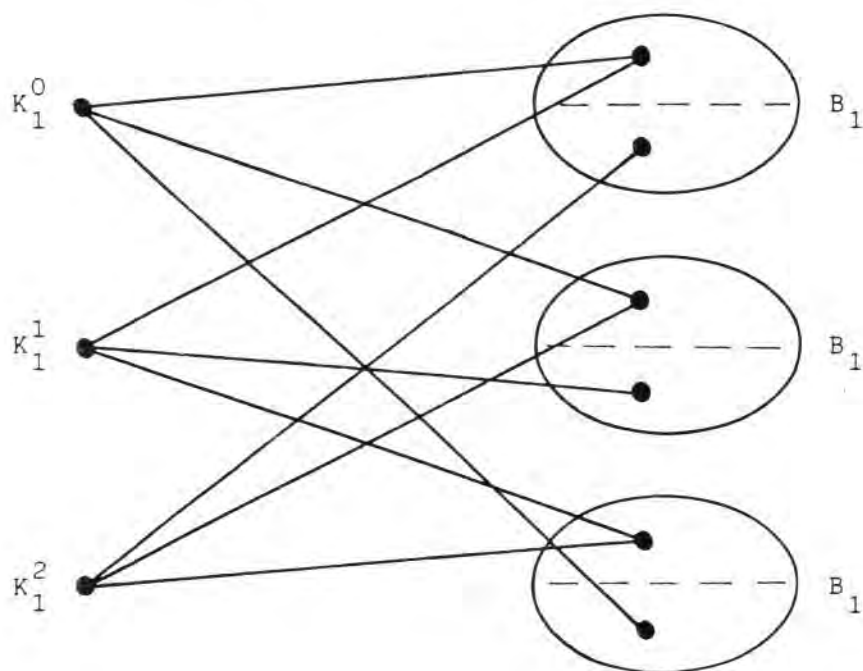


Figura 2.12

2.8.5 Al igual que en los grafos del apto. 2.8.2, en esta construcción se toman copias de dos grafos bipartitos, B_0 y B_1 , con diámetros pares. El grafo compuesto $B_0 \Sigma_6 B_1$ (se usa esta notación porque los subíndices 4 y 5 de Σ , se reservan para las construcciones de grafos compuestos bipartitos de la siguiente sección) se construye empleando la estructura de la Figura 2.13, y tiene $N = 3N_0N_1$ vértices, grado $\Delta = \Delta_0 + 3$ ($=\Delta_1+2$) y diámetro $D \leq D_0 + D_1$. Notar que, en este caso, existen ramas entre las copias de B_0 .

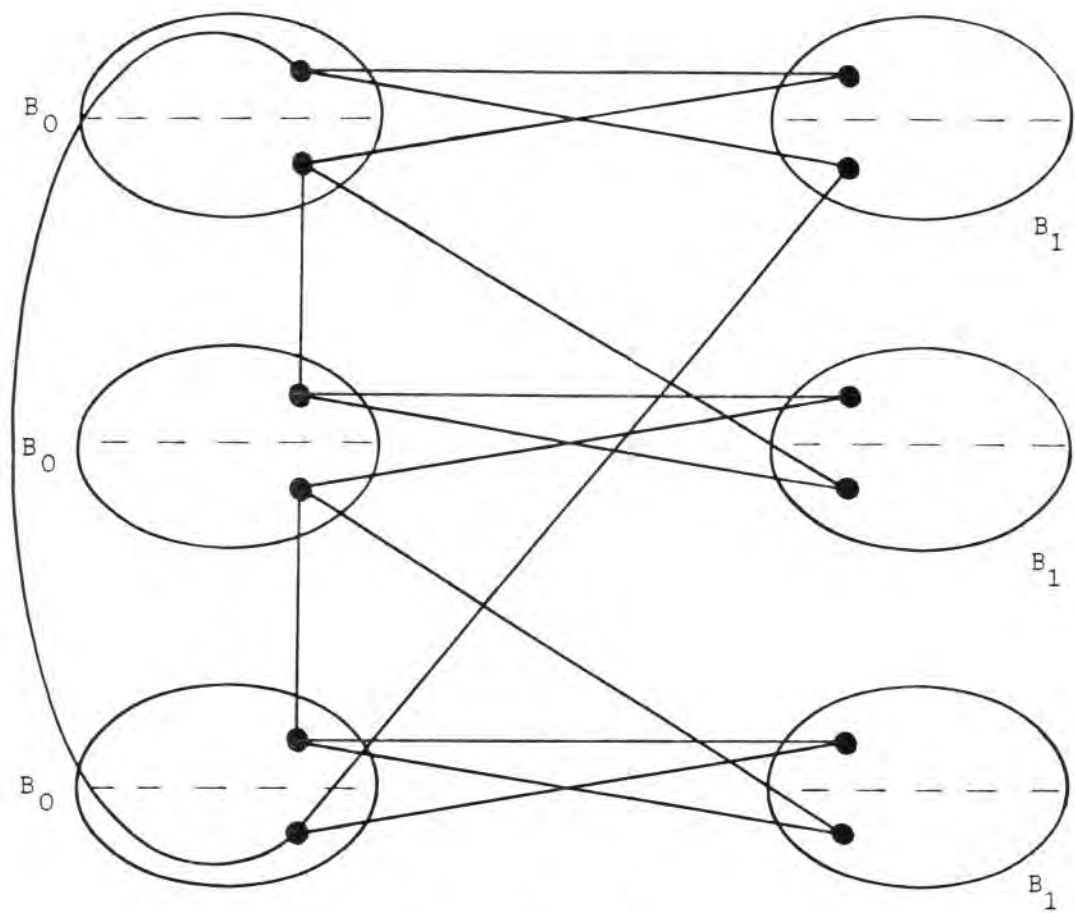


Figura 2.13

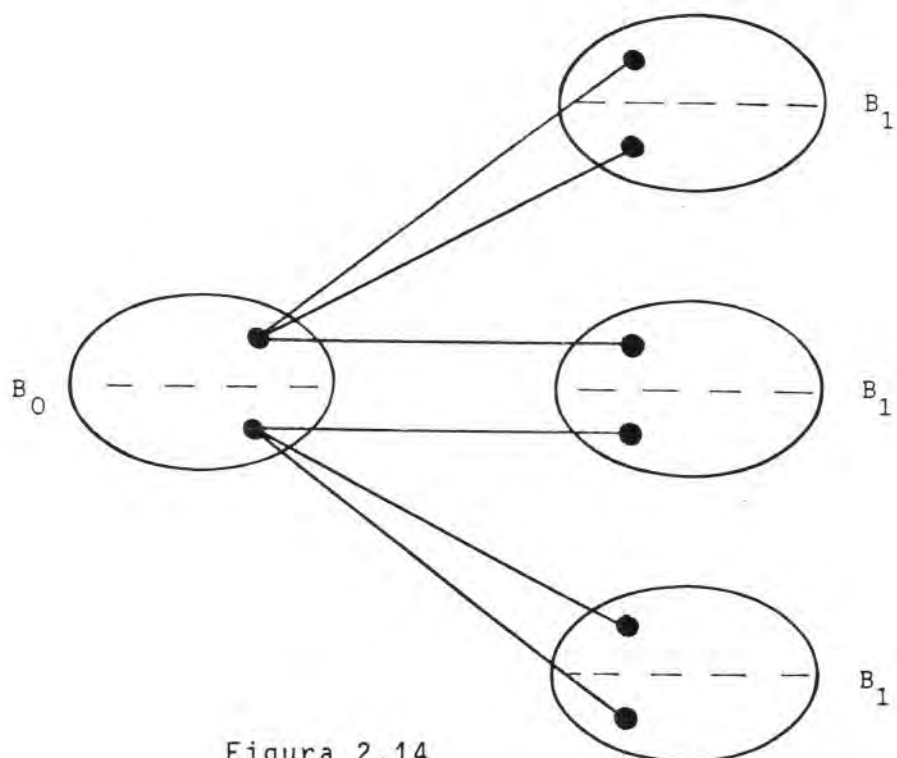


Figura 2.14

La configuración básica de una variante de la construcción anterior, y que denotamos de la misma forma $(B_0 \Sigma_6 B_1)$, es la que se obtiene tomando $N_1/2$ copias de B_0 y uniéndolas a las copias de B_1 según muestra la Figura 2.14. El grafo así construido tiene $3,5 N_0 N_1$ vértices, grado $\Delta = \Delta_0 + 3$ ($= \Delta_1 + 3$) y diámetro $\leq D_0 + D_1$.

2.8.6 También en este apartado se usan dos copias de dos grafos bipartitos, B_0 y B_1 , con diámetros D_0 y D_1 , *impar* y *par* respectivamente. El grafo $B_0 \Sigma_7 B_1$ cuya estructura de interconexión se muestra en la Figura 2.15

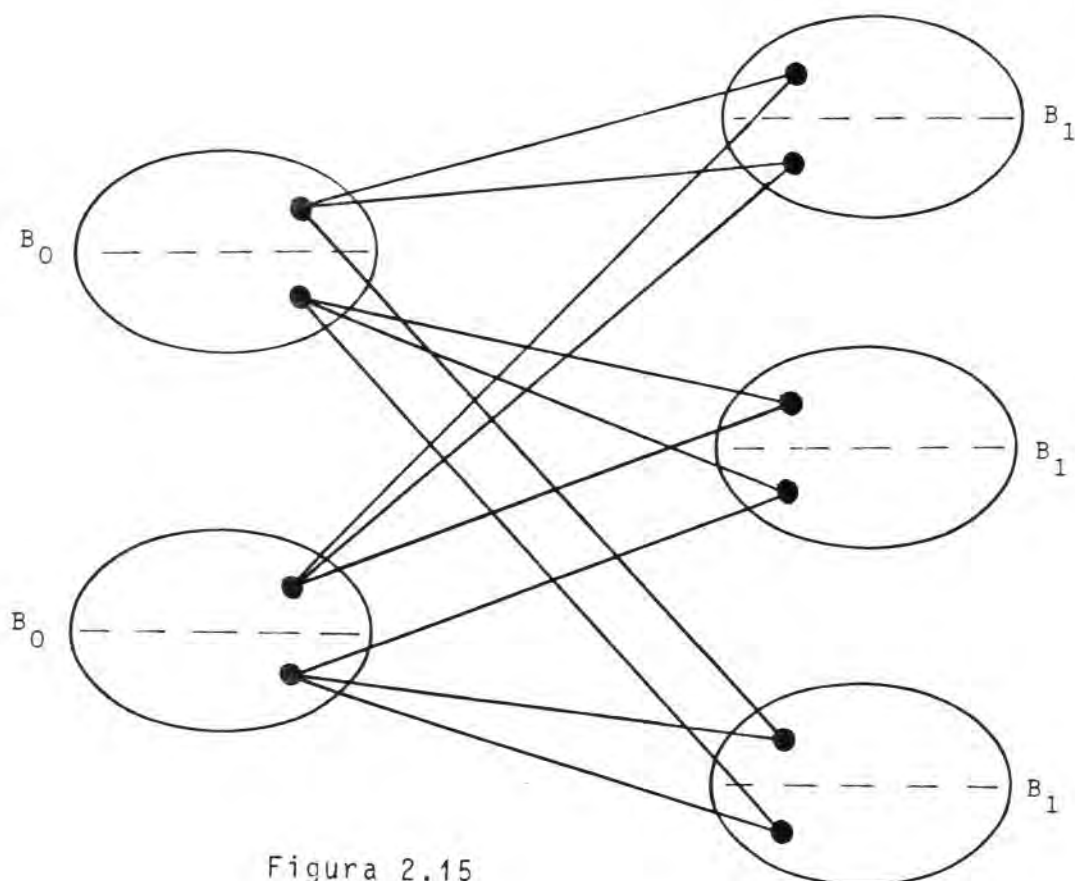


Figura 2.15

tiene $N = 2,5 N_0 N_1$ vértices, grado $\Delta = \Delta_0 + 3$ ($= \Delta_1 + 2$) y diámetro $D \leq D_0 + D_1$.

2.8.7 Consideremos la anterior construcción cuando B_0 es el grafo bipartito con diámetro 1, $B_0 = K_{1,1}$. Entonces si tomamos B_1 con grado Δ_1 tal que $\Delta_1 + 2 = 1 + 3\alpha + \beta$, $0 \leq \beta \leq 2$, podemos, de forma similar a como se hizo en el apdo. 2.6.4, incrementar el grado de los vértices $K_{1,1}^i$ hasta 3α obteniendo el grafo $K_{1,1}^{\Sigma} B_1$ con $N = (2 + 3\alpha) N_1$ vértices grado $\Delta = \Delta_1 + 2$ y diámetro $D \leq D + 1$.

Al igual que en dicho apdo, cuando $\beta \neq 0$ es posible añadir más copias de B_1 conservando grado y diámetro. Mas concretamente, cuando $\beta = 1$ [$\beta = 2$] entonces es posible agregar 1 [2] copias de B_1 según muestra la Figura 2.16a [2.16b].

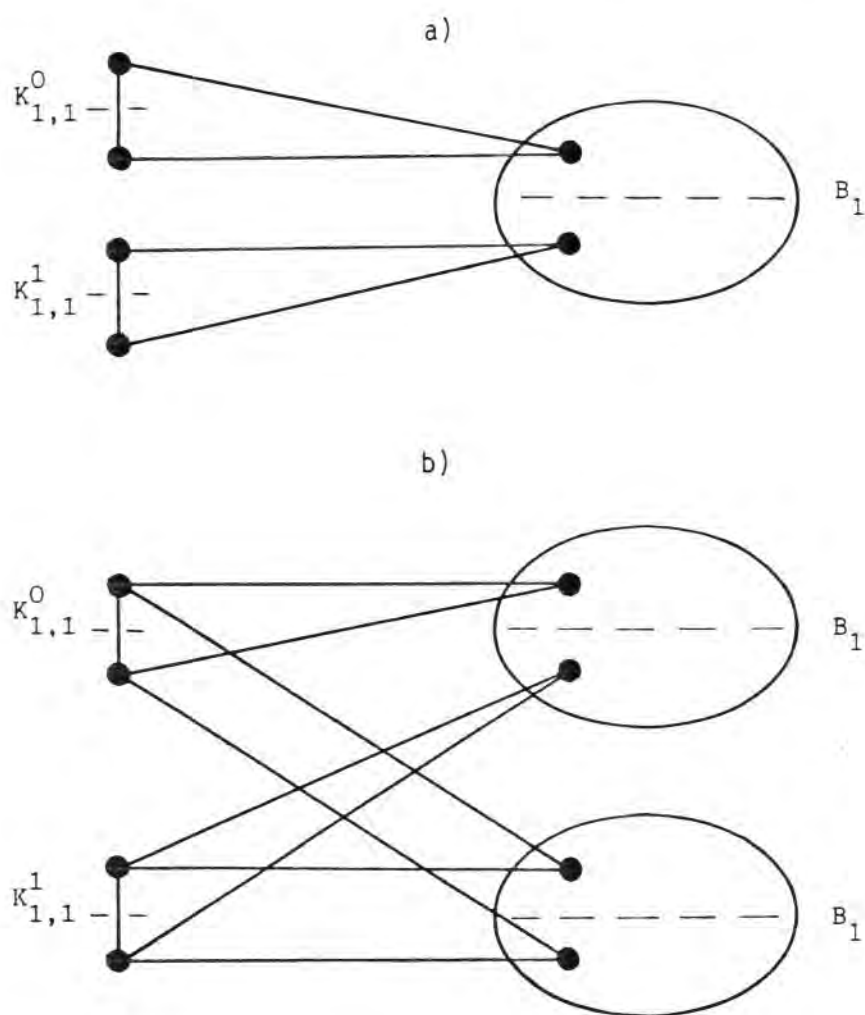


Figura 2.16

Por tanto, el grafo $B_0 \Sigma_7 B_1$ tiene, cuando $B_0 = K_{1,1}$, grado $\Delta = \Delta_1 + 2$, diámetro $D \leq D_1 + 1$ y $N = (\Delta + 1) N_1$ vértices.

2.8.8 Al igual que en los grafos DQ_Δ y en el Apdo. 2.8.3, en esta construcción se emplean copias de un grafo cualquiera, G_0 , y otro bipartito, B_1 , con diámetros respectivos D_0 y D_1 par. La estructura de interconexión es la mostrada en la Figura 2.17.

El grafo compuesto resultante $G_0 \Sigma_8 B_1$ tiene $N = 7,5 N_0 N_1$ vértices, grado $\Delta = \Delta_0 + 6 (= \Delta_1 + 2)$ y diámetro $D \leq D_0 + D_1 + 1$.

2.8.9 En el caso de que en la construcción del apto. anterior G_0 sea el grafo trivial y el grado de las copias de B_1 quede menor que Δ , es posible incrementar el número de vértices de $K_1 \Sigma_8 B_1$, conservando grado y diámetro. Veamos un ejemplo en el que se obtienen varias mejoras en la tabla de grandes grafos.

Consideremos que el grado de B_1 , Δ_1 , sea 12, entonces los vértices de B_1 , en el grafo $K_1 \Sigma_8 B_1$, tienen grado $\Delta' = 12 + 2 = 14$. Si se desea que el grado final de la red, Δ , sea 15, entonces es posible añadir a tal grafo 5 conjuntos de $N_1/2$ vértices, que denotamos por

$$(t, i), \quad t \in \{0, 1, \dots, n_1 - 1\}, \quad i \in \{0, 1, \dots, 4\} \equiv C$$

($n_1 = N_1/2$), conservando su diámetro.

Primeramente unimos estos vértices entre sí mediante la condición

$$(t, i) \sim (t, i'), \quad i' \in C, \quad i' \neq i$$

(es decir, tenemos $N_1/2$ grafos K_5)

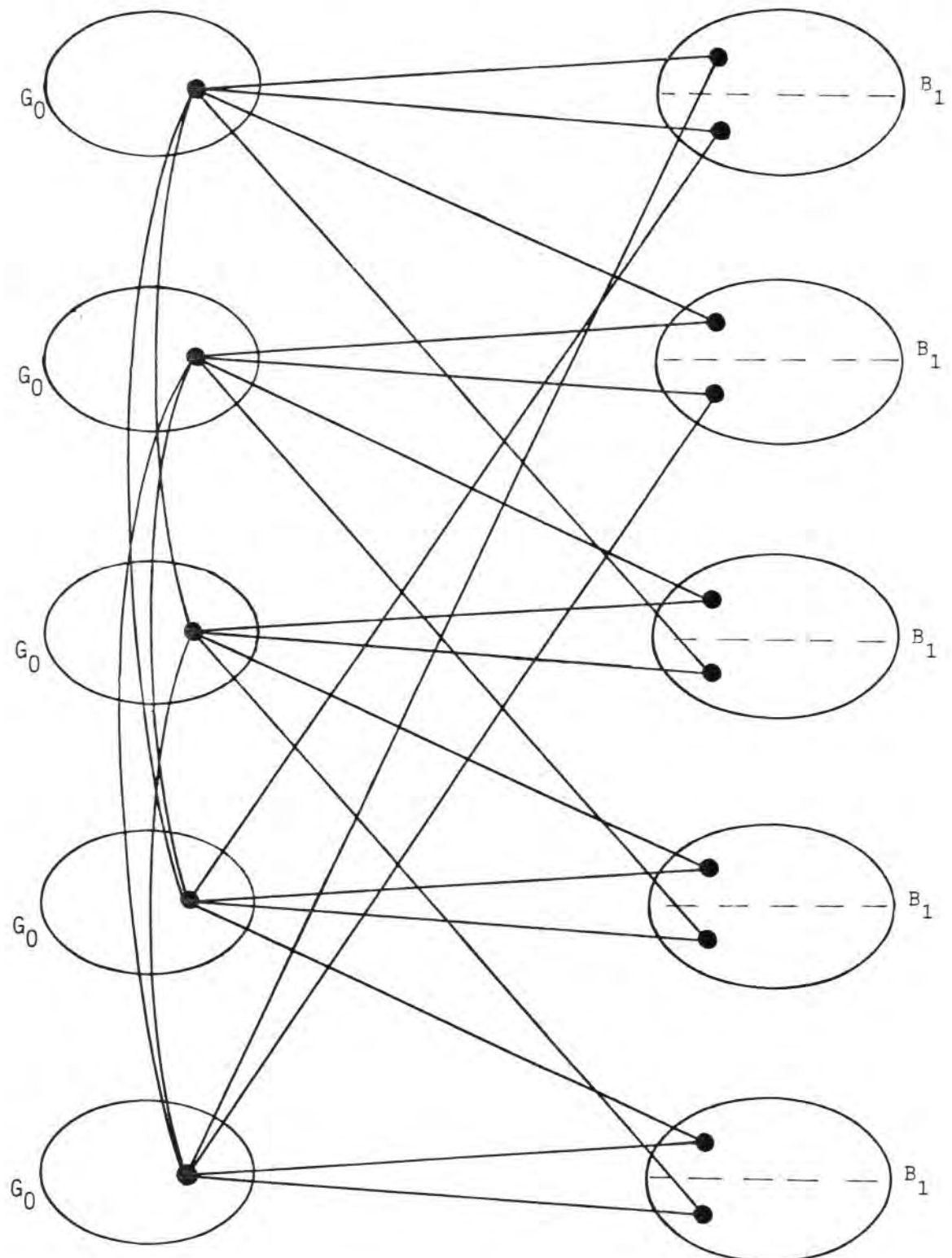


Figura 2.17

Ahora los conexionamos a las copias de B_1 , B_1^0 , que son 15 y denotamos por (B_1, k, h) , $k \in C$, $h \in \{0, 1, 2\}$, según muestra la Figura 2.18 (al vértice $(t, 1, j, k, 0)$ de (B_1, k, h) lo designamos por $(t, 1, j, k, h)$).

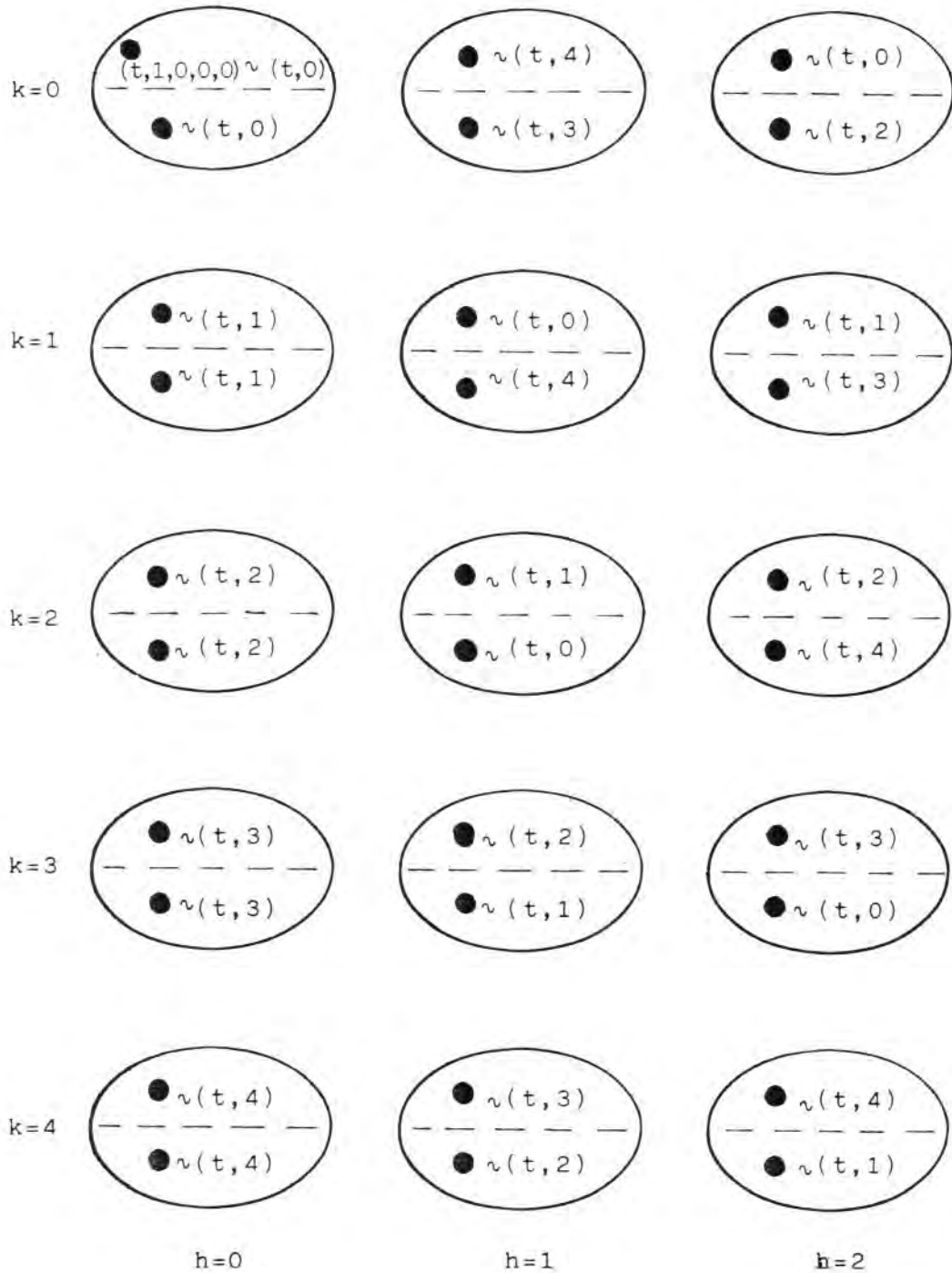


Figura 2.18

2.9 GRAFOS COMPUESTOS BIPARTITOS $B_0 \Sigma B_1$

2.9.1 Una construcción basada en las mismas ideas que las estudiadas en la sección anterior, pero que da lugar a grafos bipartitos, es la que se obtiene al tomar, como en los Apartados 2.8.1 y 2.8.5, 3 conjuntos de copias de cada uno de los grafos bipartitos B_0 y B_1 y unir las entre sí según la estructura de interconexión que mostramos en la Figura 2.19 (donde denotamos por A y B a los vértices que pertenecen a uno y otro conjunto del grafo resultante).

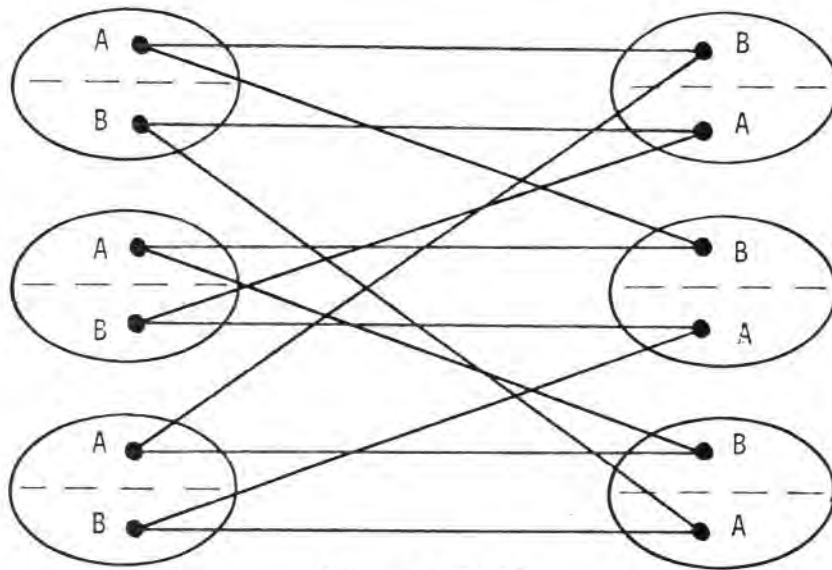


Figura 2.19

Suponiendo $\Delta_0 = \Delta_1$, se obtienen así grafos compuestos bipartitos, que denotamos por $B_0 \Sigma_4 B_1$, con $N = 3N_1N_0$ vértices, grado $\Delta = \Delta_0 + 2$ ($=\Delta_1 + 2$) y diámetro $D \leq D_0 + D_1 + 1$.

2.9.2 Otra posible construcción, en la que el grado se incrementa en un mínimo de 3 unidades, es la que corresponde a la estructura de interconexión de la Figura 2.20. Entonces el grafo bipartito resultante, $B_0 \Sigma_5 B_1$ tiene paráme-

tros $N = 5 N_0 N_1$, $\Delta = \Delta_0 + 3$ ($= \Delta_1 + 3$) y $D \leq D_0 + D_1 + 1$.

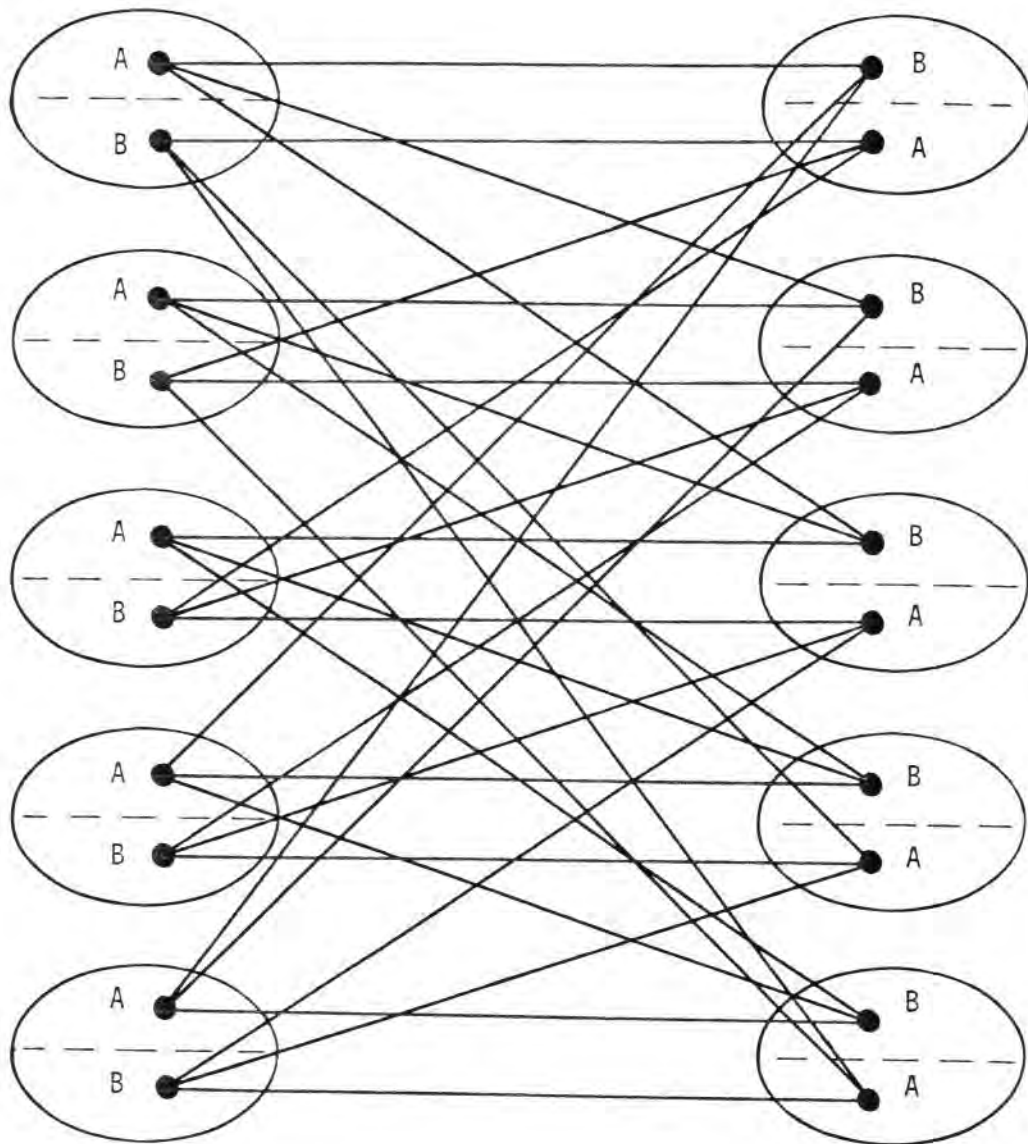


Figura 2.20

2.9.3 En esta construcción, que da lugar a grafos bipartitos, también se toman, como en los Apartados 2.8.4 y 2.8.9, copias de K_1 , (vértices aislados). Sin embargo la estructura de interconexión es algo distinta de las anteriores en el sentido de que el diámetro resultante no está acotado por $D_0 + D_1 + 1 = D_1 + 1$ sino por $D_1 + 2$.

Tomemos primeramente 5 copias de un grafo bipartito B_1 con diámetro D_1 par y 10 conjuntos de N_1 vértices cada uno. Cada 10 vértices —uno de cada conjunto— se unen a las copias de B_1 según muestra la Figura 2.21.a,

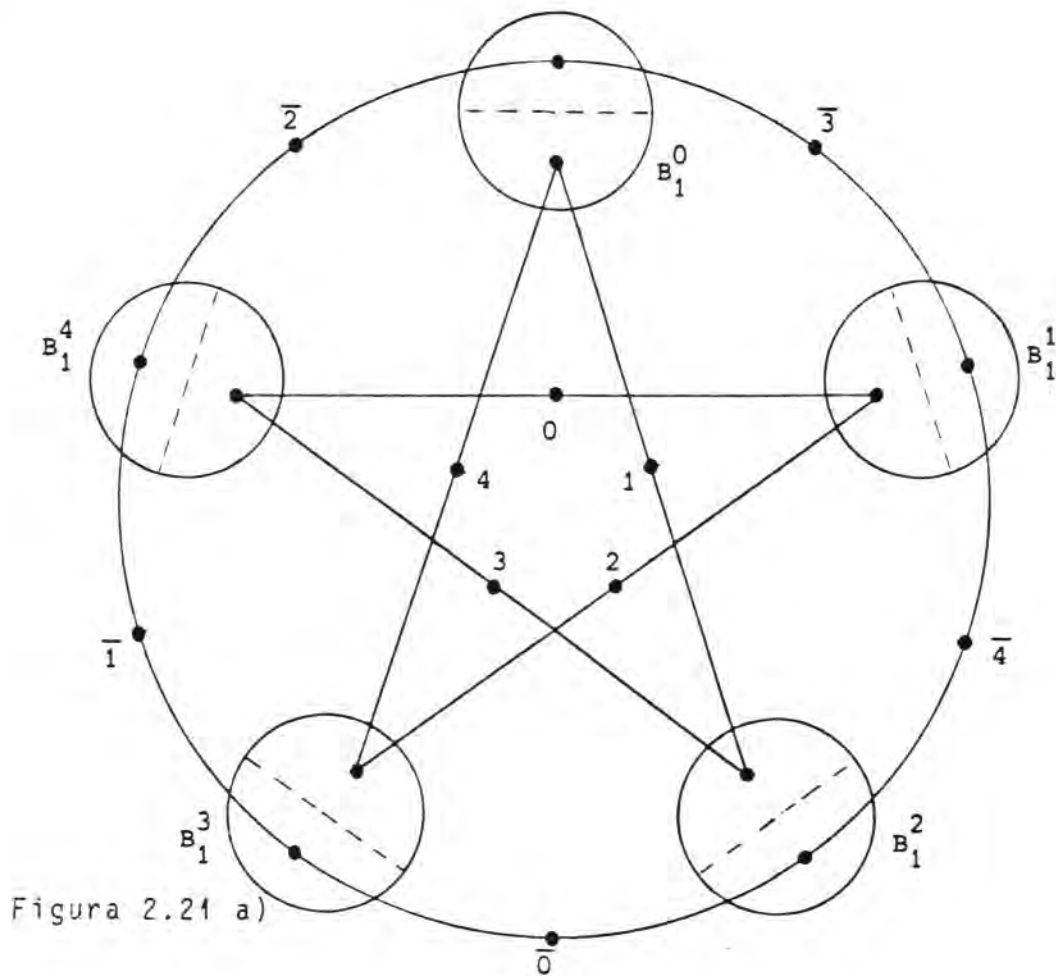


Figura 2.21 a)

de manera que su grado queda igual a dos. Ahora incrementamos dicho grado hasta 4, uniendo estos vértices a 5 copias de B_1 según la Figura 2.21.b.

El grafo bipartito así construido tiene $N = 10 \frac{N_1}{2} + 10N_1 = 15N_1$ vértices, grado $\Delta = \max\{4, \Delta_1 + 2\}$ y diámetro $D \leq D_1 + 2$. En general, si $\Delta_1 + 2 = 2\alpha + \beta$, $\alpha \geq 2$, $\beta = 0, 1$, se toman 5α copias de B_1 de manera, que, utilizando cualquiera de las dos estruc-

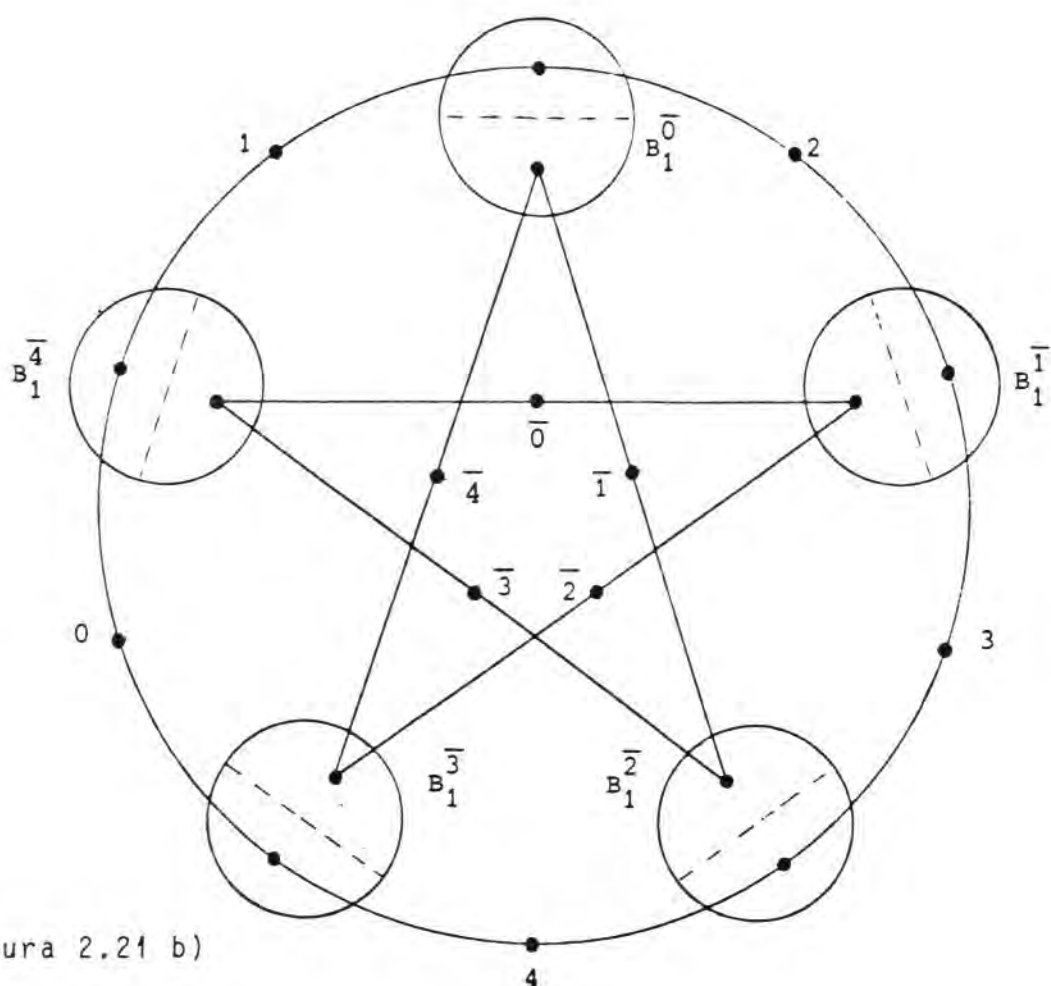


Figura 2.21 b)

turas anteriores el grado de los vértices correspondientes a las copias de K_1 se incrementa hasta 2α . Entonces se obtiene un grafo bipartito, que denotamos por B_1 , con parámetros $N = 10 \frac{N_1}{2} + 5\alpha N_1 = 5(\alpha + 1) N_1$, $\Delta = \Delta_1 + 2$ y $D \leq D_1 + 2$.

Los nuevos valores para grandes grafos (Δ, D) bipartitos, obtenidos con estas construcciones, son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 K_{6,6} \Sigma_4 H_5 \text{ (o } K_{4,4} \Sigma_4 H_5) : N(8,9) &\geq 281\ 232 \\
 K_{8,8} \Sigma_4 H_9 : N(12,9) &\geq 9\ 565\ 920 \\
 K_{8,8} \Sigma_4 H_{11} : N(14,9) &\geq 34\ 013\ 952 \\
 K_{10,10} \Sigma_4 H_{13} \text{ (o } K_{8,8} \Sigma_4 H_{13}) : N(16,9) &\geq 96\ 536\ 160
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_5^{\Sigma_4} H_5 : N(8,10) &\geq 1\,453\,032 \\
 P_9^{\Sigma_4} H_9 : N(12,10) &\geq 72\,541\,560 \\
 P_9^{\Sigma_4} H_{11} : N(14,10) &\geq 290\,181\,528 \\
 P_{11}^{\Sigma_4} H_{13} : N(16,10) &\geq 962\,948\,196 \\
 P_{11}^{\Sigma_5} H_{11} : N(15,10) &\geq 471\,243\,960
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega H_5 : N(8,8) &\geq 195\,300 \\
 \Omega H_7 : N(10,8) &\geq 1\,176\,480 \\
 \Omega H_8 : N(11,8) &\geq 2\,246\,940 \\
 \Omega H_9 : N(12,8) &\geq 4\,650\,100 \\
 \Omega H_{11} : N(14,8) &\geq 14\,172\,480 \\
 \Omega H_{11}^d : N(15,8) &\geq 14\,978\,080 \\
 \Omega H_{13} : N(16,8) &\geq 36\,201\,060
 \end{aligned}$$

2.10 GRAFOS $G < B$ Y $B(G^*)$

Consideremos los grafos $B = (V_0 \cup V_1, E_B)$ bipartito y $G = (V_G, E_G)$ con parámetros N_B, Δ_B, D_B y N_G, Δ_G, D_G respectivamente. Supongamos además que se cumple $\min_{i=0,1} |V_i| \geq N_G$. Uniremos estos dos grafos de la siguiente forma: por cada vértice $a \in V_G$ elegimos otros dos $b \in V_0, c \in V_1$ (no elegidos anteriormente) y establecemos las nuevas ramas ab y ac , ver Figura 2.22.

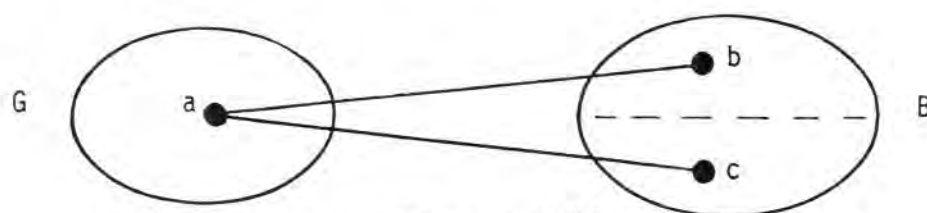


Figura 2.22

Así resulta el grafo que denotamos por $G \lt B$ con grado $\Delta \leq \max\{\Delta_G + 2, \Delta_B + 1\}$, número de vértices $N = N_G + N_B$ y diámetro $D \leq \max\{D_G, D_B\}$. En efecto, sean los vértices $s \in G$ y $t \in V_i$. Por construcción s es adyacente a un vértice $u \in V_{i+(D_B-1) \bmod 2}$, el cual está a distancia $\leq D_B - 1$ de t . Notar que en esta construcción pueden existir vértices de B que no sean adyacentes a ninguno de G .

Si B es tal que $|V_0| = |V_1| = \frac{N_B}{2}$ y D_B par, podemos tomar dos copias de B , $G = B^0 = (V_0^0 \cup V_1^0, E_0)$ y $B^1 = (V_0^1 \cup V_1^1, E_1)$ y hacer la construcción de manera que los vértices cuyo grado se incrementa en 2 unidades pertenezcan todos a V_0^0 (ó V_1^1), según muestra la Figura 2.23.

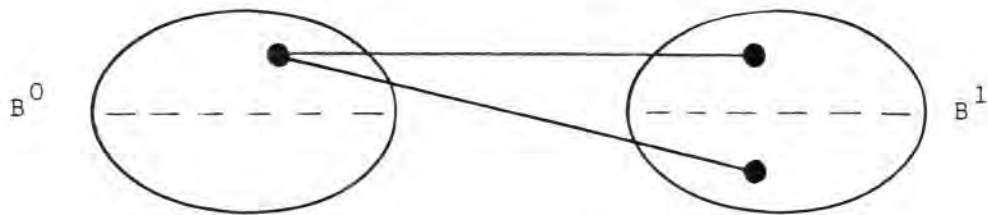


Figura 2.23

En este caso todos los vértices de B^1 son terminales de una rama intercopia y el grafo obtenido $B(T_2)$, tienen grado $\Delta_B + 1 \leq \Delta \leq \Delta_B + 2$, $N = 2N_B$ vértices y, como veremos seguidamente, diámetro $D = D_B$.

En efecto, consideremos los vértices $s \in B^0$ y $t \in B^1$;

- a) Si $s \in V_0^0$, s es adyacente a dos vértices $t_0 \in V_0^1$ y $t_1 \in V_1^1$ uno de los cuales, al menos, está a distancia $\leq D_B - 1$ de t .

- b) Si $s \in V_1^0$, s está a distancia $\leq D_B - 1$ de un vértice $s_0 \in V_0^0$ que es adyacente a t .

Esta construcción puede interpretarse como una clase especial de producto entre los grafos B y $K_{1,2}$, ver Figura 2.24a. O también, como hacen Delorme y Quisquater [19] en una construcción análoga para la obtención de grafos bipartitos, como una composición de B en un cierto digrafo, en este caso el torneo T_2 (de ahí la notación), ver Figura 2.24b.



Figura 2.24

Esta idea permite obtener una nueva construcción, generalización de la anterior, que, como hemos dicho, tiene algunas características en común con la que en [19] se denota por $B(G)$:

Sea $G^* = (X, A)$ un grafo dirigido con $N^* = |X|$ vértices, *unilateralmente conexo* (es decir que para cualesquiera $x, y \in X$, $d(x, y) < \infty$ ó $d(y, x) < \infty$) y tal que su *diámetro unilaterial* es D^* , o sea

$$D^* = \max_{x, y \in V} \min\{d(x, y), d(y, x)\} \quad (2.20)$$

Entonces el grafo $B(G^*)$ se obtiene de la siguiente forma: cada vértice $x \in X$ se sustituye por una copia de B , denotada por B^x , y cada arco $[x, y] \in A$ por N_B líneas según se ha explicado antes -Figura 2.23-. Notar que, de esta manera,

cada arco desde [hacia] x produce un incremento de 2 [1] unidades en el grado de todos los vértices de V_0^x ó V_1^x [V_0^x y V_1^x]. Por tanto la construcción puede hacerse de tal manera que el grafo $B(G^*)$, con $N = N^*N_B$ vértices, tenga grado

$$\Delta = \Delta_B + \max_{x \in V} \left\{ \delta^-(x) + 2 \left\lceil \frac{\delta^+(x)}{2} \right\rceil \right\} \quad (2.21)$$

Teorema 2.10.1: El grafo $B(G^*)$ tiene diámetro $D \leq D_B + D^* - 1$.

Demostración:

Sean dos vértices genéricos $s \in B^X$ y $t \in B^Y$, y supongamos $d(x, y) = d \leq D^*$. Por tanto en $B(G^*)$ existen N_B caminos de longitud d con conjuntos de vértices terminales V_i^x ($i=0$ ó 1) y $V_0^y \cup V_1^y$. A partir de aquí la demostración es análoga al caso $G^* = T_2$ estudiado anteriormente y en el que teníamos la misma situación con $d=1$.

Dos casos particulares interesantes de esta construcción por cuanto dan lugar a varios de los mayores grafos (Δ, D) conocidos, son los obtenidos al tomar para G^* los torneos T_4 y T_5 mostrados en la Figura 2.25 (a) y (b). El esquema de la estructura obtenida para el grafo $B(T_4)$, con parámetros $\Delta = \Delta_B + 3$, $N = 4N_B$ y $D < D_B$, se muestra en la Figura 2.26.

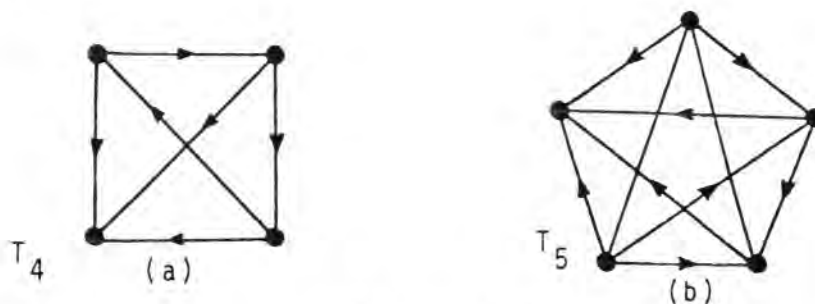


Figura 2.25

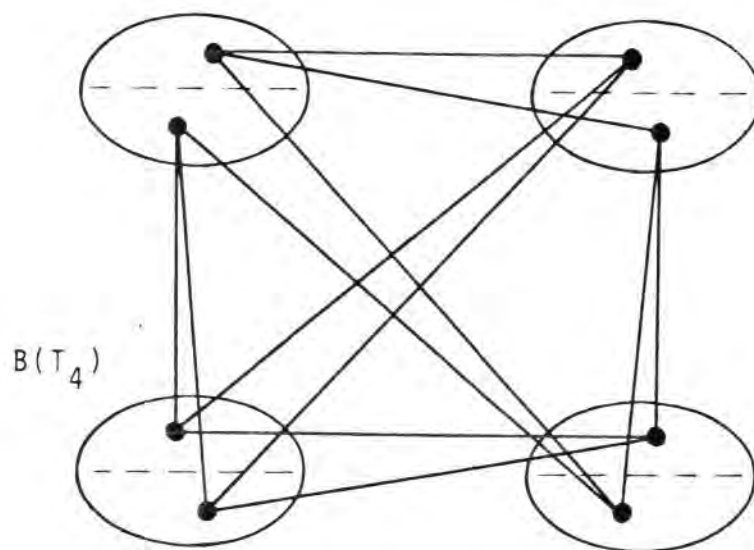


Figura 2.26

2.11 GRAFOS $G_{\Lambda_p}^B$

Proseguimos este capítulo presentando sendas modificaciones a los grafos DQ_{Λ} y P_q (grafos bipartitos de Moore de diámetro 3), logrando algunas mejoras en la tabla de mayores grafos densos. Mas concretamente, en esta sección se transforman los grafos DQ_{Λ} , cuando D_B es par, obteniendo los grafos $G_{\Lambda_p}^B$ de forma parecida a como Delorme y Quisquater definen el grafo $B_1\Lambda p$ a partir de la red $B_1\Lambda K_1$, véase [19] (de ahí la notación). En la siguiente sección, y penúltima de este capítulo, se aumenta el grado de los vértices de los grafos P_q en una unidad obteniéndose grafos bipartitos de igual diámetro pero con mayor número de vértices que su grafo "origen".

La configuración básica de interconexión de los grafos DQ_{Λ} al identificar los vértices c y c' (véase Sección 2.6) se muestra en la Figura 2.27,

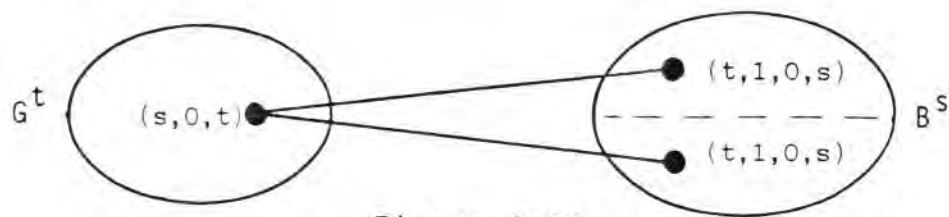


Figura 2.27

donde se ha supuesto $\Delta = \Delta_G + 2 = \Delta_B + 1$. Seguidamente se explican los cambios a realizar en tales grafos que dan lugar a nuevos valores en la tabla de grandes grafos. Para ello es necesario distinguir las siguientes situaciones:

- 1) $D_G = 1$
- 2) $D_G = 2$
- 3) $D_G = 3$

2.11.1 $D_G = 1$.

En primer lugar se suprimen las ramas intercopia que unen los vértices $(0, 0, t)$ con los vértices $(t, 1, 1, 0)$, y que son en total $N_B/2$ (vease Figura 2.27). Ahora se toma una nueva copia de B , cuyos vértices se denotan por $(t, 1, j, 0')$ y se une a los vértices deficientes de la forma $(0, 0, t)$ mediante la siguiente condición de adyacencia

$$(0, 0, t) \sim (t, 1, 0, 0') \quad (2.22)$$

la red así construida tiene igual grado que su "homologa" pero contiene N_1 vértices más. Además, como se demuestra en el siguiente resultado, tiene el mismo diámetro.

Lema 2.11.1: El grafo $G \Delta_p B$ con $\Delta = \Delta_G + 2 = \Delta_B + 1$ y $D_G = 1$ tiene diámetro $D = D_G + D_B + 1 = D_B + 2$.

Demostración:

Las situaciones no contempladas en la demostración de la Sección 2.6 son:

- a) de $(t, 1, 0, 0)$ a $(v, 1, j, 0')$
 - b) de $(t, 1, 1, 0)$ a $(v, 1, 0, 0')$
 - c) de $(t, 1, 1, 0)$ a $(v, 1, 1, 0')$
 - d) de $(t, 1, 0, z)$ a $(v, 1, j, u)$
 - e) de $(t, 1, 1, z)$ a $(v, 1, j, u)$
 - f) de $(t, 1, 0, z)$ a $(s, 0, v)$
 - g) de $(t, 1, 1, z)$ a $(s, 0, v)$
 - h) de $(0, 0, t)$ a $(u, 0, v)$
- $\left. \begin{matrix} d) \\ e) \end{matrix} \right\} z \in \{0, 0'\} \equiv A, \quad u \in A$
 $\left. \begin{matrix} f) \\ g) \end{matrix} \right\} z \in A$

y sus correspondientes caminos de longitud $\leq D_B + 2$ son

- a) $(t, 1, 0, 0), (0, 0, t), (t, 1, 0, 0'), \dots, (v, 1, j, 0')$
 $(1) \quad (1) \quad (\leq D_B)$
- b) $(t, 1, 1, 0), \dots, (v, 1, 0, 0), (0, 0, v), (v, 1, 0, 0')$
 $(\leq D_B - 1) \quad (1) \quad (1)$
- c) $(t, 1, 1, 0), (w, 1, 0, 0), (0, 0, w), (w, 1, 0, 0'), \dots, (v, 1, 1, 0')$ $w \sim t$
 $(1) \quad (1) \quad (1) \quad (\leq D_B - 1)$
- d) $(t, 1, 0, z), (0, 0, t), (u, 0, t), (t, 1, j-1, u), \dots, (v, 1, j, u)$
 $(\leq D_B - 1) \quad (1) \quad (1) \quad (1)$
- e) $(t, 1, 1, z), \dots, (v, 1, 0, z), (0, 0, v), (u, 0, v), (v, 1, j, u)$
 $(\leq D_B - 1) \quad (1) \quad (1)$
- f) $(t, 1, 0, z), \dots, (v, 1, 0, z), (0, 0, v), (s, 0, v)$
 $(\leq D_B - 1) \quad (1) \quad (1)$
- g) $(t, 1, 1, z), \dots, (v, 1, 0, z), (0, 0, v), (s, 0, v)$
 $(\leq D_B - 1) \quad (1) \quad (1)$
- h) $(0, 0, t), (u, 0, t), (t, 1, j, u), \dots, (v, 1, j-1, u), (u, 0, v)$
 $(1) \quad (1) \quad (\leq D_B - 1) \quad (1)$

En general, cuando $\Delta = \Delta_G + n$, se puede añadir, de forma análoga a la del caso $\Delta = \Delta_G + 2$ estudiado anteriormente, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ copias del grafo B a los grafos DQ_Δ conservando grado y diámetro.

2.11.2 $D_G = 2$.

Tanto en este apartado como en el siguiente nos limitamos a mostrar las variaciones que se realizan en los citados grafos, sin comprobar que se conserva su diámetro, ya que sus demostraciones, aunque son un poco más laboriosas que la del Lema 2.11.1, no entrañan mayores dificultades.

En primer lugar se considera N_G par. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que al construir el grafo compuesto DQ_Δ , en cada copia de G los vértices $(0,0,0,t)$ y $(0,0,1,t)$ son adyacentes, vease Figura 2.28a, donde al igual que en el apartado anterior $n = \Delta - \Delta_0$. Las modificaciones que se realizan se muestran en la Figura 2.28b.

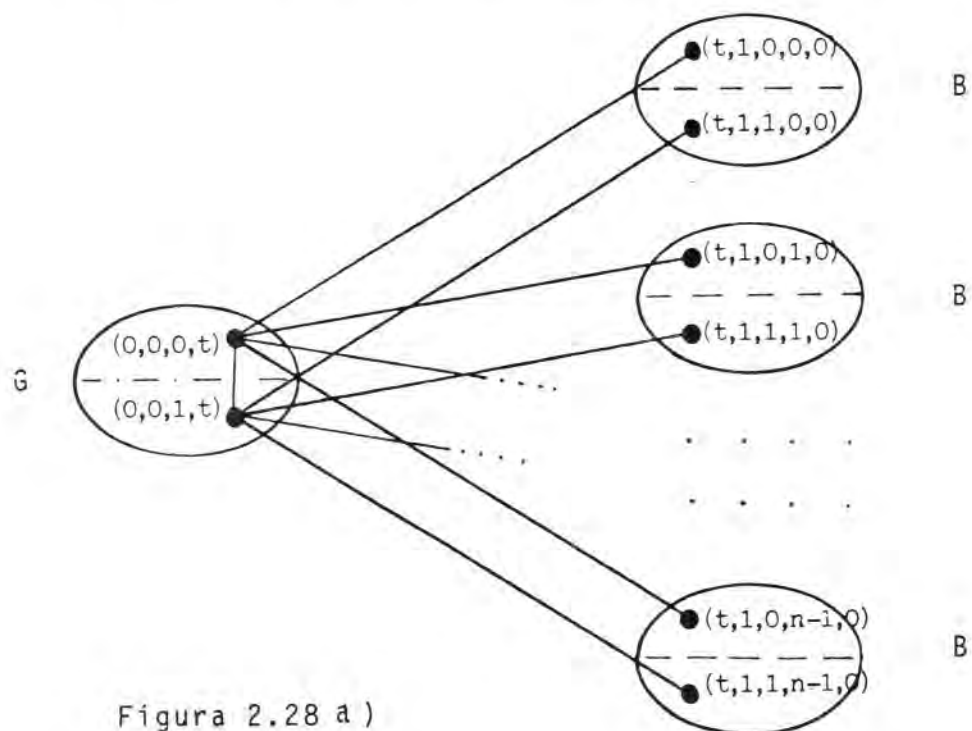


Figura 2.28 a)

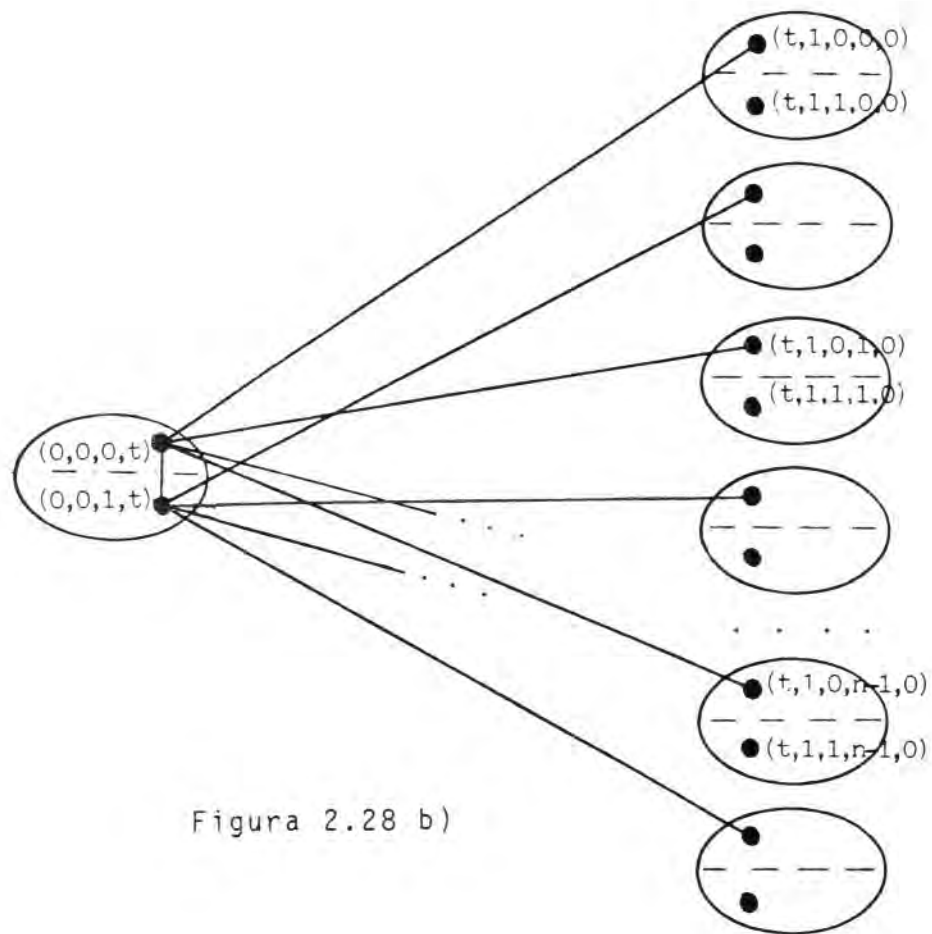


Figura 2.28 b)

El mismo número de copias de B (n) se pueden agregar, siguiendo la misma idea, en los casos

- N_G impar y n par
- N_G y n impares y $n \geq 3$

2.11.3 $D_G = 3$

La forma de añadir, en este caso, las copias de B se muestra en la Figura 2.29, para $\Delta_G = 3$ y $n = 1$.

Se puede comprobar fácilmente, siguiendo la idea dada en la Figura 2.29, que en el caso general, es posible agregar, conservando grado y diámetro $\left\lfloor \frac{(\Delta_G + 1)n}{2} \right\rfloor$ copias de B.

2.12 UNA ADICION DE VERTICES A LOS GRAFOS P_q

Como se comentó en la Sección 1.3, la existencia de los grafos bipartitos de Moore de diámetro 3, P_q (recordar que tienen grado $\Delta=q+1$), sólo se ha probado cuando q es una potencia de un primo (p.p.). Por tanto una buena forma de construir grafos bipartitos densos de diámetro 3 y grado $\Delta=q+1$, donde q no es una p.p., es la de tomar los grafos bipartitos de Moore con grado ligeramente inferior al deseado y añadirles algunos vértices. Más concretamente, para el caso $\Delta=q+2$, donde q es una p.p. es posible obtener fácilmente un grafo bipartito, P_{q^2} , con N_q+2 vértices añadiendo 2 vértices al grafo bipartito P_q .

En esta sección se muestra como, para la situación anterior ($\Delta=q+2$, $q = \text{p.p.}$), es posible obtener grafos bipartitos con mayor número de vértices que los mencionados en el párrafo precedente, mediante la adición de más vértices al grafo bipartito P_q . Para ello nos basamos en la siguiente propiedad de los grafos P_q con conjunto de vértices $V_q \cup U_q$:

Si los vértices $s, t \in V_q$ (U_q) entonces existe un *único* vértice $v \in U_q$ (V_q) que es adyacente a los vértices s y t .

Sean A y B los conjuntos $A \equiv \{0,1,2,\dots,q\}$ $B \equiv \{1,2,3,\dots,q\}$. Denotamos por x_{ij} [y_{ij}] a los vértices pertenecientes al subconjunto V_q [U_q], $i \in B$, $j \in A$ y además i puede ser 0 si $j=0$ ($|V_q| = |U_q| = q^2 + q + 1$). El vértice x_{00} [y_{00}] es adyacente a los vértices y_{k0} [x_{k0}], $k \in A$ y el vértice de la forma x_{m0} [y_{m0}], $m \in B$ es adyacente a los vértices de la forma y_{00} e y_{mn}

$[x_{00} \text{ y } x_{mn}]$, $n \in B$.

Ahora agregamos 4 vértices al grafo bipartito P_q , que denotamos por x_0, y_0, x_1, y_1 , mediante las siguientes condiciones de adyacencia:

$$x_0 \sim \begin{cases} y_{k0} \\ y_1 \end{cases}, \quad k \in A \quad (2.23a)$$

$$y_0 \sim \begin{cases} x_{k0} \\ x_1 \end{cases} \quad (2.23b)$$

$$x_1 \sim \begin{cases} y_0 \\ y_{1n} \\ y_1 \end{cases}, \quad n \in B \quad (2.23c)$$

$$y_1 \sim \begin{cases} x_0 \\ x_{1n} \\ x_1 \end{cases} \quad (2.23d)$$

el grafo bipartito así construido, P_q^+ , tiene grado $\Delta = q+2$ y su número de vértices es

$$N = N_q + 4 = 2q^2 + 2q + 6 \quad (2.24)$$

Lema 2.12.1: El grafo bipartito P_q^+ tiene diámetro $D = 3$.

Demostración:

Dada la simetría existente en el grafo P_q y en las condiciones de adyacencia de (2.23), basta comprobar que en los casos

a) de x_0 a x_{ij}

b) de x_1 a x_{ij}

c) de x_0 a x_1

existe un camino de longitud 2.

a) Desde x_0 , y en dos pasos, se alcanzan todos los vértices x_{ij} a través de los vértices de la forma y_{k0} .

b) Desde x_1 , y en dos pasos, se alcanzan los vértices de la forma x_{ij} $j \neq 0$ a través de los vértices y_{1n} . Por otro lado, y_0 es adyacente a los vértices x_{k0} y x_1 .

c) El camino de longitud 2 que une x_0 con x_1 es x_0, y_1, x_1 .

La Figura 2.30 muestra el grafo bipartito P_2^+ .

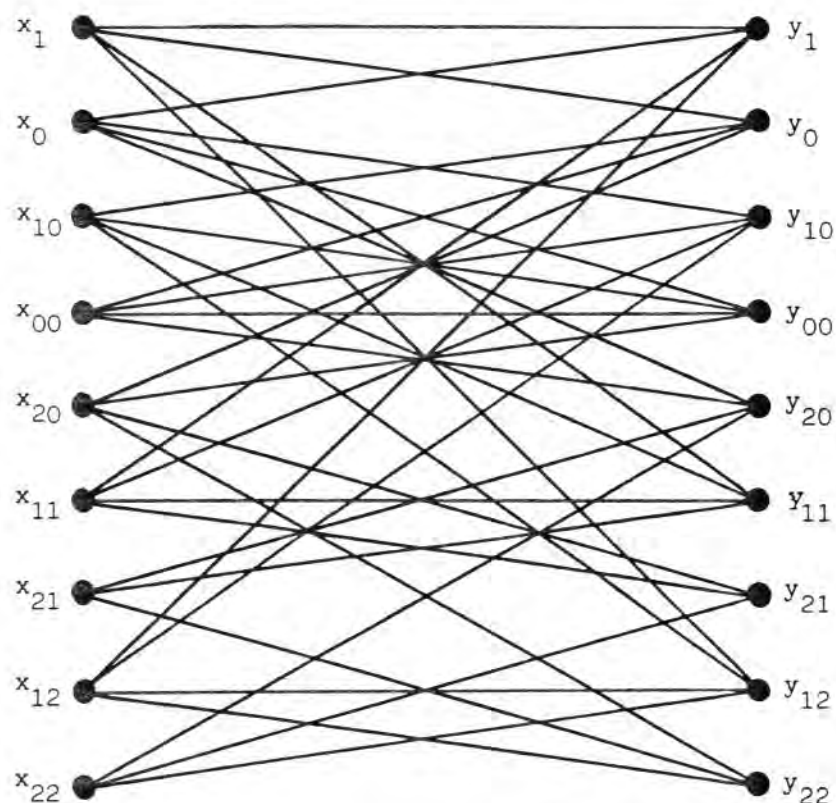


Figura 2.30

2.13 TABLA DE MAYORES GRAFOS (Δ, D)

En esta sección se muestra la tabla de mayores grafos (Δ, D) conocidos hasta la fecha (Julio 1986). Los valores indicados corresponden a las construcciones presentadas en este capítulo.

Tabla de mayores grafos (Δ, D)

Δ	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	Pet 10	$C_5^*F_4$ 20	YFA 38	YFA 70	H_2r 128	CR 180	YFA 286	CR 462	CR 708
4	$K_3^*C_5$ 15	Pet^*F_4 40	$C_5^*C_{19}$ 95	H_1^3 364	H_3r 731	CR 856	CR 1 872	CCSW 4 352	CCSW 13 056
5	$K_3^*X_8$ 24	YFA 66	Q_4r 174	H_1^3d 532	H_4r 2 734	H_4idr 2 988	CR 7 600	CCSW 15 360	CCSW 52 224
6	$K_4^*X_8$ 32	$C_5^*C_{21}$ 105	$Pet^*m(32)$ 320	CCSW 992	H_5r 7 817	CCSW 13 056	CCSW 32 256	$(24)\Delta_p H_4$ 68 250	$(66)\Delta_p H_4$ 188 370
7	HS 50	CR 122	$(15)^*m(32)$ 480	CR 1 550	$H_4r < H_5$ 10 546	$H_5\Delta pt$ 35 154	$K_4\Delta_p H_5$ 93 744	$(24)\Delta_p H_5$ 296 856	$Q_5^7 H_5$ 1 218 672
8	P_1^7 57	HS^*F_4 200	Q_7r 807	$K_{1,1}^7 Q_5$ 2 808	H_7r 39 223	$K_{1,1}^7 H_5$ 70 308	$K_{5,5}^7 H_5$ 234 360	$P_4^7 H_5$ 820 260	$Q_4^7 H_5$ 3 984 120
9	P_1^8d 74	Q_1^8 585	$Q_5(T_4)$ 1 248	HS^*C_{103} 5 150	H_8r 74 906	$H_7\Delta pt$ 215 688	$K_4\Delta_p H_7$ 656 672	$HS\Delta_p H_7$ 3 019 632	$Q_7^7 H_7$ 15 686 400
10	P_1^9 91	Q_1^8d 650	$(Q_8(T_3))'$ 1 755	$K_{1,1}^8 Q_7$ 10 000	H_9r 132 869	$H_8\Delta pt$ 486 837	$K_{5,5}^8 H_7$ 1 764 720	$HS\Delta_p H_8$ 7 714 494	$Q_7^8 H_7$ 47 059 200
11	P_1^9d 94	Q_1^8d 715	$Q_7(T_4)$ 3 200	$K_{1,1}^8 Q_8$ 14 625	$H_7(T_4)$ 156 864	$K_{1,1}^8 H_8$ 698 775	$K_{6,5}^8 H_8$ 4 044 492	$P_7^8 H_8$ 21 345 930	$Q_7^8 H_8$ 179 755 200
12	P_1^{11} 133	Q_1^8d 780	$Q_1^8 X_8$ 4 680	$K_{1,1}^8 Q_9$ 21 320	$H_{11}r$ 354 323	$K_{1,1}^8 H_9$ 1 727 180	$K_{7,7}^8 H_9$ 8 370 180	$P_8^8 H_9$ 48 493 900	$Q_8^8 H_9$ 466 338 600
13	P_1^{11d} 136	Q_1^8d 945	$Q_9(T_4)$ 6 560	$Q_1^8 m P_1^7$ 33 345	$H_9(T_4)$ 531 440	$H_{11}\Delta pt$ 2 657 340	$K_{8,8}^8 H_9d$ 10 257 408	$P_9^8 H_9$ 72 541 560	$Q_9^8 H_9$ 752 616 400
14	P_1^{13} 183	Q_1^8d 910	$Q_9(T_5)$ 8 200	$K_{1,1}^8 Q_{11}$ 51 240	$H_{13}r$ 804 481	$K_{1,1}^8 H_{11}$ 6 200 460	$K_{7,7}^8 H_{11}$ 29 762 208	$P_9^8 H_{11}$ 164 755 080	$Q_8^8 H_{11}$ 1 065 452 680
15	P_1^{13d} 185	$(Q_2^4)'$ 1 215	$Q_{11}(T_4)$ 11 712	$K_{1,1}^8 Q_{11}$ 58 560	$H_{11}(T_4)$ 1 417 248	$K_{1,1}^8 H_{11}$ 7 086 240	$K_{8,8}^8 H_{11}d$ 35 947 392	$P_{11}^8 H_{11}$ 282 740 976	$Q_{11}^8 H_{11}$ 3 630 989 376
16	P_1^{13d} 197	$(Q_3^4)'$ 1 600	$Q_{11}(T_5)$ 14 640	$(Q_3^4)'$ 132 496	$H_{11}(T_5)$ 1 771 560	$K_{1,1}^8 H_{13}$ 14 882 658	$K_{9,9}^8 H_{13}$ 86 882 544	$P_9^8 H_{11}$ 585 552 704	$Q_{11}^8 H_{13}$ 7 394 669 856

CAPITULO III

GRAFOS SOBRE ALFABETO

3.1 INTRODUCCION

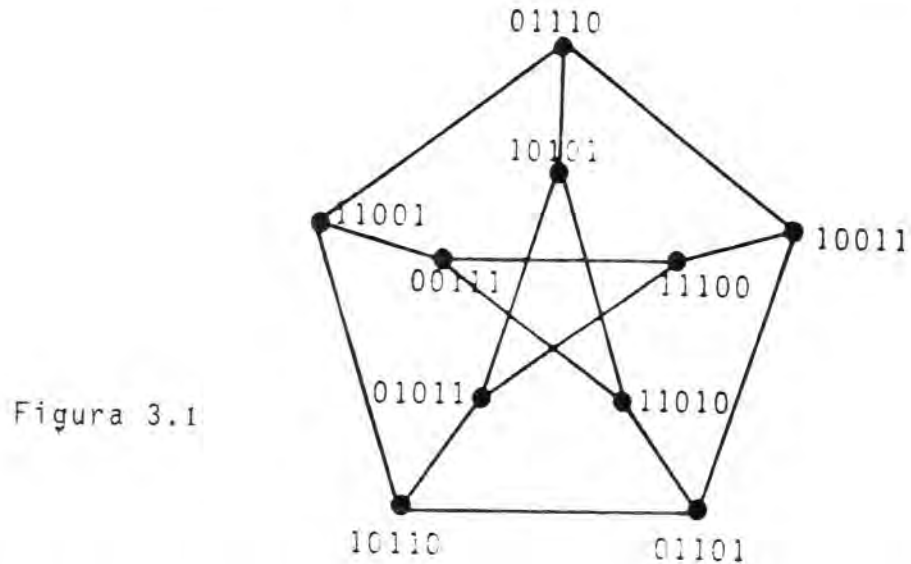
En este capítulo consideramos únicamente grafos sobre alfabetos. Como se comentó, este tipo de grafos se construyen identificando sus vértices con palabras según un alfabeto dado y definiendo sus ramas mediante un conjunto de reglas o condiciones que relacionan pares de palabras. Este método tiene varias ventajas, entre las que caben destacar la forma sencilla en que se realizan las construcciones y la posibilidad de desarrollar algoritmos simples que proporcionen caminos entre pares de vértices (en la red esto corresponde al encaminamiento de los mensajes). A su vez, el estudio de estos caminos permite estudiar el comportamiento del diámetro de estos grafos cuando se suprimen uno o más vértices (vulnerabilidad o tolerancia a fallos de las correspondientes redes).

Uno de los primeros ejemplos históricos de grafos densos sobre alfabetos son los *grafos de Akers*, también conocidos como "odd graphs", ver [1]. Están definidos únicamente para $\Delta = D + 1$. Cada uno de sus vértices está representado por una secuencia de longitud $2D-1$, con $\Delta-1$ 0's y Δ 1's, y cada vértice x es adyacente a los vértices que tienen justamente un 1 en común con él. La figura 3.1 muestra el grafo de Petersen como el grafo de Akers con $\Delta=3$.

Los grafos de Akers son Δ -regulares de diámetro $D = \Delta - 1$ y orden

$$N = \binom{2\Delta-1}{\Delta}$$

En la mayoría de casos los grafos de Akers tienen menor número de vértices que los grafos de las siguientes secciones.



Otro ejemplo de grafos densos sobre alfabetos es la familia de grafos trivalentes (es decir, regulares de grado $\Delta=3$) propuesta por Leland and Solomon en [46]. Están definidos sobre el conjunto de vértices $V = X^k$, donde $X = \mathbb{Z}_2$ es el conjunto de enteros módulo 2, mediante las condiciones de adyacencia

$$x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k \sim \begin{cases} x_2 x_3 \dots x_k \bar{x}_1 \\ \bar{x}_k x_1 \dots x_{k-2} x_{k-1} \\ x_1 \dots x_{k-2} \bar{x}_{k-1} \bar{x}_k \end{cases}$$

($\bar{x}_i = x_i + 1 \pmod{2}$). Se demuestra que su diámetro está acotado por $\lfloor 3k/2 \rfloor$, de manera que su orden satisface $N = 2^k \geq 2^{2D/3}$.

Algunas construcciones interesantes de grafos densos emplean el concepto de plano proyectivo. Si q es una potencia de un primo existe un plano proyectivo finito, P , sobre el cuerpo K de orden q , que tiene $q^2 + q + 1$ puntos y el mismo número de líneas. Ambos pueden ser representados por triple-

tas de elementos de K diferentes de $(0,0,0)$. Un punto $(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, $1 \leq \lambda < q$ está en la línea $\{a,b,c\}$ si y sólo si $ax + by + cz = 0$. Cada línea tiene $q+1$ puntos y cada punto está en $q+1$ líneas. La aplicación biyectiva que a cada punto $M \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$ asocia la línea $L(M) \equiv \{\alpha, \beta, \gamma\}$ es una *polaridad*, ya que $N \in L(M)$ si y sólo si $M \in L(N)$.

Los vértices del grafo de incidencia bipartito, P_q , asociado a P son los puntos y líneas de P , y cada vértice (punto o línea) es adyacente a los $q+1$ vértices (líneas o puntos respectivamente) incidentes en él. Este grafo tiene diámetro 3 y $2(q^2 + q + 1)$ vértices. La polaridad L permite considerar la identificación $M \equiv L(M)$ que conduce al grafo factor P de grado $q+1$, diámetro 2 y $q^2 + q + 1$ vértices. Ver por ejemplo [18].

3.2 DIGRAFOS DENSOS

En esta sección se describen dos conocidas familias de digrafos densos que dan origen a dos familias de grafos densos. En un grafo dirigido $D = (V, A)$ tenemos ramas dirigidas (arcos), desde un vértice x a otro vértice y . Consecuentemente, los caminos de longitud mínima entre vértices deben ser caminos dirigidos. Al igual que para grafos, es fácil ver que el máximo orden de un digrafo con grado máximo de salida $d \geq 2$ y diámetro k está acotado por

$$N \leq 1 + d + d^2 + \dots + d^k = \frac{d^{k+1} - 1}{d - 1} \quad (3.1)$$

Está demostrado que esta cota de Moore no puede ser alcanzada para $k \geq 2$, ver Plesnik y Znam [49]. Sin embargo, es posible obtener valores próximos a ella mediante las dos siguientes familias de digrafos:

Los vértices de los *digrafos de Good-de Bruijn* se denotan con palabras de longitud k sobre un alfabeto X , con $|X| = d$ letras, y un vértice $x = x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k$ es adyacente a los vértices $y = x_2 x_3 \dots x_k x_{k+1}$ para todas las posibles elecciones de $x_{k+1} \in X$. Estos digrafos tienen diámetro k y orden d^k .

Los *digrafos de Kautz* pueden ser obtenidos a partir de los digrafos de Good-de Bruijn suprimiendo las palabras con letras consecutivas iguales. En término de su grado máximo d y su diámetro k su orden es

$$N = (d+1)d^{k-1} = d^k + d^{k-1} \quad (3.2)$$

de manera que, para cualquier d y k , su orden es mayor que $(d^2 - 1)/d^2$ veces la cota de Moore, ver [28].

3.3 GRAFOS DENSOS OBTENIDOS DE DIGRAFOS

Las primeras familias infinitas de grafos (Δ, D) densos para grado Δ par y cualquier diámetro fueron obtenidas de una forma trivial a partir de los digrafos de Good-de Bruijn y Kautz. Basta con suprimir la orientación de los arcos y quitar los autolazos y ramas paralelas.

Así, los grafos de Good-de Bruijn $G\{d, k\}$ tienen el con-

junto de vértices x^k , $|X| = d$, condiciones de adyacencia

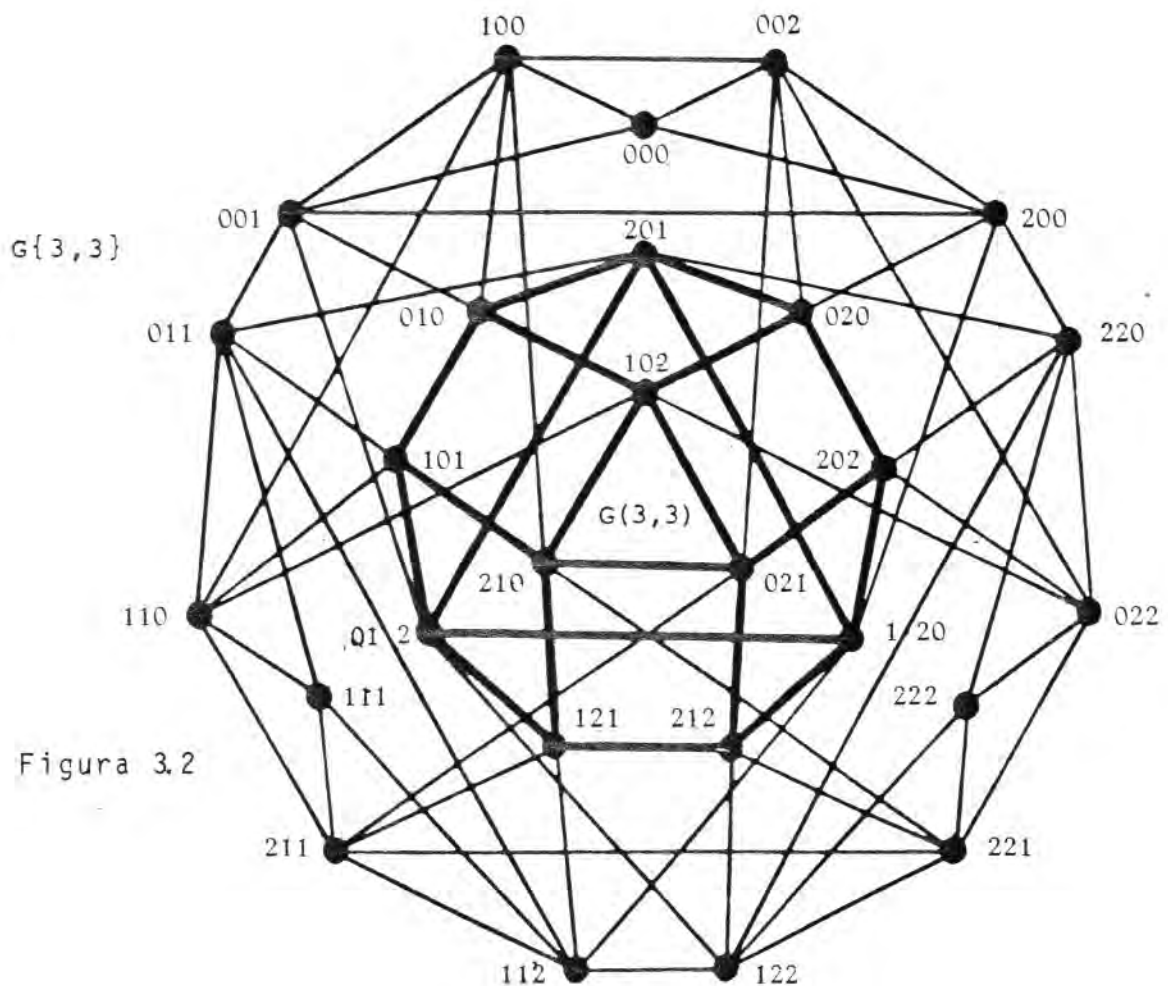
$$x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k \sim \begin{cases} x_2 x_3 \dots x_k x_{k+1}, & x_{k+1} \in X \\ x_0 x_1 \dots x_{k-2} x_{k-1}, & x_0 \in X \end{cases} \quad (3.3a)$$

$$(3.3b)$$

grado $\Delta = 2d$ (si $k \geq 3$), y diámetro $D = k$. Por consiguiente, su número de vértices en función de Δ y D es

$$N = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^D \quad (3.4)$$

La Figura 3.2 muestra el grafo de Good-de Bruijn para $d = 3$ y $k = 3$.



Una generalización de estos grafos son los grafos del C_s , propuestos por Delorme y Farhi en [18], los cuales se describirán en la Sección 3.6.

Análogamente a lo que ocurre con los digrafos de Kautz, los grafos de Kautz, $G(d,k)$, son los subgrafos de los grafos de Good-de Bruijn obtenidos considerando únicamente los vértices representados por palabras cuyas letras consecutivas (elementos de X) son distintas: $x_{i+1} \neq x_i$, $1 \leq i \leq k-1$. Para $d = 3$ y $k = 3$ este subgrafo está dibujado con líneas gruesas en la Figura 3.1. Para $k = 3$ y $d = 3$, los grafos de Kautz tienen grado $\Delta = 2(d-1)$, diámetro $D = k$ y orden

$$N = d(d-1)^{k-1} = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^D + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^{D-1} \quad (3.5)$$

Los grafos de Good-de Bruijn y de Kautz son no regulares porque en su construcción se suprimen autolazos y ramas paralelas. Esto posibilita la adición de vértices sin modificar su grado y diámetro. Por ejemplo, en [10] Bond añadió $2d-1 = \Delta+1$ vértices a los grafos de Kautz obteniendo una familia de grafos con orden

$$N = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^D + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^{D-1} + \Delta + 1 \quad (3.6)$$

Ver también [33].

3.4 GRAFOS SECUENCIA Y DE BOND

En [28] se muestra que la técnica del digrafo línea es muy útil para obtener digrafos densos. La misma idea

(i.e. grafo línea iterado) no es útil para grafos porque produce un gran incremento de Δ , pero, usando un procedimiento análogo, en esta sección veremos que es posible construir algunas buenas familias de grafos densos.

La primera de estas familias está constituida por los grafos secuencia, propuesta en [30] como una generalización de la construcción que produce el grafo línea. Más concretamente, dado un grafo G con diámetro D , su *grafo secuencia* de orden k , $S^k(G)$, es el grafo cuyos vértices son los caminos de longitud k (secuencias de $k+1$ vértices adyacentes consecutivos) y dos vértices de $S^k(G)$ son adyacentes si sus correspondientes caminos son adyacentes en G , es decir, si tienen un camino común de longitud $k-1$. Notar que, para $k=1$, $S^1(G)$ es en realidad el grafo línea de G .

Estudiando como una secuencia puede ser "desplazada" hacia otra, es fácil probar que el diámetro D de $S^k(G)$ satisface $D_k \leq D+k$. Además, si G es bipartito y k es impar, $D_k \leq D+k-1$. Para ambos resultados ver [30]. En el último caso, los mejores resultados se obtienen cuando G es el grafo bipartito completo K_{d_1, d_2} con $d_1 + d_2$ vértices. Entonces los grafos secuencia pueden ser definidos como grafos sobre alfabetos de la siguiente forma.

El grafo $S^{2k-1}(K_{d_1, d_2}) \cong S\{d_1, d_2\}$ tiene el conjunto de vértices $X^k \times Y^k$, $|X|=d_1$, $|Y|=d_2$, cuyos elementos están representados por las secuencias $x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_k y_k$. Las condiciones de adyacencia son:

$$x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_k y_k \sim \begin{cases} x_{k+1} y_k x_k \dots y_2 x_2 y_1, & x_{k+1} \in X \quad (3.7a) \\ x_k \dots y_2 x_2 y_1 x_1 y_0, & y_0 \in Y \quad (3.7b) \end{cases}$$

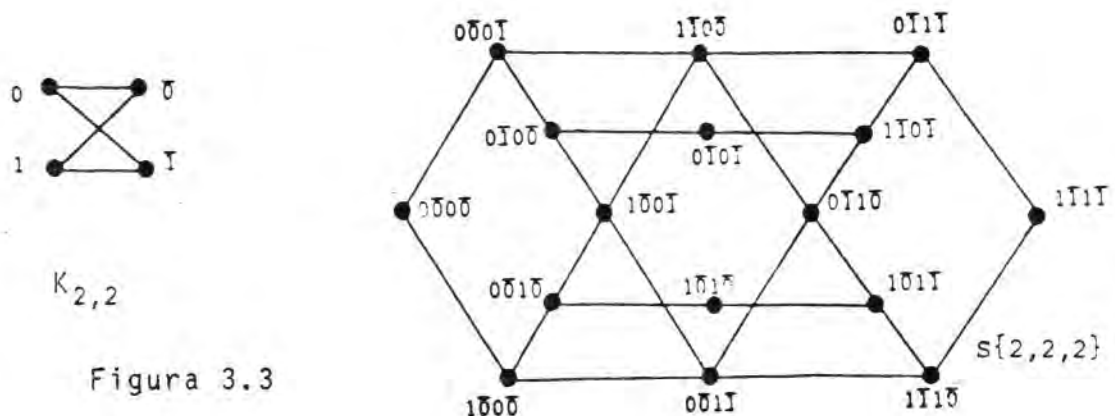
Así, (suponiendo $k, d_1, d_2 \geq 2$) el grafo $S\{d_1, d_2, k\}$ tiene grado $\Delta = d_1 + d_2$ y diámetro $D = 2k$, ya que según el razonamiento anterior se obtiene $D \leq 2 + (2k-1) - 1 = 2k$ y, obviamente, siempre existen vértices a distancia $2k$. Si $d_1 = d_2 = d$, estos grafos tienen el mismo número de vértices que los grafos de Good-de Bruijn:

$$N = (d_1 d_2)^k = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^D \quad (3.8)$$

con Δ y D pares. Por otra parte, si $d_1 = d_2 - 1 = d$, obtenemos una familia de grafos con Δ impar, D par, y orden

$$N = \left(\frac{\Delta-1}{2}\right)^{\frac{D}{2}} = \left(\frac{\Delta-1}{2}\right)^D + \frac{D}{2} \left(\frac{\Delta-1}{2}\right)^{D-1} + \dots \quad (3.9)$$

La Figura 3.3 muestra el grafos $K_{2,2}$ y su grafo secuencia de orden 3, $S^3(K_{2,2}) \equiv S\{2,2,2\}$.



Los grafos de Bond, propuestos en [10], se definen de la misma forma que los grafos secuencia $S\{d_1, d_2, k\}$ con la salvedad de que, en las secuencias que representan los vértices, los elementos sucesivos de X deben ser diferentes. Así, en los *grafos de Bond*, denotados por $S(d_1, d_2, k)$, las condiciones de adyacencia son las siguientes

$$x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_k y_k \sim \begin{cases} x_{k+1} y_k x_k \dots y_2 x_2 y_1, & x_{k+1} \neq x_k & (3.10a) \\ x_k y_{k-1} \dots x_2 y_1 x_1 y_0 & & (3.10b) \end{cases}$$

Por tanto $S(d_1, d_2, k)$, que es naturalmente un subgrafo de los grafos secuencia $S\{d_1, d_2, k\}$, tiene $N = d_1(d_1 - 1)^{k-1}d_2^k$ vértices y grado $\Delta = d_1 + d_2 - 1$. Para probar que su diámetro es también $D = 2k$, consideremos los vértices

$$\begin{aligned} u &= x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_{k-1} y_{k-1} x_k y_k \\ v &= s_1 t_1 s_2 t_2 \dots s_{k-1} t_{k-1} s_k t_k \end{aligned}$$

En los dos posibles casos, $s_1 \neq x_k$ y $s_1 = x_k$, mostraremos un camino de longitud $2k$ entre u y v . Si $s_1 \neq x_k$ tenemos

$$\begin{aligned} u &= x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_{k-1} y_{k-1} x_k y_k \\ &\quad s_1 y_k x_k y_{k-1} x_{k-1} \dots y_2 x_2 y_1 \\ &\quad x_2 y_2 x_3 y_3 \dots y_{k-1} x_k y_k s_1 t_1 \\ &\quad \dots \\ &\quad \dots \\ &\quad s_k t_{k-1} s_{k-1} \dots t_2 s_2 t_1 s_1 y_k \\ &\quad s_1 t_1 s_2 t_2 \dots s_{k-1} t_{k-1} s_k t_k = v \end{aligned}$$

por otra parte, si $s_1 = x_k$ el camino es

$$\begin{aligned}
u &= x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_{k-1} y_{k-1} s_1 y_k \\
&\quad s_1 y_{k-1} x_{k-1} \dots y_2 x_2 y_1 x_1 y_0, \quad y_0 \in Y \\
&\quad x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_{k-1} y_{k-1} s_1 t_1 \\
&\quad \dots \\
&\quad \dots \\
&\quad s_k t_{k-1} s_{k-1} \dots s_2 t_1 s_1 y_{k-1} \\
&\quad s_1 t_1 s_2 t_2 \dots s_{k-1} t_{k-1} s_k t_k = v
\end{aligned}$$

Como antes, es fácil ver que existen vértices a distancia $2k$.

Si $d_1 = d_2 = d$, el grafo $S(d, d, k)$ tiene grado Δ impar, diámetro par y número de vértices

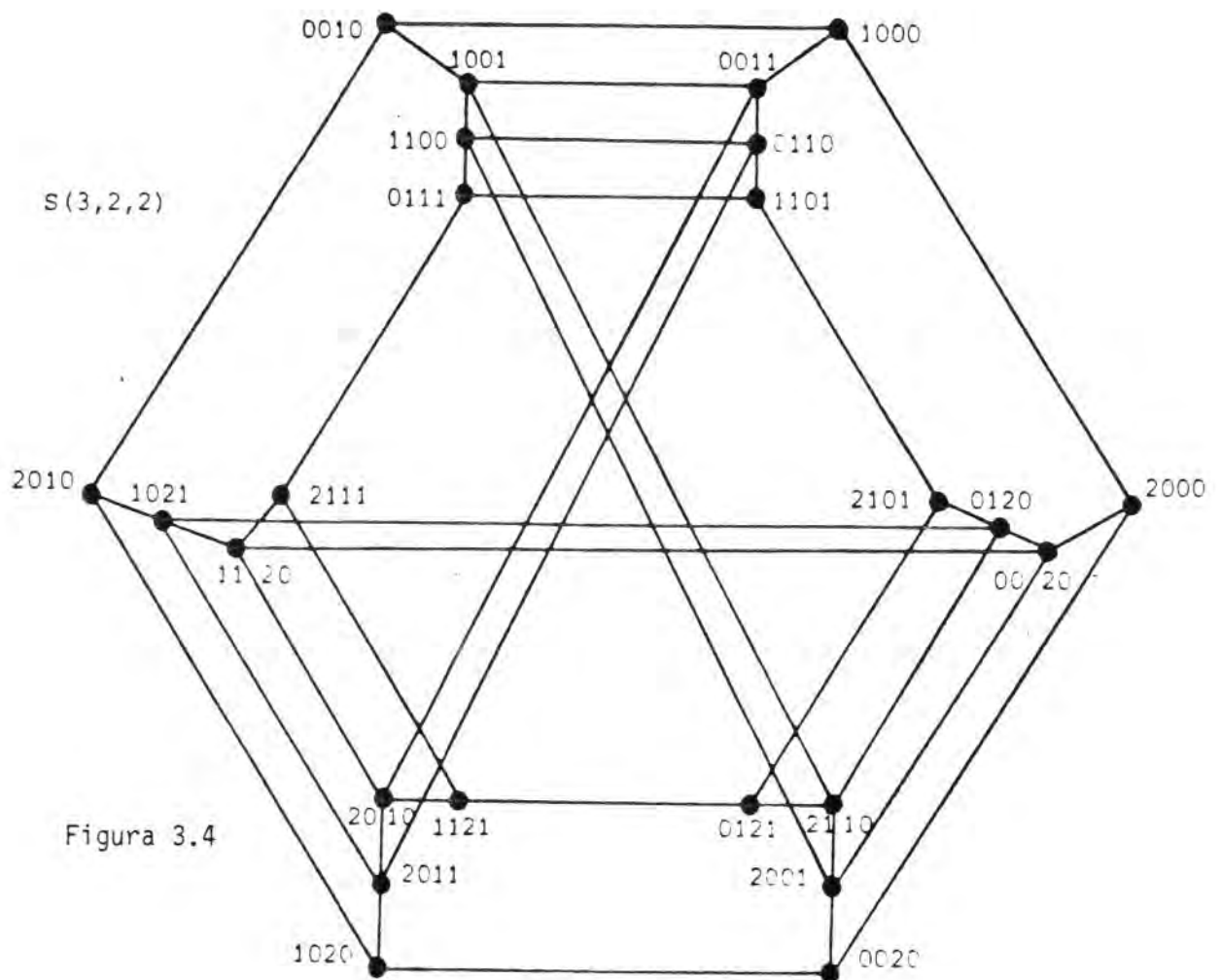
$$N = \left(\frac{\Delta+1}{2}\right)^{\frac{D}{2}+1} \left(\frac{\Delta-1}{2}\right)^{\frac{D}{2}-1} = \left(\frac{\Delta-1}{2}\right)^D + \left(\frac{D+1}{2}\right) \left(\frac{\Delta-1}{2}\right)^{D-1} + \dots \quad (3.11)$$

Si $d_1 - 1 = d_2 = d$, los grafos de Bond tienen Δ y D pares, y el mismo orden que los grafos de Kautz

$$N = \left(\frac{\Delta}{2}\right)^D + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^{D-1} \quad (3.12)$$

El grafo $S(3, 2, 2)$ se muestra en la Figura 3.4

Las condiciones de adyacencia (3.7) y (3.10) producen autolazos (pero no ramas paralelas), y por tanto, los correspondientes grafos secuencia y de Bond tienen vértices con grado más pequeño que Δ . Así al igual que en los grafos de Good-de Bruijn y de Kautz, dichos grafos pueden ser expandidos añadiendo gran cantidad de vértices. Ver [10] y [33].



3.5 GRAFOS DE DELORME Y BISECUENCIA

En [17], Delorme usó las ideas empleadas en algunas de sus propias construcciones, ver [16] y [18], junto con la que originó los grafos secuencia, para encontrar una buena familia de grandes grafos con grado par y diámetro impar.

Sea k un entero impar. Los grafos de Delorme $C'_S(4,d,k)$ tienen el conjunto de vértices $\mathbb{Z}_2 \times X^k$, $|X| = d \geq 2$, y condiciones de adyacencia

$$a; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k \sim \begin{cases} a; x_{k+1} x_k x_{k-1} \dots x_3 x_2 & (3.13a) \\ a+1; x_{k-1} x_{k-2} \dots x_1 x_0 & (3.13b) \end{cases}$$

Así, estos grafos tienen grado $\Delta = 2d$ y orden $N = 2(\Delta/2)^k$. Para probar que su diámetro es $D = k$, supondremos que $k \equiv 1 \pmod{4}$ (en el caso $k \equiv 3 \pmod{4}$ se hace un razonamiento análogo). Vamos a considerar los vértices

$$u = a; x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-2} x_{k-1} x_k$$

$$v = b; y_1 y_2 y_3 \dots y_{k-2} y_{k-1} y_k$$

donde b puede valer a o $a+1 \equiv \bar{a}$. En el segundo caso tenemos el siguiente camino de longitud k entre u y v :

$$u = a; x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-2} x_{k-1} x_k$$

$$\bar{a}; x_{k-1} x_{k-2} \dots x_3 x_2 x_1 y_1$$

$$\bar{a}; y_2 y_1 x_1 x_2 \dots x_{k-3} x_{k-2}$$

$$a; x_{k-3} x_{k-4} \dots x_1 y_1 y_2 y_3$$

....

....

....

$$a; x_2 x_1 y_1 y_2 \dots y_{k-3} y_{k-2}$$

$$a; y_{k-1} y_{k-2} \dots y_3 y_2 y_1 x_1$$

$$\bar{a}; y_1 y_2 y_3 \dots y_{k-2} y_{k-1} y_k = v$$

En el primer caso ($b=a$), podemos encontrar análogamente un camino de la misma longitud.

$$u = a; x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-2} x_{k-1} x_k$$

$$a; y_k x_k x_{k-1} \dots x_5 x_4 x_3 x_2$$

$$\bar{a}; x_3 x_4 x_5 x_6 \dots x_k y_k y_{k-1}$$

$$\bar{a}; y_{k-2} y_{k-1} y_k \dots x_6 x_5 x_4$$

....

....

....

$$\bar{a}; y_3 y_4 \dots y_{k-1} y_k x_k x_{k-1}$$

$$\bar{a}; x_k y_k y_{k-1} \dots y_5 y_4 y_3 y_2$$

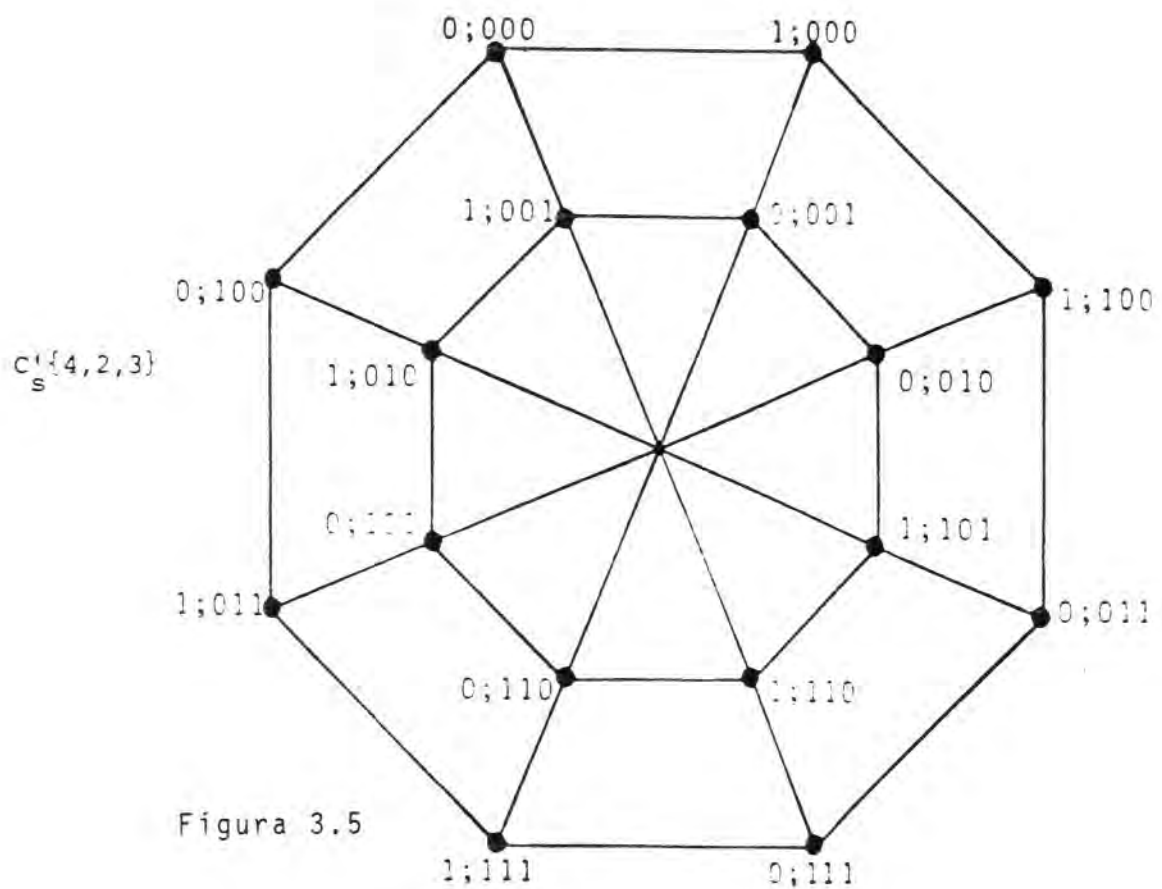
$$a; y_1 y_2 y_3 \dots y_{k-2} y_{k-1} y_k = v$$

De este modo, concluimos que $D = k$ porque es evidente que, como en las construcciones prededentes, siempre existen vértices que están a distancia k .

En función de Δ (par) y D (impar), el número de vértices de los grafos de Delorme es el doble que el de los grafos de Good-de Bruijn:

$$N = 2 \left(\frac{\Delta}{2} \right)^D \quad (3.14)$$

La Figura 3.5 muestra el grafo de Delorme para $\Delta = 4$ y $D = 3$.



La construcción que conduce a los grafos de Delorme fue generalizada en [35], para obtener grandes grafos con Δ impar. Dicha generalización es la siguiente.

Sea ahora k un entero tal que $k = 4n + 1$ ($n \geq 1$). El grafo bisecuencia de orden k $T\{d_1, d_2, k\}$ tiene el conjunto de vértices $V = \{X^{2n+1} \times Y^{2n}\} \cup \{X^{2n} \times Y^{2n+1}\}$, $|X| = d_1$, $|Y| = d_2$. Sus elementos están representados por alguna de la secuencias

$$u = x_1 x_2 y_3 y_4 x_5 x_6 \dots y_{k-2} y_{k-1} x_k$$

$$v = y_1 y_2 x_3 x_4 y_5 y_6 \dots x_{k-2} x_{k-1} y_k$$

$x_i \in X \quad y \quad y_j \in Y$

Así, $T\{d_1, d_2, k\}$ tiene $N = (d_1 + d_2)(d_1 d_2)^{2n}$ vértices. Las condiciones de adyacencia son

$$x_1 x_2 y_3 y_4 x_5 x_6 \dots y_{k-2} y_{k-1} x_k \sim \begin{cases} x_{k+1} x_k y_{k-1} y_{k-2} \dots y_4 y_3 x_2, & x_{k+1} \in X & (3.15a) \\ y_{k-1} y_{k-2} \dots y_4 y_3 x_2 x_1 y_0, & y_0 \in Y & (3.15b) \end{cases}$$

$$y \quad y_1 y_2 x_3 x_4 y_5 y_6 \dots x_{k-2} x_{k-1} y_k \sim \begin{cases} y_{k+1} y_k x_{k-1} x_{k-2} \dots x_4 x_3 y_2, & y_{k+1} \in Y & (3.15c) \\ x_{k-1} y_{k-2} \dots x_4 x_3 y_2 y_1 x_0, & x_0 \in X & (3.15d) \end{cases}$$

Por tanto, el grado de $T(d_1, d_2, k)$ es $\Delta = d_1 + d_2$. Con respecto a su diámetro se tiene el siguiente resultado

Teorema 3.5.1: El grafo $T(d_1, d_2, k)$, $k = 4n + 1$, tiene diámetro $D = k$.

Demostración:

Consideremos, como antes, los vértices u y v . Entonces tenemos, entre ellos, el siguiente camino de longitud k

$$\begin{aligned} u = & x_1 x_2 y_3 y_4 x_5 x_6 \dots y_{k-2} y_{k-1} x_k \\ & y_{k-1} y_{k-2} x_{k-3} \dots y_4 y_3 x_2 x_1 y_1 \\ & y_2 y_1 x_1 x_2 y_3 y_4 x_5 \dots x_{k-3} y_{k-2} \\ & x_{k-3} x_{k-4} \dots y_4 y_3 x_2 x_1 y_1 y_2 x_3 \\ & \dots \\ & \dots \\ & \dots \\ & x_2 x_1 y_1 y_2 x_3 x_4 y_5 \dots y_{k-3} x_{k-2} \\ & x_{k-1} x_{k-2} \dots y_6 y_5 x_4 x_3 y_2 y_1 x_1 \\ & y_1 y_2 x_3 x_4 y_5 y_6 \dots x_{k-2} x_{k-1} y_k = v \end{aligned}$$

Análogamente, desde el vértice u al vértice

$$w = s_1 s_2 t_3 t_4 s_5 s_6 \dots t_{k-2} t_{k-1} s_k, \quad s_i \in X, \quad t_j \in Y$$

tenemos el siguiente camino de la misma longitud

$$\begin{aligned} u = & x_1 x_2 y_3 y_4 x_5 x_6 \dots t_{k-2} y_{k-1} x_k \\ & s_k x_k y_{k-1} y_{k-2} \dots x_6 x_5 y_4 y_3 x_2 \\ & y_3 y_4 x_5 \dots y_{k-2} y_{k-1} x_k s_k t_{k-1} \\ & t_{k-2} t_{k-1} s_k x_k y_{k-1} y_{k-2} \dots y_4 \\ & \dots \\ & \dots \\ & \dots \\ & t_3 t_4 s_5 \dots t_{k-2} t_{k-1} s_k x_k y_{k-1} \\ & x_k x_k t_{k-1} t_{k-2} \dots s_6 s_5 t_4 t_3 s_2 \\ & s_1 s_2 t_3 t_4 s_5 s_6 \dots t_{k-2} t_{k-1} s_k = w \end{aligned}$$

Como antes concluimos que $D = k$.

Cuando $d_1 = d_2 = d$, los grafos $T\{d, d, k\}$, $k = 4n + 1$, tienen Δ par, diámetro impar $D \equiv 1 \pmod{4}$ y el mismo número de vértices que los grafos de Delorme

$$N = 2 \left(\frac{\Delta}{2} \right)^D \quad (3.16)$$

De hecho, se puede comprobar fácilmente que ambas familias son isomorfas. (En este caso, la construcción anterior también puede ser obtenida cuando $k \equiv 3 \pmod{4}$).

Cuando $d_1 = d_2 - 1$, los grafos $T\{d, d+1, k\}$, $k = 4n + 1$, tienen Δ y D impares, $D \equiv 1 \pmod{4}$, y orden

$$N = \Delta \left(\frac{\Delta^2 - 1}{4} \right)^{\frac{D-1}{2}} = 2 \left(\frac{\Delta-1}{2} \right)^D + D \left(\frac{\Delta-1}{2} \right)^{D-1} + \dots \quad (3.17)$$

mejorando, para estos valores de D , los de (3.9) y (3.11) que corresponden a los grafos secuencia y de Bond respectivamente.

Como en las construcciones precedentes, es posible añadir algunos vértices a los grafos de Delorme y bisecuencia, sin modificar Δ y D .

3.6 GRAFOS DE TIPO C_s y C_p

Los grafos de tipo C_s , que denotamos por $C\{m, d, k\}$, fueron propuestos por Delorme y Farhi en [18]. Su conjunto de vértices es $V = \mathbb{Z}_m \times X^k$, $|X| = d$, $N = |V| = md^k$, y las condiciones de adyacencia

$$v \equiv a; x_1 x_2 \dots x_k \sim x_k \begin{cases} a+1; x_2 \dots x_{k-1} x_k x_{k+1}, & x_{k+1} \in X & (3.18a) \\ a-1; x_0 x_1 x_2 \dots x_{k-1}, & x_0 \in X & (3.18b) \end{cases}$$

Por tanto $d(v) \leq 2d$ y, si $m \geq 3$ o $k \geq 3$, su grado es $\Delta = 2d$.

Notar que el caso particular $m = 1$ corresponde a los grafos de Good-de Bruijn estudiados en la Sección 3.3. El caso $k = m - 1$ fue estudiado por Memmi y Raillard en [47].

Sea $|b|$ el entero no negativo más pequeño tal que $|b| = b$ o $|b| = -b \bmod m$ (es decir, $|b-k|$ es la distancia entre b y k en el ciclo de m vértices). Los autores citados anteriormente probaron en [18] que el diámetro de los grafos

$C_S(m, d, k)$ satisfice

$$D \leq k + \sup_{b \in \mathbb{Z}_m} \inf \{ |b-k|, |b+k| \} \quad (3.19)$$

y, en [23], Farhi demostró que D es en realidad igual a la cota indicada.

Para obtener grafos con grado impar, los mismos autores propusieron una construcción similar a la anterior basada, como los grafos secuencia y los de Bond, en el uso de símbolos procedentes de dos conjuntos X e Y con diferente cardinalidad. Los grafos resultantes, llamados *de tipo C'_S* (m par), son bipartitos y, tal como Delorme y Farhi escriben en [18], "... no dan los mejores valores en el problema de los grafos (Δ, D) ; sin embargo, merecen considerarse debido a que dan buenos resultados en el problema de los grafos (Δ, D) bipartitos, y proporcionan una base para algunas construcciones que dan lugar a los mejores resultados [16], [30]".

Notar que en los grafos de Good-de Bruijn y C_S las condiciones de adyacencia implican que, en cada paso, primero se desplaza la secuencia y después se cambia un elemento de X por el adecuado (cualquier otro o quizás el mismo). Así, los cambios "permitidos" pueden ser representados por el grafo completo con autolazos, como muestra la Figura 3.6a para $|X| = 3$. Esto sugiere la posibilidad de usar modelos de cambio más elaborados -i.e. grafos- para los elementos de X , por ejemplo los que requieren *dos* pasos para cambiar un símbolo a cualquier otro. En este caso, los mejores resultados se obtienen cuando empleamos P'_q , el grafo factor por una polaridad del grafo de incidencia asociado al plano pro-

yectivo, que se describió en la Sección 3.1. El grafo P'_q tiene la propiedad de que entre cualquier par de vértices existe un camino de longitud 2. La Figura 3.6b muestra P'_2 ($D=2$, $\Delta=q+1=3$ y $N=q^2+q+1=7$) con sus vértices rotulados con los elementos del plano proyectivo P sobre $GF(2)$.

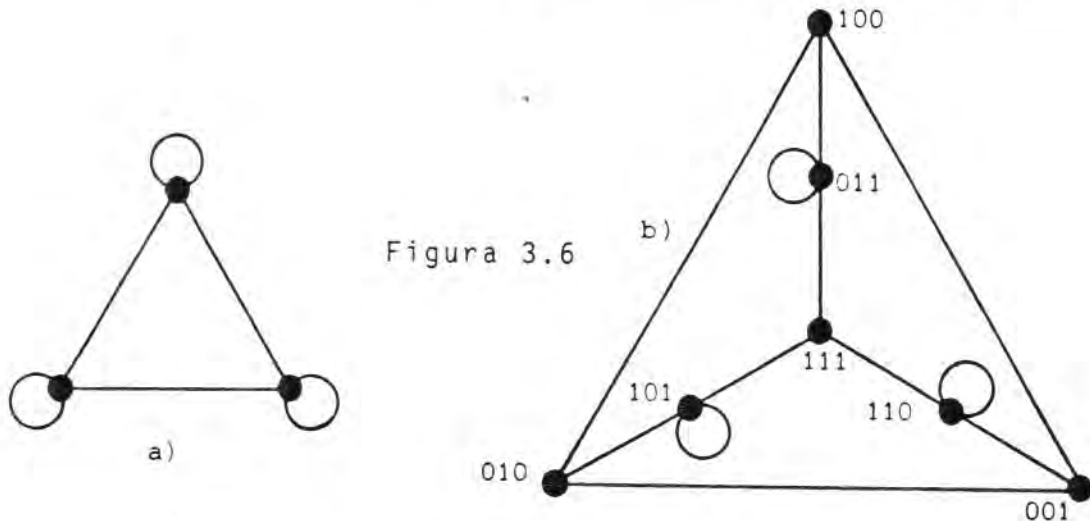


Figura 3.6

Así, los grafos de tipo C_p o, específicamente $C_p(m, q, k)$, también propuestos en [18], tienen como conjunto de vértices $\mathbb{Z}_m \times P^k$, con P el plano proyectivo sobre $GF(q)$, $|P| = q^2 + q + 1$. Las condiciones de adyacencia son similares a (3.18):

$$a; p_1 p_2 \dots p_{k-1} p_k \sim \begin{cases} a+1; p_2 p_3 \dots p_k p_{k+1}, & p_{k+1} \sim p_1 \text{ en } P'_q \\ a-1; p_0 p_1 \dots p_{k-1}, & p_0 \sim p_k \text{ en } P'_q \end{cases} \quad (3.20a)$$

$$(3.20b)$$

Por tanto, los grafos $C_p(m, q, k)$, que existen únicamente cuando q es una potencia de un primo, tienen grado $\Delta = 2(q+1)$ y su número de vértices $N = m(q^2 + q + 1)^k$. Su diámetro es

$$D = 2k + \sup_{b \in \mathbb{Z}_m} \inf\{|b|, |b-2k|, |b+2k|\} \quad (3.21)$$

Comparando con (3.19) vemos que aparece el factor 2, debido

al empleo de $P = P'_q$, que multiplica a k .

Los mejores resultados se obtienen cuando $m = 3$ y k no es un múltiplo de 3. Entonces, el grafo $C_p(3, q, k)$ tiene grado $\Delta = 2q + 2$, $q =$ potencia de primo, diámetro par $D = 2k \equiv 2$ o $4 \pmod{6}$ ($D \geq 4$), y número de vértices

$$N = 3 \left[\left(\frac{\Delta}{2} \right)^2 - \left(\frac{\Delta}{2} \right) + 1 \right]^{\frac{D}{2}} \quad (3.22)$$

En [16] Delorme generaliza los grafos C_s y C_p con una construcción que, como se explicó anteriormente, esta basada en el empleo de grafos más generales que modelan los cambios sucesivos de los dígitos x_i .

3.7 GRAFOS DE TIPO Z

Las nuevas construcciones que presentamos en esta sección están inspiradas en las descritas en la anterior. La idea principal es añadir una nueva condición de adyacencia y restringir los valores posibles del parámetro m para dar a su dígito asociado, $a \in \mathbb{Z}_m$, más "movilidad".

Empezamos describiendo los grafos que denotamos por $Z\{m, d, k\}$. Estos grafos tienen el conjunto de vértices $V = \mathbb{Z}_m \times X^k$ donde m es un entero *impar*, $3 \leq m \leq k+1$, y condiciones de adyacencia

$$a; x_1 x_2 \dots x_k \sim \begin{cases} a+1; x_2 x_3 \dots x_k x_{k+1}, & x_{k+1} \in X \\ a-1; x_0 x_1 \dots x_{k-2} x_{k-1}, & x_0 \in X \\ -a; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k, \end{cases} \quad (3.23a)$$

$$(3.23b)$$

$$(3.23c)$$

de manera que tienen $N = md^k$ vértices y grado $\Delta = 2d + 1$.

Teorema 3.7.1: El grafo $Z(m, d, k)$ tiene diámetro $D = k + 1$.

Demostración:

Consideremos los vértices

$$x = a; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k$$

$$y = a; y_1 y_2 \dots y_{k-1} y_k$$

Probaremos que siempre existe un camino de longitud $k + 1$ entre ellos (la necesidad de este camino u otro de la misma longitud, entre ciertos pares de vértices es trivial). Desde x y después de i pasos (3.23a), $0 \leq i \leq k$, podemos alcanzar el vértice

$$a+i; x_{i+1} \dots x_k y_1 \dots y_i$$

que es adyacente, por (3.23c), al vértice

$$-(a+i); x_{i+1} \dots x_k y_1 \dots y_i$$

Desde él, y después de $(k+1) - (i+1) = k - i$ pasos adicionales (3.23a), llegamos al vértice

$$y' = k - 2i - a; y_1 y_2 y_3 \dots y_{k-1} y_k \quad (3.24)$$

Entonces $y' = y$ si $k - 2i - a \equiv b \pmod{m}$, es decir

$$2i \equiv k - a - b \pmod{m} \quad (3.25)$$

pero esta ecuación tiene siempre una solución i , $0 \leq i \leq m-1 \leq k$, para cualquiera a y b porque $\text{m.c.d.} \{2, m\} = 1$.

Notar que el camino "en el sentido de las agujas del reloj" considerado no es único ya que puede probarse fácil-

mente que, usando j pasos (3.23b), uno (3.23c) y $k-j$ (3.23b), $0 \leq j \leq k$, (camino "en el sentido contrario de las agujas del reloj") alcanzamos el vértice

$$y'' = -k+2j-a; y_2 \dots y_{k-1} y_k \quad (3.26)$$

y la condición $y'' = y$ ahora conduce a la ecuación

$$2j \equiv k + a + b \pmod{m} \quad (3.27)$$

que, como antes, siempre tiene solución.

Los mejores resultados se obtienen con las elecciones $m = k+1$ y $m = k$. En el primer caso, los grafos resultantes tienen grado y diámetro impares y su número de vértices es

$$N = D \left(\frac{\Delta-1}{2} \right)^{D-1} \quad (3.28)$$

En el segundo caso obtenemos grafos con diámetro par, grado impar y orden

$$N = (D-1) \left(\frac{\Delta-1}{2} \right)^{D-1} \quad (3.29)$$

Veamos ahora como mejorar los valores (3.28) y (3.29) mediante una leve modificación empleada en construcciones prededentes.

Los grafos $Z(m,d,k)$ se definen como los grafos $Z\{m,d,k\}$, pero símbolos consecutivos (elementos de X) de cada secuencia deben ahora ser distintos:

$$x_{i+1} \neq x_i, \quad 1 \leq i \leq k-1$$

Así, estos grafos tienen grado $\Delta = 2d-1$ y orden $N = md(d-1)^{k-1}$.

Además, el siguiente resultado muestra que tienen el mismo diámetro que los grafos $Z\{m, d, k\}$.

Teorema 3.7.2: El grafo $Z(m, d, k)$ tiene diámetro $D = k + 1$.

Demostración:

Basta estudiar el peor caso $m = k + 1$. Sean entonces

$$x = a; x_1 x_2 \dots x_{m-2} x_{m-1}$$

y

$$y = a; y_1 y_2 \dots y_{m-2} y_{m-1}$$

dos vértices genéricos. Mostraremos que existe un camino de longitud $m - 1$ o m entre x e y . Primero, si $y_1 \neq x_{m-1}$ este camino es el mismo que en la demostración del Teorema 3.7.1. En caso contrario, se puede probar fácilmente que desde x , y en $m - 1$ pasos (i del tipo (3.23a), uno (3.23c) y $(m - 1) - (i + 1)$ del tipo (3.23a)), es posible alcanzar los vértices

$$-a-2i-2; y_1 y_2 \dots y_{m-2} y_{m-1} \quad (3.30)$$

donde $0 \leq i \leq m - 2$. Para estos valores de i , el primer dígito en (3.30) toma todos los valores en $\mathbb{Z}_m$ excepto $-a-2(m-1)-2 = -a$. Así, sólo nos resta considerar el caso $b = -a$:

- 1) Si $a = 0$, primero vamos al vértice adyacente a x

$$-a; x_1 x_2 \dots x_{m-2} y_1, \quad -a \neq a$$

que puede verse como el nuevo vértice inicial con $-(-a) \neq b$, y estamos en la situación anterior.

- 2) Si $a = 0$, entonces $b = 0$ y un camino de longitud m desde x a y , que sólo emplea condiciones del tipo

(3.23a), es el siguiente

$$\begin{aligned}
 x &= 0; x_1 x_2 \dots x_{m-1} y_1 \\
 &1; x_2 x_3 \dots y_1 y_0, \quad y_0 \neq y_1 \\
 &2; x_3 x_4 \dots y_1 y_0 y_1 \\
 &3; x_4 x_5 \dots y_0 y_1 y_2 \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 &0; y_1 y_2 \dots y_{m-2} t_{m-1} = y.
 \end{aligned}$$

Cuando $m = k + 1$ obtenemos grafos $Z(m, d, m-1)$ con diámetro y grado impares, y cuyo orden es

$$N = D \left(\frac{\Delta - 1}{2} \right)^{D-1} + D \left(\frac{\Delta - 1}{2} \right)^{D-2} \quad (3.31)$$

Cuando $m = k$, los grafos resultantes, $Z(m, d, m)$, tienen diámetro par, grado impar y número de vértices

$$N = (D-1) \left(\frac{\Delta - 1}{2} \right)^{D-1} + (D-1) \left(\frac{\Delta - 1}{2} \right)^{D-2} \quad (3.32)$$

(valores que pueden compararse con (3.28) y (3.29) respectivamente).

A partir de la consideración de los dos caminos entre cualquier par de vértices mostrados antes para los grafos $Z\{m, d, k\}$, veremos seguidamente como podemos mejorar los valores de (3.31) y (3.32). Al igual que en la demostración anterior, centramos nuestra discusión al caso $m = k + 1$. En primer lugar vamos a ver que, en estos grafos, aproximadamente la mitad de las ramas de la forma

$$(a; x_1 x_2 \dots x_{m-1}, -a; x_1 x_2 \dots x_{m-1})$$

son redundantes en el sentido de que pueden ser suprimidas sin incrementar el diámetro. Este hecho nos permitirá doblar el orden uniendo dos copias de los grafos resultantes a través de los vértices deficientes. Comenzando a partir de (3.24) y (3.26) con $k = m - 1$, vemos que los dos caminos; "en el mismo sentido y sentido contrario a las agujas del reloj", conducen al mismo vértice si y sólo si

$$-2i - a - 1 \equiv 2j - a + 1 \pmod{m}$$

Como m es impar, esto implica

$$-j - i \equiv 1 \pmod{m} \quad (3.33a)$$

$$o \quad (a-j) - (a+i) \equiv 1 \pmod{m} \quad (3.33b)$$

Esto se ilustra en la Figura 3.7 que también muestra, mediante un grafo autoexplicatorio, los cambios en el primer dígito a inducidos por las condiciones de adyacencia (3.23).

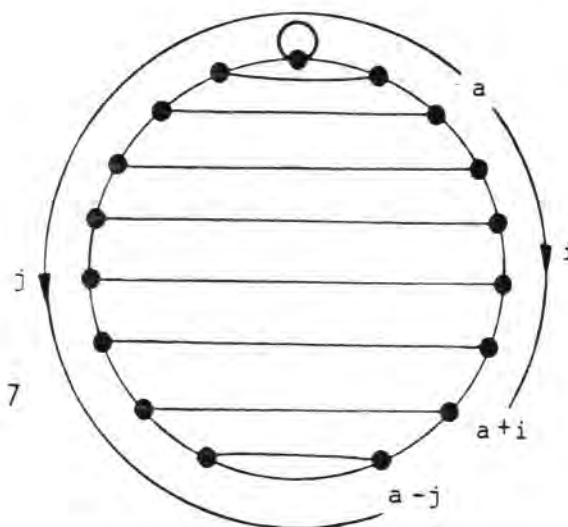


Figura 3.7

Denotemos por E_0 y E_1 a los conjuntos de ramas de

$Z(m,d,k)$ inducidas por la condición de adyacencia (3.23c) cuando $a = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ y $a = \pm 1, \pm 3, \dots$ respectivamente. El siguiente resultado muestra que la condición (3.33) implica la redundancia de E_0 ó E_1 .

Lema 3.7.1: El grafo obtenido a partir de $Z(m,d,k)$, $k = m-1$, suprimiendo las ramas de E_0 ó E_1 tiene el mismo diámetro $D = k + 1$.

Demostración:

Obviamente, es suficiente estudiar el caso $k = m - 1$. Entonces, considerando el mismo tipo de caminos entre dos vértices genéricos $x = a; x_1 x_2 \dots x_{m-2} x_{m-1}$ e $y = b; y_1 y_2 \dots y_{m-2} y_{m-1}$, las ecuaciones (3.25) y (3.27) pueden ser reescritas en la forma

$$b \equiv -1 - a - 2i \pmod{m} \quad (3.34)$$

$$b \equiv -1 - a + 2j \pmod{m} \quad (3.35)$$

respectivamente.

Consideremos los siguientes casos:

a) $m = 4n - 1$

a.0) Suprimir E_0 : la condición (3.23c) se aplica únicamente cuando $a = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2n-1)$

a.1) Suprimir E_0 : la condición (3.23c) se aplica únicamente cuando $a = 0, \pm 2, \dots, \pm(2n-2)$.

b) $m = 4n + 1$

b.0) Suprimir E_1 : la condición (3.23) se aplica únicamente cuando $a = 0, \pm 2, \dots, \pm 2n$

b.1) Suprimir E_0 : la condición (3.23c) se aplica únicamente cuando $a = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2n-1)$.

La Figura 3.8 muestra los casos a.0) y a.1) cuando $m=7$. En el caso a.0) vemos que, en (3.34) y (3.35), i y j pueden tomar $2n$ valores (aquellos que satisfacen $(a+i)$ o $(a-j)$ igual a $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2n-1)$) que, de acuerdo con (3.33b) producen todos los posibles valores para b ya que existe sólo una repetición, cuando $(a-j) = -(2n-1) = 2n \bmod m$ y $(a+i) = 2n-1$.

Por otra parte, en el caso a.1) i y j toman sólo $2n-1$ valores cada una (los que satisfacen $(a+i)$ o $(a-j)$ igual a $0, \pm 2, \dots, \pm(2n-2)$) que, según (3.33b), producen en (3.34) y (3.35) $4n-2$ valores distintos de b . Obviamente a partir de lo anterior, concluimos que el valor que falta es el que corresponde a $(a+i) = 2n-1$ ó $(a+j) = -(2n-1) = 2n \bmod m$, es decir $b = a$. Entonces para alcanzar el correspondiente vértice $a; y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$ basta considerar m pasos del tipo (3.23a) o (3.23b) de forma similar a la del caso 2) de la demostración del Teorema 3.7.2.

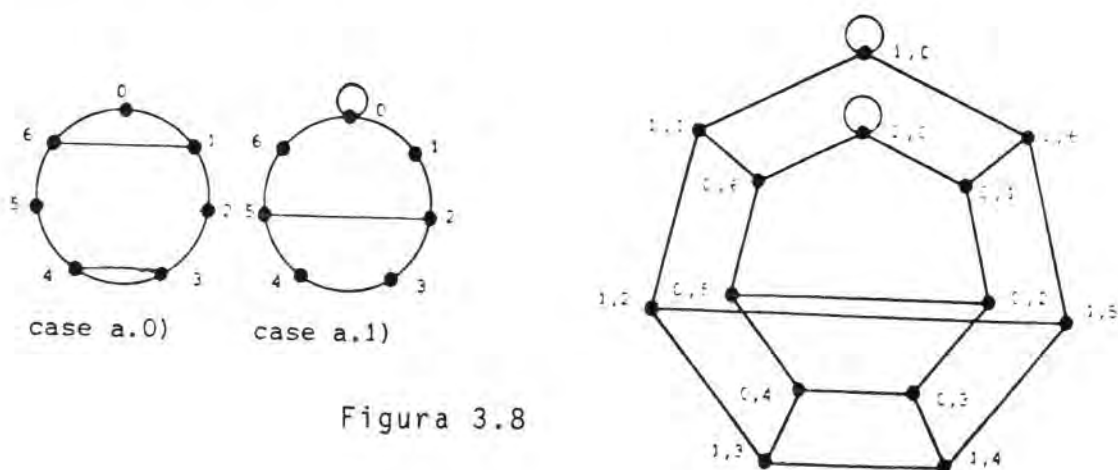


Figura 3.8

Los casos b.0) y b.1) son análogos a a.0) y a.1) respectivamente.

Ahora, cuando $m = 4n - 1$, obtenemos un nuevo grafo uniendo dos copias del grafo que resulta en el caso a.1) de acuerdo con las condiciones de adyacencia del tipo (3.23c) que se aplican en a.0), y similarmente cuando $m = 4n + 1$. Más concretamente, y volviendo al caso general, los grafos $Z_{\{m,d,k\}}^2$ tienen el conjunto de vértices $Z_2 \times Z_m \times X^k$, donde m es un entero impar y $k = \dot{m} + 1$. Así, cada vértice se define mediante una secuencia $\alpha, a; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k$ con $\alpha \in Z_2$, $a \in Z_m$ y $x_i \in X$. Para definir las condiciones de adyacencia es necesario distinguir dos casos

a) Si $\underline{m = 4n - 1}$

$$\alpha, a; x_1 x_2 \dots x_k \sim \begin{cases} \alpha, a+1; x_2 \dots x_k x_{k+1}, & x_{k+1} \in X & (3.36a) \\ \alpha, a-1; x_0 x_1 \dots x_{k-1}, & x_0 \in X & (3.36b) \\ \alpha, -a; x_1 x_2 \dots x_k & \text{si } a = 0, \pm 2, \dots, \pm(2n-2) & (3.36c) \\ \bar{\alpha}, -a; x_1 x_2 \dots x_k & \text{si } a = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2n-1) & (3.36d) \end{cases}$$

b) Si $\underline{m = 4n + 1}$

$$\alpha, a; x_1 x_2 \dots x_k \sim \begin{cases} \alpha, a+; x_2 \dots x_k x_{k+1}, & x_{k+1} \in X & (3.37a) \\ \alpha, a-1; x_0 x_1 \dots x_{k-1}, & x_0 \in X & (3.37b) \\ \bar{\alpha}, -a; x_1 x_2 \dots x_k & \text{si } a = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2n-1) & (3.37c) \\ \alpha, -a; x_1 x_2 \dots x_k & \text{si } a = 0, \pm 2, \dots, \pm 2n & (3.37d) \end{cases}$$

La Figura 3.7b muestra los cambios de los dígitos α, a inducidos por las condiciones de adyacencia (3.36) en el caso $m = 7$.

A partir de lo anterior, resulta que los grafos $Z^2_{\{m,d,k\}}$, $k = m - 1$, tienen orden $N = 2md^k$ y grado $\Delta = 2d + 1$.

Teorema 3.7.3: El grafo $Z^2_{\{m,d,k\}}$, $k = m - 1$, tiene diámetro $D = k + 1$.

Demostración:

La demostración de este resultado es consecuencia directa del Lema 3.7.1 y de la forma en que $Z^2_{\{m,d,k\}}$ ha sido construido a partir de dos copias de los grafos allí considerados. Genéricamente denotaremos estas copias por $Z - E_i$. De hecho, la existencia de un camino de longitud $(k+1)$, entre cualquier par de vértices x e y , se deriva de los casos a.1) y b.1) [a.0) y b.0)] considerados en la demostración de tal lema, si ambos vértices pertenecen a la misma copia [distinta] copia de $Z - E_i$.

Las dos particularizaciones más interesantes de este teorema son las siguientes.

Cuando $k = m - 1$, los grafos $Z^2_{\{m,d,m-1\}}$ tienen diámetro y grado impares, y su orden es

$$N = 2D \left(\frac{\Delta - 1}{2} \right)^{D-1} \quad (3.38)$$

Cuando $k = 2m - 1$, obtenemos los grafos $Z^2_{\{m,d,2m-1\}}$ con diámetro par, grado impar y número de vértices

$$N = D \left(\frac{\Delta - 1}{2} \right)^{D-1} \quad (3.39)$$

Al igual que sucedía con los grafos de tipo C_s , los grafos de tipo Z admiten una generalización basada en el

empleo de otros modelos de cambio para los elementos de X . Un buen resultado es el obtenido al considerar el grafo Z_p^2 derivado del grafo $C_p(2k+1, q, k)$ como se explica a continuación.

El grafo $Z_p^2(2k+1, q, k)$ tiene el conjunto de vértices $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2k+1} \times (P'_q)^k$, con q una potencia de un primo, de manera que su orden es $N = 2(2k+1)(q^2+q+1)^k$. Las condiciones de adyacencia se definen de la forma esperada a partir de (3.20), (3.36) y (3.37), resultando grafos con grado impar $\Delta = 2(q+1)+1$. El diámetro de $Z_p^2(2k+1, q, k)$ viene dado por el siguiente resultado cuya demostración omitimos porque se puede obtener fácilmente a partir de las consideraciones previas.

Teorema 3.7.4: El grafo $Z_p^2(2k+1, q, k)$ tiene diámetro diámetro $D = 2k + 1$.

Así, los grafos resultantes tienen grado impar $\Delta = 2(q+1)+1$, q = potencia de primo, diámetro impar $D = k+1$ y número de vértices

$$N = 2D \left[\left(\frac{\Delta-1}{2} \right)^2 - \left(\frac{\Delta-1}{2} \right) + 1 \right]^{\frac{D-1}{2}} = 2D \left(\frac{\Delta-1}{2} \right)^{D-1} + \dots \quad (3.40)$$

3.8 GRAFOS $T(d, k)$

En esta sección usamos varias ideas implicadas en las construcciones precedentes para obtener una nueva familia de grafos para (cualesquiera) valores impares de Δ y D .

Sea $|X| = d+1$ y consideremos el grafo $T(d, k)$, k impar, cuyos vértices se representan por las secuencias

$$a; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k, \quad a \in \mathbb{Z}_2, \quad x_i \in X \\ x_{i+1} \neq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

Así, $T(d, k)$ tiene $N = 2(d+1)d^{k-1}$ vértices.

Para definir las condiciones de adyacencia consideremos las aplicaciones

$$\pi(a; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k) = \bar{a}; x_k x_{k-1} \dots x_2 x_1 \quad (3.41)$$

$$r(a; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k) = \bar{a}; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k \quad (3.42)$$

(recordar que $\bar{a} = a + 1$), y sea ϕ cualquiera de las d aplicaciones.

$$\phi(a; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k) = \bar{a}; x_0 x_1 \dots x_{k-2} x_{k-1} \quad (3.43)$$

para las diferentes elecciones de $x_0 \in X$, $x_0 \neq x_1$.

Notar que con estas definiciones

$$\phi^{-1}(a; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k) = \bar{a}; x_2 x_3 \dots x_k x_{k+1}$$

$\pi^2 = 1$ (identidad), y r conmuta con π , ϕ y ϕ^{-1} . Además, tenemos que $\pi\phi\pi = \phi^{-1}$. En efecto

$$\begin{aligned} \pi\phi\pi(a; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k) &= \pi\phi(\bar{a}; x_k x_{k-1} \dots x_2 x_1) \\ &= \pi(\bar{a}; x_{k+1} x_k \dots x_3 x_2) \\ &= \bar{a}; x_2 x_3 x_4 x_5 \dots x_k x_{k+1} \\ &= \phi^{-1}(a; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k) \end{aligned}$$

Ahora cualquier vértice $x = a; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k$ del grafo $T(d, k)$ se define como adyacente a los $\Delta = 2d+1$ vértices

$$\pi^a \phi \pi(x), \pi^a \phi(x), r(x) \quad (3.44)$$

Es decir, si $\underline{a = 1}$

$$\begin{aligned} \pi \phi \pi(x) &= \phi^{-1}(x) = 0; x_2 x_3 \dots x_k x_{k+1} \\ \pi \phi(x) &= 1; x_{k-1} x_{k-2} \dots x_0 \\ r(x) &= 0; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k \end{aligned} \quad (3.45)$$

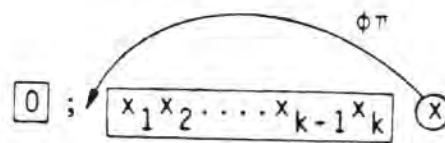
y, si $\underline{a = 0}$ ($\pi^0 = 1$)

$$\begin{aligned} \phi \pi(x) &= 0; x_{k+1} x_k \dots x_3 x_2 \\ \phi(x) &= 1; x_0 \dots x_{k-2} x_{k-1} \\ r(x) &= 0; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k \end{aligned} \quad (3.46)$$

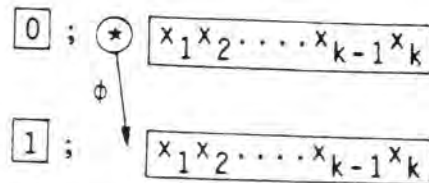
Como consecuencia de la condición $x_i \neq x_{i+1}$ todos estos vértices son distintos. Además, x no es adyacente a si mismo porque, en caso contrario, tendríamos que

$$x = 0; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k = 0; x_{k+1} x_k \dots x_3 x_2 = \phi \pi(x)$$

suponiendo $a = 0$ (el caso $a = 1$ es similar) y, en particular, $\frac{x_{k+1}}{2} = \frac{x_{k+3}}{2}$ contradiciendo la mencionada condición. Así, el grafo $T(d, k)$, con $N = 2 \left(\frac{\Delta-1}{2} \right)^k + 2 \left(\frac{\Delta-1}{2} \right)^{k-1}$ vértices, es Δ -regular. Para demostrar que su diámetro es $D = k$, resulta conveniente representar mediante un diagrama la forma en que las condiciones de adyacencia actúan sobre las secuencias. Suponiendo como antes $a = 0$, notar que la "transformación" $\phi \pi$ añade un nuevo dígito a la derecha y da la vuelta a la secuencia conservando a . Esto puede ser representado por



Por otro lado, la transformación ϕ añade un dígito a la izquierda y cambia a de 0 a 1. Esto puede ser representado por



Completando el diagrama con las transformaciones análogas $\pi\phi$, ϕ^{-1} y la trivial r , obtenemos la Figura 3.9

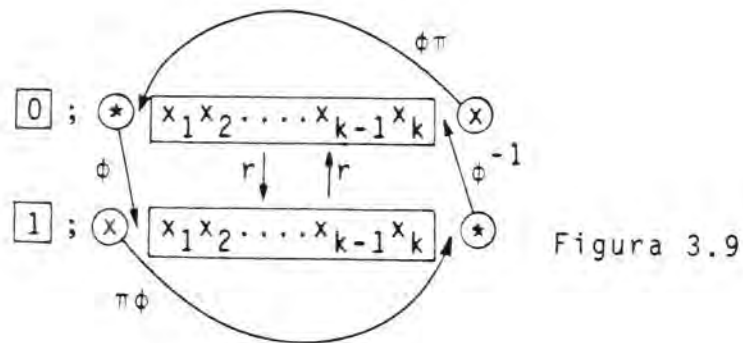


Figura 3.9

El dibujo muestra la simetría de las condiciones de adyacencia que corresponde al isomorfismo π en $T(d, k)$.

Asimismo, podemos ver que la adición de sucesivos dígitos para formar una secuencia dada, (correspondiente a un encaminamiento en el grafo) sólo se realiza cuando las condiciones de adyacencia se aplican según el orden circular, sentido contrario a las agujas del reloj, mostrado en la Figura 3.8. De especial interés son los efectos producidos por las "rotaciones completas":

$$(\phi \pi)(\pi \phi \pi)(\pi \phi)(\phi) = \phi^4 \quad (3.47)$$

$$(\pi \phi \pi)(\pi \phi)(\phi)(\phi \pi) = \pi \phi^4 \pi = \phi^{-4} \quad (3.48)$$

comenzando ambas desde un vértices con $a=0$)

Teorema 3.8.1: El grafo $T(d,k)$ tiene diámetro $D = k$.

Demostración:

Probaremos que entre cualquier par de vértices, x e y , existe un camino de longitud k ó $k-1$. Debido al automorfismo π , el vértice origen puede fijarse. Entonces con la notación

$$x = 0; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k$$

$$y^0 = 0; y_1 y_2 \dots y_{k-1} x_k$$

$$y^1 = 0; y_1 y_2 \dots y_{k-1} y_k$$

es necesario distinguir los seis siguientes casos

a) $k = 4n + 1$

$$a.1) \quad x_1 = y_k.$$

$$a.2.1) \quad x_1 \neq y_k, \quad x_k = y_k.$$

$$a.2.2) \quad x_1 \neq y_k, \quad x_k \neq y_k.$$

b) $k = 4n + 3$

$$b.1) \quad x_1 = y_1.$$

$$b.2.1) \quad x_1 \neq y_1, \quad x_k = y_1.$$

$$b.2.2) \quad x_1 \neq y_1, \quad x_k \neq y_1.$$

Veamos como, en cada caso, la aplicación de k o $k-1$ funciones de adyacencia adecuadas transforman el vértice x en y^0 o y^1 :

$$a.1) \quad k = 4n + 1, \quad x = 0; y_k x_2 \dots x_{k-1} x_k.$$

En $k - 1 = 4n$ pasos, tenemos (recordar (3.47)):

$$\phi^{4n}(x) = y^0; y, \text{ en } k \text{ pasos, } r\phi^{4n}(x) = y^1.$$

$$a.2.1) \quad k = 4n + 1, \quad x = 0; x_1 x_2 \dots x_{k-1} y_k, \quad x_1 \neq y_k$$

De forma similar, en k pasos, $\phi\phi^{4n}(x) = y^1$. Alcanzar y^0 , también en n pasos, es un poco más complicado. Usando las diferentes propiedades de las condiciones de adyacencia obtenemos en k pasos:

$$(\phi\pi)r(\pi\phi)\phi(\phi\pi)\phi^{-4(n-1)}(x) =$$

$$r\pi(\pi\phi^4\pi)\phi^{-4(n-1)}(x) =$$

$$r\pi\phi^{-4n}(x) = y^0$$

$$a.2.2) \quad k = 4n + 1, \quad x = 0; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k, \quad x_1 \neq y_k, \quad x_k \neq y_k.$$

Como en el caso anterior, y se obtiene fácilmente: $\phi\phi^{4n}(x) = y^1$. Además

$$(\phi\pi)\phi^{-4n}(x) =$$

$$(\phi\pi)\pi\phi^{4n}\pi(x) =$$

$$\phi^{4n+1}\pi(x) = y^0$$

Los otros tres casos son similares y sus correspondientes igualdades autoexplicativas:

$$b.1) \quad k = 4n + 3, \quad x = 0; y_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k$$

$$(\pi\phi)\phi\phi^{4n}(x) =$$

$$\pi\phi^{4n+2}(x) = y^1,$$

$$r\pi\phi^{4n+2}(x) = y^0$$

b.2.1) $k = 4n + 3$, $x = 0; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k$, $x_1 \neq y_1$,

$$(\pi \phi \pi)(\pi \phi) \phi^{4n}(x) =$$

$$\pi \phi^{4n+3}(x) = y^0,$$

$$(\pi \phi)r(\phi \pi) \phi^{-4n}(x) =$$

$$r \phi^{-(4n+2)}(x) = y^1.$$

b.2.2) $k = 4n+3$, $x = 0; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k$, $x_1 \neq y_1$, $x_k \neq y_1$.

y^0 se obtiene como en el caso anterior . Y

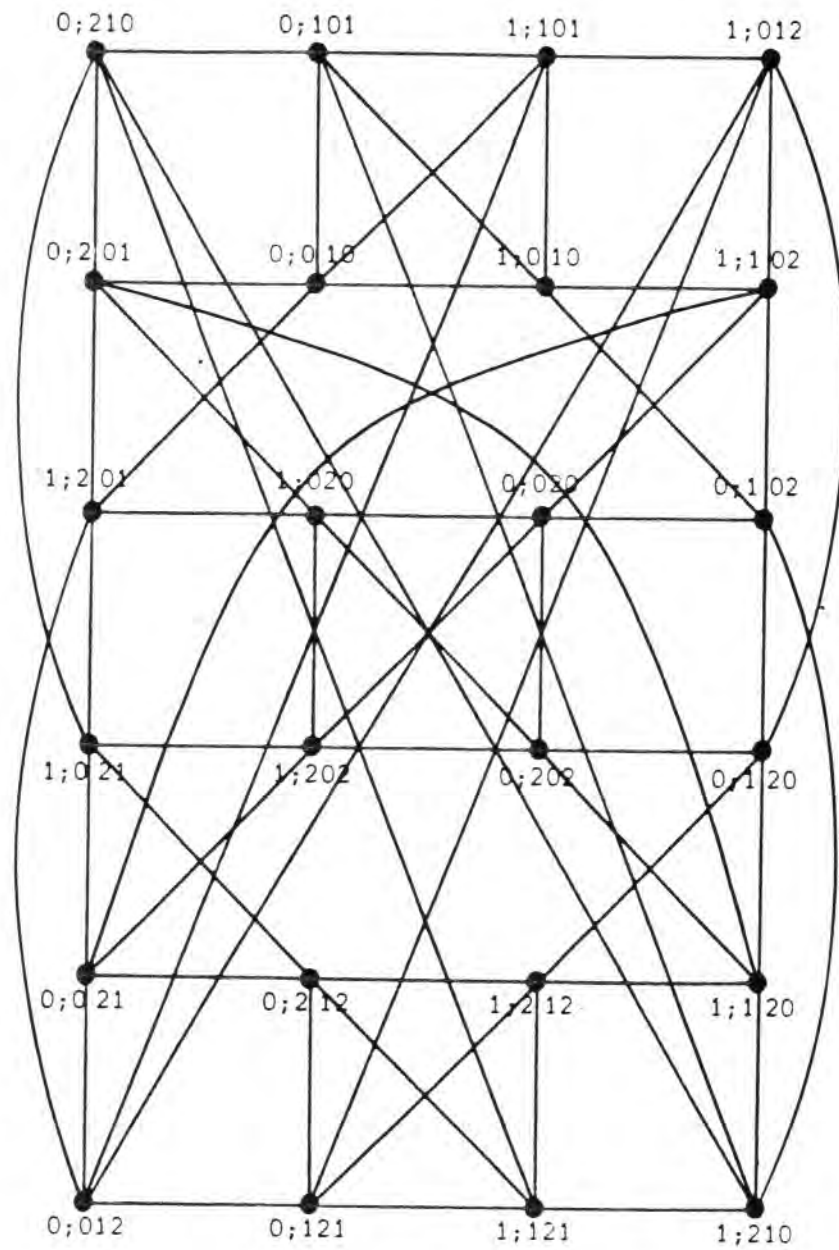
$$(\pi \phi) \phi(\phi \pi) \phi^{-4n}(x) = \phi^{-(4n+3)}(x) = y^1.$$

De acuerdo con este resultado, hemos construido grafos regulares con grado Δ y diámetro impares con

$$N = 2 \left(\frac{\Delta-1}{2} \right)^D + 2 \left(\frac{\Delta-1}{2} \right)^{D-1} \quad (3.49).$$

vértices. La Figura 3.10 muestra el grafo $T(2,3)$.

Figura 3.10



3.9 CONCLUSIONES

En este capítulo se han presentado diversas familias infinitas de grafos densos para diversos valores del grado y diámetro. Es notable que, hasta hace poco, sólo se conocían dos de tales familias infinitas, a saber los grafos de Good-de Bruijn y los de Kautz, ambas con grado par. La siguiente relación resume las mejores familias descritas en este trabajo.

Cuando Δ es par y D es impar los grafos de Delorme alcanzan $N = 2(\Delta/2)^D$.

Cuando Δ y D son pares, tanto los grafos de Kautz como los de Bond tienen $N = (\Delta/2)^D + (\Delta/2)^{D-1}$. Este valor puede ser mejorado si $\Delta = 2(q+1)$, con q una potencia de un primo y $D \equiv 2$ ó 4 módulo 6, con los grafos $C_p(3,q,k)$ que tienen $N = 3[(\Delta/2)^2 - (\Delta/2) + 1]^{D/2}$ vértices.

Cuando Δ es impar y D es par las mejores familias son

- Grafos de Bond $S(d,d,k)$, $N = \left(\frac{\Delta+D+1}{2}\right)\left(\frac{\Delta-1}{2}\right)^{D-1} + \dots$
- Grafos $Z^2(m,d,m-1)$, $N = D\left(\frac{\Delta-1}{2}\right)^{D-1}$

dependiendo de los valores particulares de Δ y D .

Finalmente, cuando Δ y D son impares las mejores familias son

$$- \text{ Grafos } T(d, k), N = (\Delta + 1) \left(\frac{\Delta - 1}{2} \right)^{D-1}$$

$$- \text{ Grafos } Z^2_{\{m, d, m-1\}}, N = 2D \left(\frac{\Delta - 1}{2} \right)^{D-1}$$

y cuando $D \equiv 1 \pmod{4}$

$$- \text{ Grafos } T(d, d+1, k), N = (\Delta + D - 1) \left(\frac{\Delta - 1}{2} \right)^{D-1} + \dots$$

Naturalmente, todas estas familias completamente generales y para ciertos valores concretos de Δ y/o D (principalmente para valores pequeños) existen construcciones particulares que mejoran los resultados anteriores, ver por ejemplo [6], [36] y [46].

La búsqueda de grafos densos parece ser un problema difícil de resolver en general. Mientras que los digrafos de Good-de Bruijn y principalmente los digrafos de Kautz son digrafos densos muy buenos, con órdenes de magnitud muy próximos a la cota de Moore (3.1), las mejores familias conocidas de grafos densos todavía están lejos de su respectiva cota (1.2).

CAPITULO IV

VULNERABILIDAD EN GRAFOS.

EL PROBLEMA $(\Delta, D, D, 1)$

4.1 INTRODUCCION

Los dos capítulos anteriores se dedicaron al estudio del problema (Δ, D) , o construcción de grafos densos como modelos de redes de interconexión con reducido retraso en la transmisión de los mensajes ("message delay").

Otro importante parámetro a tener en cuenta en el diseño de tales redes es el de *fiabilidad* o *tolerancia a fallos* ("fault tolerance"). La evaluación de este parámetro puede hacerse bajo distintos criterios. En este trabajo nos centraremos en el que exige que, en caso de fallo de $s \geq 1$ nodos, la comunicación entre los restantes siga siendo posible sin excesivo menoscabo en el retraso de los mensajes. Así pues, en términos de grafos, lo que interesa es hallar grafos (Δ, D) cuyo diámetro sea *poco vulnerable* en el sentido de que, al suprimirse s vértices, queden con diámetro D' , próximo a D . Como se comentó en el Capítulo I, a estos grafos se les conoce como grafos (Δ, D, D', s) .

En este capítulo y en el siguiente se trata el *problema* $(\Delta, D, D', 1)$ (caso de fallo de 1 vértice) o estudio y diseño de tales grafos con mayor número de vértices. Probablemente, este es el caso más interesante y, de hecho, hasta el momento es el que ha merecido una mayor atención en la literatura sobre el tema. Más concretamente, en este capítulo se estudia el caso en que el diámetro permanece invariable, o problema $(\Delta, D, D, 1)$, a cuyo estudio Bond y Peyrat, [10], [48], realizaron varias contribuciones entre las que nos interesa citar las siguientes:

- a) La obtención de la cota para el número máximo de vértices de un grafo $(\Delta, D, D, 1)$ 2-conexo, cuyo valor es

$$N \leq 1 + \Delta \frac{(\Delta-1)^{D-1} - 1}{\Delta-2} + \frac{(\Delta-2)\Delta(\Delta-1)^{D-2}}{2}, \quad D \geq 3 \quad (4.1a)$$

$$N \leq \frac{\Delta^2 + \Delta + 2}{2}, \quad D = 2 \quad (4.1b)$$

- b) La construcción, a partir de cualquier grafo G con N vértices, grado Δ y diámetro D , de un grafo $(2\Delta, D, D, 1)$, G' , con $2N$ vértices, mediante la "duplicación" de los vértices de G y la sustitución de sus ramas por las del grafo $K_{2,2}$, ver Figura 4.1

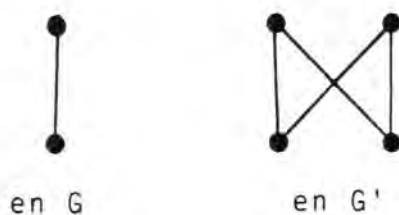


Figura 4.1

- c) La siguiente proposición (ver Prop. 3.1, Cap. III en [10]), que usaremos varias veces en este capítulo:

Proposición 4.1

Sea G un digrafo conexo tal que para cada par de vértices $x, y \in G$ se verifica $|\Gamma^+(x) \cap \Gamma^+(y)| \neq 1$ y $|\Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(y)| \neq 1$, y sea $U(G)$ su grafo asociado (digrafo suprimiendo direcciones). Entonces, para cualquier vértice z de $U(G)$ se cumple

$$D(U(G) - z) \leq D(G)$$

Su demostración se basa, en que al convertir un digrafo G de diámetro k en su grafo asociado, $U(G)$, aparecen dos caminos entre cualquier par de vértices, x e y , de longitud $\leq k$ que usan únicamente las adyacencias r^+ (siguiendo el sentido de los arcos de G) en un caso y r^- en el otro. Por tanto al suprimir un vértice, z , de $U(G)$ el grafo resultante podría tener mayor diámetro que G solamente si z estuviera contenido en los dos caminos. Sin embargo, en esta situación usando las hipótesis es fácil comprobar que existe siempre un circuito de longitud $\leq 2k$ que contiene a x e y y no a z .

- d) Usando la proposición anterior los citados autores probaron que los grafos de Kautz [45] y Good-de Bruijn [14], con grado Δ par, (ver también Sección 3.2) son grafos $(\Delta, D, D, 1)$. Asimismo, también propusieron una adición de vértices a tales grafos, obteniendo grafos $(\Delta, D, D, 1)$, Δ impar, con

$$N = \left(\frac{\Delta+1}{2}\right) \left(\frac{\Delta-1}{2}\right)^{D-1} + \left\lfloor \frac{\Delta-1}{2} \right\rfloor \left(\frac{\Delta+1}{2}\right) \left(\frac{\Delta-1}{2}\right)^{D-3} \quad (4.2)$$

vértices.

Referente al contenido de este capítulo, en la Sección 4.2 se define una familia de grafos $(\Delta, D, D, 1)$ para $\Delta = 4n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Seguidamente, en las Secciones 4.3 y 4.4 se presentan varios tipos de grafos compuestos cuyas estructuras de interconexión son parecidas a las de los grafos DQ_Δ y $B_0 \nabla B_1$. En las Secciones 4.5 y 4.6 se definen sendos productos de

grafos bipartitos. Posteriormente, en la Sección 4.7 se muestra un grafo $(7,2,2,1)$ obtenido mediante técnicas de composición de grafos (árboles) análogas a las usadas en [53] y, por último, en la Sección 4.8 se muestra la tabla de mayores grafos $(\Delta, D, D, 1)$ conocidos, que incluye todos los valores derivados de las construcciones propuestas en este capítulo.

4.2 GRAFOS $P(d,k)$

En esta sección presentamos una nueva familia de grafos sobre alfabeto de grado $\Delta = 4d+1$, $d \in \mathbb{N}$ para cualquier D que, aunque tienen menor número de vértices que los grafos de Bond para D par [10] y que los grafos $T(n,d)$ [39] y bisequencia [35] (véase también Secciones 3.4, 3.5 y 3.8), posee la característica de ser una familia de grafos $(4d+1, D, D, 1)$.

Un vértice genérico x del grafo $P(d,k)$ es de la forma

$$x = \alpha, a; x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k$$

$$\alpha \in \{0,1\} \cong \mathbb{Z}_2, a \in A = \{0,1,\dots,d\} \cong \mathbb{Z}_{d+1}, x_i \in B = \{0,1,\dots,2d-1\}$$

y es adyacente a los vértices

$$\alpha + x_{k+1}, a + 1 + \left\lfloor \frac{x_{k+1}}{2} \right\rfloor; x_2 x_3 \dots x_k x_{k+1} \quad (4.3a)$$

$$\alpha - x_k, a - 1 - \left\lfloor \frac{x_k}{2} \right\rfloor; x_0 x_1 \dots x_{k-2} x_{k-1} \quad (4.3b)$$

$$\bar{\alpha}, a; x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-2} x_{k-1} x_k \quad (4.3c)$$

El grafo así construido, con grado $\Delta = 4d+1$, tiene

$$N = 2(d+1)(2d)^k \quad (4.4)$$

vértices y su diámetro viene dado por el siguiente resultado:

Teorema 4.2.1: El grafo $P(d,k)$ tiene diámetro $D = k + 1$.

Demostración:

Probaremos que entre cualquier par de vértices x e y existe un camino de longitud k o $k+1$. Para ello, usando la notación

$$x = \alpha, a; x_1 x_2 \dots x_k$$

$$y = \beta, b; y_1 y_2 \dots y_k$$

es necesario distinguir los siguiente casos

$$a) \ b = a + k + Y_1, \quad Y_1 = \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{y_i}{2} \right\rfloor$$

$$a.1) \ \beta = \alpha + Y_0, \quad Y_0 = \sum_{i=1}^k y_i$$

$$a.2) \ \beta = \bar{\alpha} + Y_0$$

$$b) \ b = a + k + 1 + Y_1 + s, \ \beta = \alpha + \gamma + Y_0, \ s \in \{0, 1, \dots, d-1\}, \ \gamma \in \mathbb{Z}_2$$

(las operaciones son mod $d+1$ ó mod 2 según corresponda)

$$a.1) \ b = a + k + Y_1, \ \beta = \alpha + Y_0.$$

Desde x, y en k pasos, aplicando únicamente la condición de adyacencia (4.3a) se llega al vértice destino

$$\alpha + Y_0; a + k + Y_1, y_1 y_2 \dots y_k = y$$

$$a.2) \quad b = a + k + Y_1, \quad B = \bar{a} + Y_0.$$

En esta situación existen $k+1$ caminos de longitud $k+1$ que emplean únicamente las adyacencias (4.3a) y (4.3c). Desde x y en j pasos, $0 \leq j \leq k$, del tipo (4.3a) vamos al vértice

$$\alpha + \sum_{i=1}^j y_i, \alpha + j + \sum_{i=1}^j \left\lfloor \frac{y_i}{2} \right\rfloor; x_{j+1} \dots x_k y_1 \dots y_j$$

desde él, y en un paso, según (4.3c), alcanzamos el vértice

$$\bar{\alpha} + \sum_{i=1}^j y_i, \alpha + j + \sum_{i=1}^j \left\lfloor \frac{y_i}{2} \right\rfloor; x_{j+1} \dots x_k y_1 \dots y_j$$

el cual está, según (4.3a), a $k-j$ pasos del vértice destino

$$\bar{\alpha} + Y_0; \alpha + k + Y_1; y_1 y_2 \dots y_k = y$$

$$b) \quad b = a + k + 1 + Y_1 + s, \quad B = \alpha + \gamma + Y_0$$

Desde x, y en un paso del tipo (4.3a), vamos al vértice

$$\begin{aligned} & \alpha + 2s + \gamma, \alpha + 1 + \left\lfloor \frac{2s + \gamma}{2} \right\rfloor; x_2 x_3 \dots x_k 2s + \gamma = \\ & = \alpha + \gamma, \alpha + 1 + s; x_2 x_3 \dots x_k 2s + \gamma \end{aligned}$$

el cual está a k pasos del tipo (4.3a) del vértice destino

$$\alpha + \gamma + Y_0, \alpha + k + 1 + s + Y_1; y_1 y_2 \dots y_k = y$$

Por tanto el orden del grafo $P(d, k)$ es

$$N = \left(\frac{\Delta + 3}{2} \right) \left(\frac{\Delta - 1}{2} \right)^{D-1} \quad (4.5)$$

La Figura 4.2 muestra el grafo $P(1,2)$

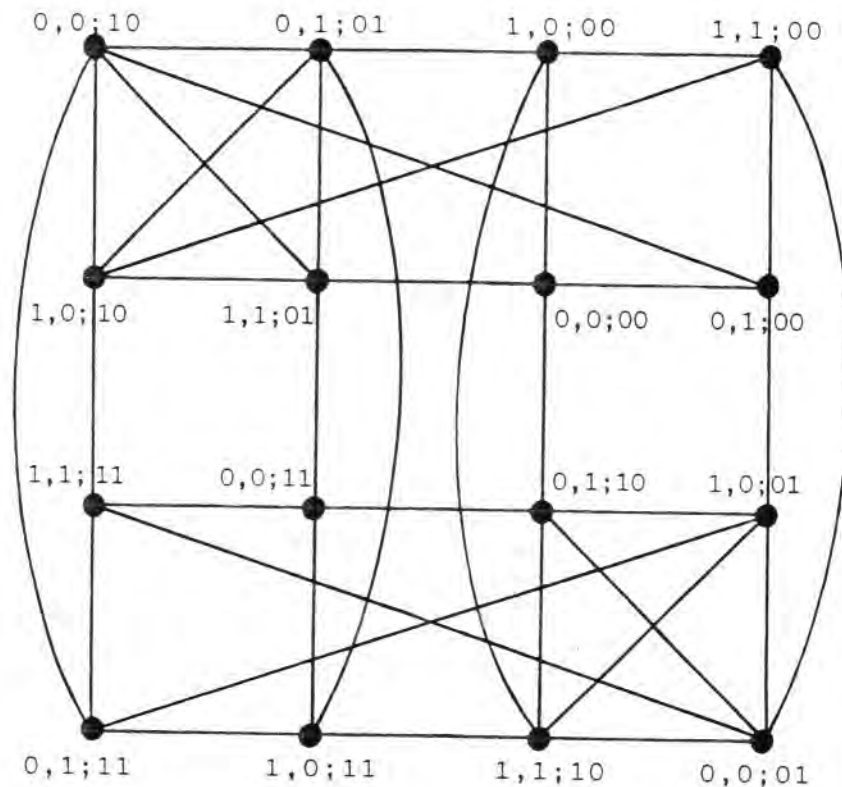


Figura 4.2

Teorema 4.2.2: El grafo $P(d,k)$ es un grafo $(\Delta, D, D, 1)$.

Demostración:

Los grafos $P(d,k)$ pueden verse como grafos asociados a los digrafos con grado $2d+1$ y cuyas condiciones de adyacencia vienen dadas por (4.3a) y (4.3c). Además, según la demostración del Teorema 4.2.1 es evidente que tales digrafos tienen diámetro $D = k + 1$, por tanto en la demostración podemos utilizar la Proposición 4.1. La única situación no contemplada por tal proposición es cuando, por lo menos, uno de los caminos que unen los vértices x e y es de la forma dada en el caso a.2) de la demostración del Teorema 4.2.1.

Como se comentó, en dicha situación (caso a.2)) existen entre x e y $k+1$ caminos de longitud $k+1$ que emplean k pasos

del tipo (4.3a) y uno del tipo (4.3c). En la Figura 4.3 se simbolizan dichos caminos (la adyacencia (4.3c) se simboliza mediante una rama, es decir, sin dirección), donde a los vértices se les ha cambiado la notación por comodidad de nomenclatura. Ahora, a los vértices se les denota por (α, s_j) , donde $\alpha = 0$ indica que no se ha usado, desde x al vértice en cuestión, el paso dado por (4.3c), y el subíndice de s denota el número de pasos (4.3a) que se han empleado desde el vértice origen a dicho vértice.

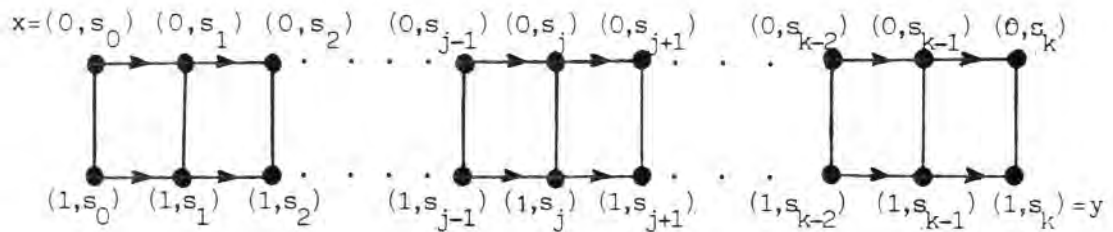


Figura 4.3

El vértice suprimido, z , puede aparecer varias veces en los caminos que unen x con y , sin embargo, se puede probar fácilmente que si $z = (\alpha, s_j)$ entonces $z \neq (\alpha, s_{j-1}), (\alpha, s_{j+1}), (\bar{\alpha}, s_{j-1}), (\bar{\alpha}, s_j), (\bar{\alpha}, s_{j+1})$.

Sean $(\alpha, s_1), (\beta, s_m), \dots, (\gamma, s_n), 1 < m < \dots < n$, los vértices que coinciden con z . Un camino que une x con y no contiene z de longitud $< D$, suponiendo $\alpha = 0$ y $\gamma = 1$ (los otros casos son similares), es

$$x = (0, s_0), (0, s_1), \dots, (0, s_{l-1}), (1, s_{l-1}), \\ (1, s_l) = (0, s_n), (0, s_{n-1}), \dots, (0, s_k), (1, s_k) = y$$

4.3 GRAFOS $G \overset{1}{\Delta} B$ y $B_0 \overset{1}{\nabla} B_1$

En esta sección y la siguiente trataremos dos tipos de grafos compuestos parecidos a los grafos DQ_Δ y $B_0 \overset{1}{\nabla} B_1$, que son grafos $(\Delta, D, D, 1)$.

La estructura básica de interconexión de los grafos DQ_Δ (véase Sección 2.6) se muestra en la Figura 4.4.

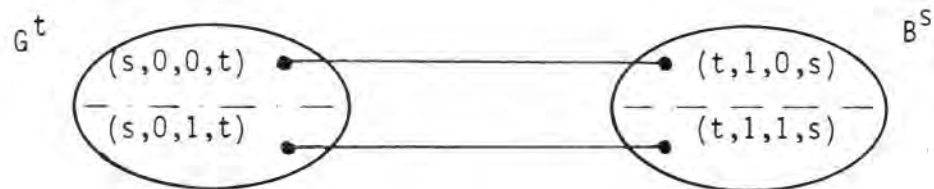


Figura 4.4

Los casos más interesantes desde el punto de vista de diseño de grafos $(\Delta, D, D, 1)$ se obtienen cuando, tanto desde los vértices de las copias de G como de los de B parten pocas ramas intercopia. Estas situaciones están indicadas en (4.6)

$$\Delta = \max \{ \Delta_G + 1, \Delta_1 + 1 \} \quad (4.6a)$$

$$\Delta = \max \{ \Delta_G + 2, \Delta_1 + 1 \} \quad (4.6b)$$

La ecuación (4.6a) se satisface cuando de cada vértice de G y de B parte una única rama intercopia; mientras que la igualdad (4.6b) se obtiene cuando de cada vértice de G [B] parten exactamente 2 [1] ramas intercopia. El número de vértices de dichos grafos vienen dados respectivamente por

$$N_{DQ_\Lambda} = N_G N_B \quad (4.7a)$$

$$N_{DQ_\Lambda} = \frac{3}{2} N_G N_B \quad (4.7b)$$

La estructura básica de los grafos $B_0 \nabla B_1$ (véase Sección 2.7) se muestra en la Figura 4.5.

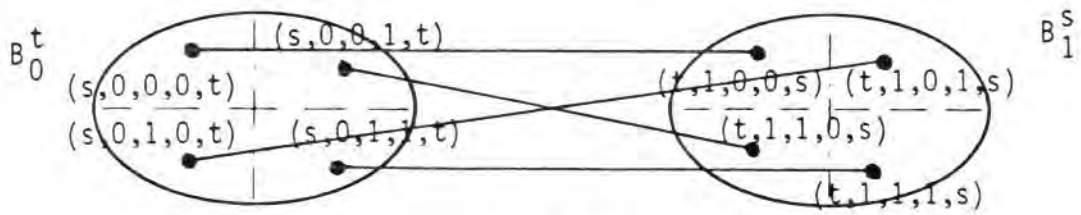


Figura 4.5

Desde nuestro punto de vista, también en este caso los mejores grafos $B_0 \nabla B_1$ son los que resultan con grado

$$\Delta = \max \{ \Delta_0 + 1, \Delta_1 + 1 \} \quad (4.8a)$$

$$\Delta = \max \{ \Delta_0 + 2, \Delta_1 + 1 \} \quad (4.8b)$$

El número de vértices en cada caso viene dado respectivamente por

$$N_{B_0 \nabla B_1} = \frac{N_0 N_1}{2} \quad (4.9a)$$

$$N_{B_0 \nabla B_1} = \frac{3}{4} N_0 N_1 \quad (4.9b)$$

Para construir la estructura básica de los grafos $G \Lambda^1 B$ se toman dos grafos DQ_Λ iguales (suponemos que éstos verifican (4.6b), los demás casos son similares). Al vértice $(s, 0, t) [(t, 1, j, s)]$ del grafo $p \in \{0, 1\}$ lo denotamos por $(s, 0, p, t) [(t, 1, j, p, s)]$ y entre ambos se establecen las nuevas condiciones de adyacencia

$$(s, 0, p, t) \sim (t, 1, j, \bar{p}, s), \quad j \in \{0, 1\} \quad (4.10a)$$

$$(s, 0, p, t) \sim (s, 0, \bar{p}, t) \quad (4.10b)$$

$$(t, 1, j, p, s) \sim (t, 1, j, \bar{p}, s) \quad (4.10c)$$

según muestra la Figura 4.6 (las ramas intercopia de DQ_Λ se han dibujado a trazos)

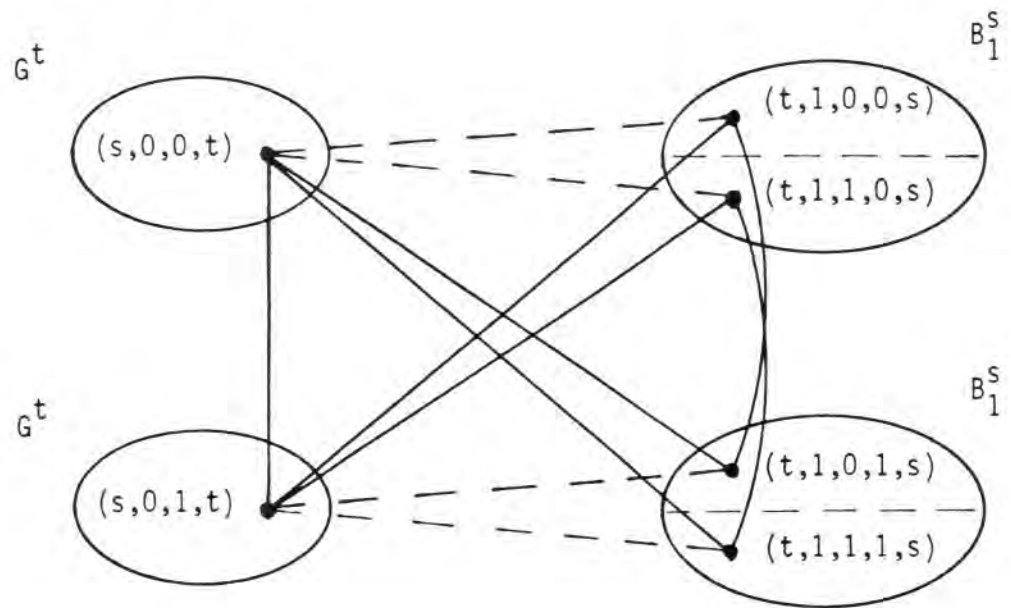


Figura 4.6

El grafo así construido con $N = N_{DQ_\Lambda}$ vertices tiene diámetro $D = D_{DQ_\Lambda}$.

Por analogía, la estructura básica de los grafos $B_0 \nabla^1 B_1$ se obtiene uniendo dos grafos $B_0 \nabla B_1$ según muestra la Figura 4.7.

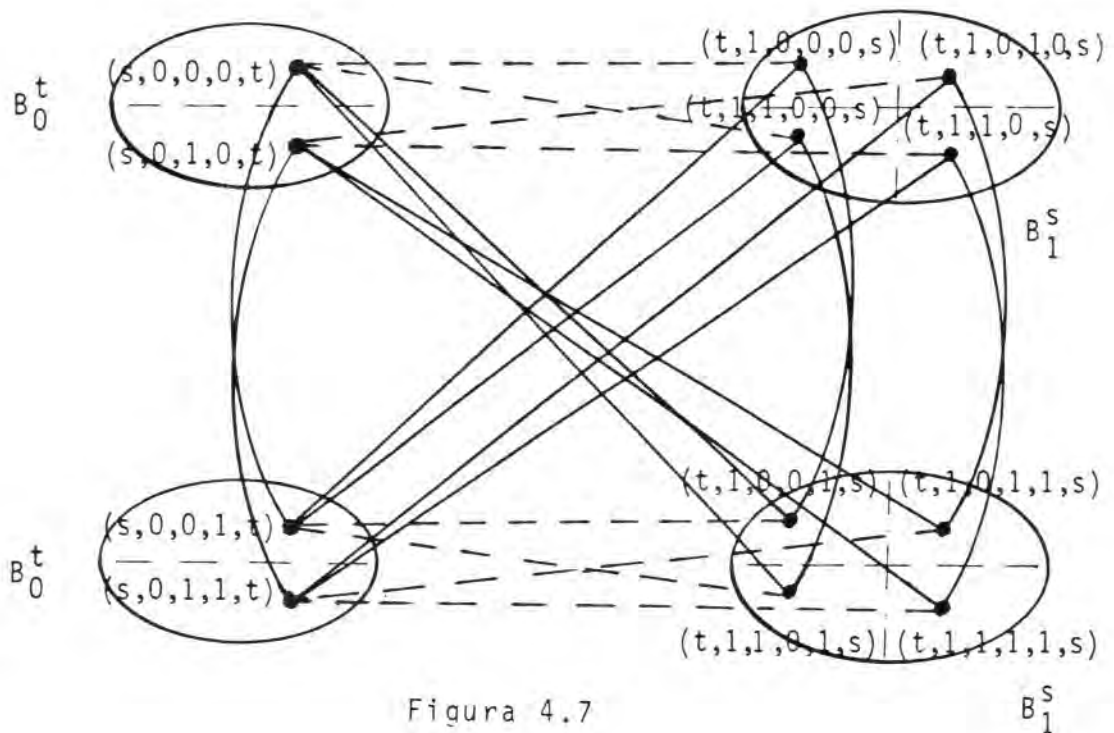


Figura 4.7

(donde se ha supuesto que los grafos $B_0 \nabla B_1$ empleados verifican 4.8). El grafo así construido, con $N = 2N_{B_0 \nabla B_1}$ vértices, tiene diámetro $D = D_{B_0 \nabla B_1}$.

Teorema 4.3.1: El grafo $G \wedge^1 B_0$ es un grafo $(\Delta, D, D, 1)$ si $D_G \geq 1$.

Demostración:

Sea $(z, 0, p, x)$ el vértice suprimido (el otro caso es análogo). En la demostración debemos considerar las siguientes situaciones:

- a) de $u = (s, 0, p, x)$ a $v = (t, 0, p, x)$
- b) de $u = (s, 0, p, x)$ a $v = (t, 0, r, y)$ $y \neq x$ ó $r \neq p$
- c) de $u = (s, 0, r, y)$ a $v = (t, 1, j, q, n)$ $y \neq x$ ó $r \neq p$
- d) de $u = (s, 0, p, x)$ a $v = (t, 1, j, r, n)$
- e) de $u = (s, 1, k, r, t)$ a $v = (w, 1, j, q, n)$

- a) Desde u y en un paso, según (4.10b), alcanzamos el vértice $(s, 0, \bar{p}, x)$, el cual está, como máximo, a D_G pasos de un vértice adyacente al vértice destino $v = (t, 0, p, x)$. Por tanto

$$d(u, v) = 1 + D_G + 1 = D_G + 2$$

- b) Partiendo de u , y en un paso, se llega a un vértice de una copia de B . Desde él y en $D_B - 1$ pasos alcanza un vértice adyacente a otro de la misma copia de v . Así pues

$$d(u, v) = 1 + (D_B - 1) + 1 + D_G = D_G + D_B + 1$$

- c) Por no pertenecer u a la copia del vértice suprimido, la distancia entre u y v viene dada por

$$d(u, v) = D_G + 1 + (D_B - 1) = D_G + D_B$$

- d) Desde u , y en un paso, vamos al vértice $(s, 0, \bar{p}, x)$. Desde él, y según el apartado anterior c) existe un camino de longitud $= D_G + D_B$ hacia v que no contiene al vértice anulado. Entonces

$$d(u, v) = 1 + D_G + D_B$$

- e) Desde u , y en un paso, podemos alcanzar un vértice de una copia que no contiene al vértice suprimido, $(t, 0, \bar{p}, s)$, desde el que existe un camino de longitud $D_G + D_B$ hacia el vértice destino que no contiene al vértice anulado. Así pues

$$d(u, v) = 1 + D_G + D_B$$

Por otro lado, el grafo $B_0 \nabla^1 B_1$ es también un grafo $(\Delta, D, D, 1)$. Se omite su demostración por ser similar a la del

teorema anterior.

Teorema 4.3.2: El grafo $B_0 \nabla^1 B_1$ es un grafo $(\Delta, D, D, 1)$ si $D_0, D_1 \geq 2$.

4.4 GRAFOS $G \Lambda^2 B$ Y $B_0 \nabla^2 B_1$

Un pequeño inconveniente que presentan los grafos de la sección anterior ($G \Lambda^1 B$ y $B_0 \nabla^1 B_1$) es que su grado verifica

$$\Delta \geq \max \{ \Delta_G + 3, \Delta_B + 3 \} \quad (4.11a)$$

si es un grafo $G \Lambda^1 B$ o

$$\Delta \geq \max \{ \Delta_0 + 3, \Delta_1 + 3 \} \quad (4.11b)$$

si es un grafo $B_0 \nabla^1 B_1$.

Para solventar, en parte, este problema presentamos en esta sección nuevos grafos compuestos que, bajo ciertas condiciones son grafos $(\Delta, D, D, 1)$, y mejoran algunos valores más de la correspondiente tabla.

La estructura básica del grafo $G \Lambda^2 B$ (véase Figura 4.4), suponiendo, por ejemplo, que un número *par* de copias de G y de B , se construye de la siguiente forma:

A cada copia $G [B]$ del grafo $G \Lambda B$ se le asocia su "pareja", que no es más que otra copia $G [B]$ del grafo $G \Lambda B$. Ahora se une cada vértice de cada copia con el correspondiente vértice de la copia asociada, según muestra la Figura 4.8.

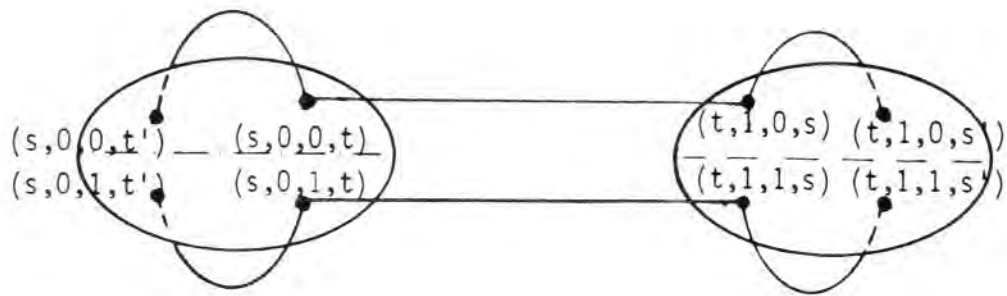


Figura 4.8

El grafo $B_0 \Lambda^2 B_1$ se construye de igual forma que los grafos $G \Lambda^2 B$, con la salvedad de que ahora el grafo de partida es el grafo $B_0 \nabla B_1$. Se puede comprobar, de forma análoga a como se hizo en el Teorema 4.3.1. que, en general, tanto los grafos $G \Lambda^2 B$ como los grafos $B_0 \nabla^2 B_1$ son grafos $(\Delta, D, D', 1)$, con $D' \leq D + 1$.

Veamos ahora algunas construcciones de grafos $G \Lambda^2 B$ y $B_0 \nabla^2 B_1$ que son grafos $(\Delta, D, D, 1)$. Los grafos $G \Lambda B$ que verifican la condición 1.1 ó 1.2, ó ambas simultáneamente (dichas condiciones se exponen seguidamente) son grafos $(\Delta, D, D, 1)$. Este resultado se demostrará en el Lema 4.4.1.

Condición 1.1

Se debe verificar

- D_B par ≥ 4
- $N_B = 4$
- $D_G \geq 2$
- $\Delta \geq \Delta_G + 1 + 2n$, $n \in \mathbb{N}$
- $\Delta \geq \Delta_B + 2$

(4.12a)

Condición 1.2

En este caso se debe cumplir

$$\begin{aligned}
 & - D_B \text{ par } \geq 4 \\
 & - N_B = \dot{4} \\
 & - D_G \geq 1 \\
 & - \begin{cases} \Delta \geq \Delta_G + 1 + 4n, n \in \mathbb{N} \text{ ó} \\ N_G \text{ par ó} \\ D_G \geq 2 \end{cases} \quad (4.12b) \\
 & - \Delta \geq \Delta_B + 2.
 \end{aligned}$$

Para los grafos $B_0 \nabla^2 B_1$ la situación más interesante, en que son grafos $(\Delta, D, D, 1)$, es la siguiente:

Condición 2.1

Se debe verificar

$$\begin{aligned}
 & - \begin{cases} N_0 = \dot{8} \text{ y } D_0 \geq 2 \text{ ó} \\ N_0 = \dot{4} \text{ y } \begin{cases} \Delta = \Delta_0 + 1 + 2n, n \in \mathbb{N}, \text{ ó} \\ D_0 \geq 3 \end{cases} \end{cases} \quad (4.13) \\
 & - N_1 = \dot{8} \\
 & - D_1 \geq 5
 \end{aligned}$$

Lema 4.4.1: El grafo $G \Lambda^2 B$ es un grafo $(\Delta, D, D, 1)$ si se cumple la condición 1.1 ó 1.2.

Demostración:

Se supone que el grafo $G \Lambda^2 B$ verifica lo siguiente: $D_B \text{ par } \geq 4$, $N_B = \dot{4}$, $D_G \geq 2$, $\Delta = \Delta_G + 3 = \Delta_B + 2$ y además se supone, por comodidad de nomenclatura, $N_G = \dot{2}$, (en los otros casos, las demostraciones son análogas).

Las condiciones de adyacencia, entre copias del mismo

y distinto tipo son, en este caso

$$(s, 0, t) \sim (t, 1, j, s)$$

$$(s, 0, t) \sim (s, 0, t'), \quad t' = 1 - 2(t \bmod 2) + t$$

$$(t, 1, j, s) \sim (t, 1, j, s'), \quad s' = 1 - 2(s \bmod 2) + s$$

Se supone que el vértice suprimido es de la forma $(z, 0, x)$ (el otro caso es similar). Las situaciones a considerar son:

- a) de $u = (s, 0, x)$ a $v = (t, 0, x)$
- b) de $u = (s, 0, y)$ a $v = (t, 0, w)$, $w \neq x$
- c) de $u = (s, 0, y)$ a $v = (q, 1, j, r)$
- d) de $u = (w, 1, j, s)$ a $v = (q, 1, j, r)$, $w \neq x$
- e) de $u = (x, 1, j, s)$ a $v = (x, 1, j, t)$
- f) de $u = (x, 1, j, s)$ a $v = (x, 1, \bar{j}, t)$

y sus correspondientes caminos de longitud $\leq D$, que no contienen al vértice suprimido, son:

$$\begin{array}{ccccc} (1) & (\leq D_G) & (1) \\ \text{a) } & (s, 0, x), (s, 0, x'), \dots, (t, 0, x'), (t, 0, x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (1) & (\leq D_B - 1) & (1) & (\leq D_G) \\ \text{b) } & (s, 0, y), (y, 1, j, s), \dots, (w, 1, \bar{j}, s), (s, 0, w), \dots, (t, 0, w) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (1) & (\leq D_G) & (1) & (\leq D_B - 1) \\ \text{c) } & (s, 0, x), (s, 0, x'), \dots, (r, 0, x'), (x', 1, j-1, r), \dots, (q, 1, j, r) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (\leq D_G) & (1) & (\leq D_B - 1) \\ & (s, 0, w), \dots, (r, 0, w), (w, 1, j-1, r), \dots, (q, 1, j, r) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (1) & (\leq D_G) & (1) & (\leq D_B - 1) \\ \text{d) } & (w, 1, j, s), (s, 0, w), \dots, (r, 0, w), (w, 1, j-1, r), \dots, (q, 1, j, r) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (1) & (1) & (\leq D_G) & (1) & (1) \\ \text{e) } & (x, 1, j, s), (p, 1, j, s), (s, 0, p), \dots, (t, 0, p), (p, 1, \bar{j}, t), (x, 1, j, t), p \neq x \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} (1) & (1) & (\leq D_G) & (1) & (\leq D_B-2) \\ f) & (x,1,j,s), (p,1,\bar{j},s), (s,0,p), \dots, (t,0,p), (p,1,\bar{j},t), \dots, \\ & (s,1,\bar{j},t), p \neq x \\ & (1) & (1) & (\leq D_G) & (1) & (1) & (1) \\ & (x,1,j,s), (q,1,j,s), (s,0,p), \dots, (t,0,q), (q,1,\bar{j},t), (x,1,j,t), \\ & (x,1,\bar{j},t). \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Notar que en el camino $f)$ ha hecho falta distinguir dos casos según que en el camino de $(x,1,j,s)$ a $(x,1,\bar{j},t)$; $(x,1,j,s), (p,1,\bar{j},s), \dots, (x,1,\bar{j},t)$; p sea x o no.

Los grafos $B_0 \nabla^2 B_1$ que cumplen (4.13) son también grafos $(\Delta, D, D, 1)$. Se omite su demostración ya que es similar a la del Lema 4.4.1.

Lema 4.4.2: El grafo $B_0 \nabla^2 B_1$ es un grafo $(\Delta, D, D, 1)$ si ve rifica la condición 2.1.

4.5 GRAFOS $2nB$

En esta sección se presenta un nuevo producto de grafos que tiene algunas similitudes con los grafos $B(G^*)$ definidos en [36] (véase también 2.10).

Sean $2n$ copias de un grafo bipartito $B = (V_B \cup U_B, E_B)$, con $|V_B| = |U_B|$. Cada vértice de B lo denotamos por (x, i) donde $x \in \{0, 1, \dots, \frac{N_B}{2} - 1\}$ e i es un dígito binario (denota si el vértice pertenece a V_B o U_B). Por tanto un vértice de una co pia cualquiera queda determinado por

$$(x, i, j, l)$$

donde $j \in \{0,1\}$ y $l \in \{0,1,\dots,n-1\}$.

El grafo $2nB$ se obtiene al unir dichas copias mediante las dos condiciones de adyacencia siguientes

$$(x,i,j,l) \sim \begin{cases} (x,k,\bar{j},l) & , k = 0,1 \\ (x,j,i,q) & , q \neq l \end{cases} \quad \begin{matrix} (4.14a) \\ (4.14b) \end{matrix}$$

El grafo $2nB$, con $2nN_B$ vértices tiene grado $\Delta = \Delta_B + (n-1) + 2 = \Delta_B + n + 1$.

Teorema 4.5.1: El grafo $2nB$ tiene diámetro $D = D_B + 1$.

Demostración:

Tomamos como vértice origen $u = (x,j,i,l)$ y como vértice destino v que puede ser de la forma:

- 1) $v = (y,j+D_B-1,i,p)$, $p \neq l$
- 2) $v = (y,j+D_B,i,p)$
- 3) $v = (y,j+D_B-1,\bar{i},p)$
- 4) $v = (y,\bar{j}+D_B-1,\bar{i},p)$
- 5) $v = (y,k,\bar{j},l)$

Entonces, los caminos de longitud $\leq D_B + 1$ son, en cada caso, los siguientes:

1. $(x,i,j,l), (x,j,i,p), \dots, (y,j+D_B-1,i,p)$
 $(\leq D_B - 1)$
2. $\dots, (y,j+D_B,i,p)$
 $(\leq D_B)$
3. $(x,j,\bar{i},p), \dots, (y,j+D_B-1,\bar{i},p)$
 $(\leq D_B - 1)$
4. $(x,\bar{j},\bar{i},p), \dots, (y,\bar{j}+D_B-1,\bar{i},p)$
 $(\leq D_B - 1)$

$$5. \quad \begin{matrix} (1) & (\leq D_B - 1) \\ (x, i, j, 1), (x, k - D_B - 1, \bar{j}, 1), \dots, (y, h, \bar{j}, 1) \end{matrix}$$

Teorema 4.5.2: El grafo $2nB$ es un grafo $(\Delta, D, D, 1)$ cuando D_B es par.

Demostración:

Sea $(z, h, j, 1)$ el vértice suprimido. Las situaciones en que la demostración del Teorema 4.5.1 no garantiza que la distancia entre los vértices u y v sea $\leq D_B + 1$ son las siguientes:

- 1) de $u = (x, i, j, 1)$ a $v = (y, g, j, 1)$
- 2) de $u = (z, j, h, p)$ a $v = (y, h, \bar{j}, 1)$
- 3) de $u = (z, j, h, p)$ a $v = (y, \bar{h}, \bar{j}, 1)$

y sus correspondientes caminos de longitud $\leq D$, que no contienen el vértice anulado, son:

1. $\begin{matrix} (1) & (\leq D_B - 1) & (1) \\ (x, i, j, 1), (x, i, \bar{j}, 1), \dots, (y, \bar{i}, \bar{j}, 1), (y, p, j, 1) \end{matrix}$
2. $\begin{matrix} (\leq D_B - 1) & (1) \\ (z, j, h, 1), \dots, (y, \bar{j}, h, p), (y, h, \bar{j}, 1) \end{matrix}$
3. $\begin{matrix} (1) \\ , (y, \bar{h}, \bar{j}, 1) \end{matrix}$

4.6 GRAFOS $4B$

Continuamos el problema $(\Delta, D, D, 1)$ presentando otro producto de grafos bipartitos. Sean 4 copias de un grafo bipartito, B , al vértice (x, i) ($x \in \{0, 1, \dots, \frac{N_B}{2} - 1\}$ $i \in \{0, 1\}$) de la copia m , $m \in \mathbb{Z}_4$, lo denotamos por (x, i, m) . Para construir

el grafo 4B se unen dichas copias según la siguiente condición de adyacencia:

$$(x, i, m) \sim (x, i, m+1 - 2(m \bmod 2) + 2i) \quad (4.15)$$

El grafo 4B, el cual se muestra en la Figura 4.9, tiene

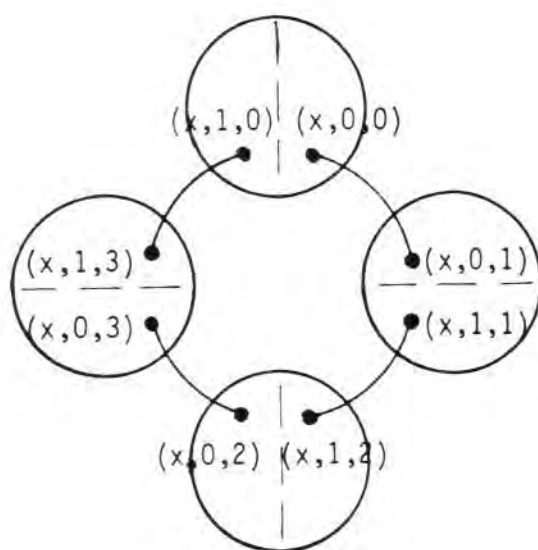


Figura 4.9

$4N_B$ vértices y grado $\Delta = \Delta_B + 1$.

Lema 4.6.1: El grafo 4B tiene diámetro $D \leq D_B + 2$.

Demostración:

Sean

$$(x, i, m) = (x_0, i, m), (x_1, \bar{i}, m), \dots, (x_{D_B-1}, i+D_B-1, m) = (y, i+D_B-1, m)$$

$$(x, i, m) = (x_0, i, m), (x_1, \bar{i}, m), \dots, (x_{D_B}, i+D_B, m) = (y, i+D_B, m)$$

los caminos que unen (x, i, m) con $(y, i+D_B-1, m)$ y con $(y, i+D_B, m)$ respectivamente.

Suponemos que el vértice origen es de la forma $(x, 0, 0)$ (los otros casos son análogos). Los caminos que unen dicho vértice

tice con los distintos vértices destino, de longitud $\leq D_B + 2$, son (suponemos D_B impar)

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad (\leq D_B - 1) \\
 (x, 0, 0), (x, 0, 1), \dots, (y, 0, 1) \\
 \quad (\leq D_B) \\
 \quad \dots, (y, 1, 1) \\
 \quad (1) \quad (\leq D_B - 2) \\
 \quad (x, 1, 1), (x_1, 1, 2), \dots, (y, 0, 2) \\
 \quad \quad (\leq D_B - 1) \\
 \quad \quad \dots, (y, 1, 2) \\
 (1) \quad (1) \quad (\leq D_B - 2) \\
 \quad (x_1, 1, 0), (x_1, 1, 3), \dots, (y, 0, 3) \\
 \quad \quad (\leq D_B - 1) \\
 \quad \quad \dots, (y, 1, 3)
 \end{array}$$

Lema 4.6.2: El grafo $4B$ es un grafo $(\Delta, D, D, 1)$ si $D \geq 5, \Delta \geq 3$.

Demostración:

Sea $(z, 0, 0)$ el vértice suprimido (en los otros casos la demostración es análoga), las situaciones a considerar son las siguientes:

- 1) de $(x, 0, 0)$ a $(y, 1, 3)$
- 2) de $(x, 0, 0)$ a $(y, 1, 0)$
- 3) de $(x, 0, 0)$ a $(y, 0, 0)$
- 4) de $(x, 0, 0)$ a $(y, 0, 3)$
- 5) de $(x, 1, 0)$ a $(y, 1, 0)$
- 6) de $(x, 1, 0)$ a $(y, 1, 1)$
- 7) de $(x, 0, 1)$ a $(y, 0, 1)$
- 8) de $(x, 0, 1)$ a $(y, 1, 3)$

y sus correspondientes caminos de longitud $\leq D$, que no contie

nen al vértice anulado (suponiendo D_B par, en el otro caso los caminos son similares) son:

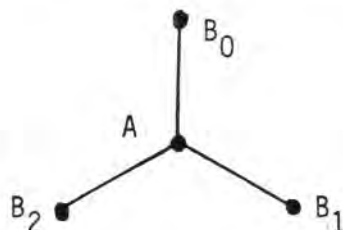
1. $(x, 0, 0), (x_1, 1, 0), (x_1, 1, 3), \dots, (y, 1, 3)$
 $(1) \quad (1) \quad (\leq D_B - 2)$
2. $(y, 1, 0)$
 (1)
3. $(y, 0, 0)$
 (1)
4. $(y, 0, 3)$
 (1)
5. $(x, 1, 0), (x, 1, 3), \dots, (y, 1, 3), (y, 1, 0)$
 $(1) \quad (\leq D_B) \quad (1)$
6. $(s, 0, 0), (s, 0, 1), \dots, (y, 1, 1)$
 $(1) \quad (\leq D_B - 1)$
7. $(y, 0, 1)$
 $(\leq D_B)$
8. $(x, 0, 1), (x_1, 1, 1), (x_1, 1, 2), (x_2, 0, 2), (x_2, 0, 3), \dots, (y, 1, 3)$
 $(1) \quad (1) \quad (1) \quad (1) \quad (\leq D_B - 3)$

4.7 UN GRAFO (7,2,2,1)

En esta sección se presenta un caso concreto de grafo $(\Delta, D, D, 1)$.

Sean 6 copias del grafo $K_{1,3}$ mostrado en la Figura 4.10.

Figura 4.10



A cada vértice del grafo i , $i \in \{0,1,\dots,5\}$ le añadimos el supraíndice i .

Unimos estos grafos mediante las siguientes condiciones de adyacencia (las sumas de supra [sub] índices son mod 6 [3])

$$A^i \sim A^{i+j} \quad j \in \{1,2,4,5\} \quad (4.16a)$$

$$B_k^i \sim \begin{cases} B_k^{i+j} & j \in \{1,2,4,5\} \\ B_{k+1}^{i+3} & l \in \{1,2\} \end{cases} \quad (4.16b)$$

No es difícil verificar, aunque si un poco pesado, que el grafo así construido es un grafo $(7,2,2,1)$ con 24 vértices.

4.8 MAYORES GRAFOS $(\Delta,D,D,1)$

En esta sección se muestra la tabla de mayores grafos $(\Delta,D,D,1)$ conocidos hasta la fecha (Julio, 1986). Los valores indicados corresponden a las construcciones presentadas en este capítulo.

Tabla de mayores grafos $(\Delta, D, D, 1)$

$\Delta \backslash D$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	$\cdot$ 4	$\cdot$ 5	$\cdot$ 6	$\cdot$ 7	$\cdot$ 8	$\cdot$ 9	$\cdot$ 10	$\cdot$ 11	$\cdot$ 12
3	$K_{3,3}$ 6	$\cdot$ 12	P_2 18	Coxeter 28	Coxeter _r 36	H 102	H_d 104	$K_2^*C_{61}$ 122	$K_2^*C_{85}$ 170
4	P 10	2^*P 20	$C_5(9,2,2)$ 36	$4P_2$ 56	$4Q_2$ 120	K 192	$C_2(8,6,2)$ 512	$C_5(9,7,2)$ 1 152	K 1 536
5	$\cdot$ 16	3^*P 30	O_5 126		$4Q_3$ 320	6^*Q_3 480	$4H_3$ 2 912	6^*H_3 4 368	$95[K_{96}]$ 9 120
6	$P(K_{2,2})$ 20	2^*24 48		O_6 462	K 972	K 2 916	$4H_4$ 10 920	K 26 224	K 78 732
7	$6K_{1,3}$ 24	3^*24 72			O_7 1 716	$2 \times 1H_4$ 5 460	$4H_5$ 31 248	8^*H_5 62 496	$(40)A^2H_4$ 163 800
8	$15(K_{2,2})$ 30	2^*HS 100	K 320	K 1 280	K 5 120	K 20 480	K 81 920	K 327 680	K 1 310 720
9	$15(K_{2,2})d$ 32	3^*HS 150	$P(2,3)$ 384	$P(2,4)$ 1 536	$P(2,5)$ 6 141	$2 \times 2H_5$ 31 248	$4H_7$ 156 864	10^*H_7 392 160	$Q_5^*H_5$ 2 437 344
10	$24(K_{2,2})$ 48	4^*HS 200	K 750	K 3 750	K 18 750	K 93 750	$K_6^*A^2H_7$ 588 240	$HS A^2H_7$ 2 941 200	$Q_5^*A^2H_7$ 12 235 392
11	$24(K_{2,2})d$ 50	5^*HS 250	K^+ 810	K^+ 4 050	K^+ 22 250	$2 \times 2H_7$ 150 864	$K_7^*A^1H_7$ 823 536	$P_5^*H_7$ 3 647 088	$Q_7^*H_7$ 31 372 800
12	$32(K_{2,2})$ 64	6^*HS 300	K 1 512	K 9 072	K 54 432	K 326 592	$K_6^*A^2H_9$ 2 790 060	$HS A^2H_9$ 16 607 500	$Q_3^*A^2H_9$ 116 584 650
13	$32(K_{2,2})d$ 66	5^*74 370	$P(3,3)$ 1 728	$P(3,4)$ 10 368	$P(3,5)$ 62 208	$2 \times 2H_9$ 531 440	$K_7^*A^1H_9$ 3 720 080	$P_7^*H_9$ 22 719 060	$Q_9^*H_9$ 217 890 400
14	$HS(K_{2,2})$ 100	5^*91 455	K 2 744	K 19 208	K 134 456	K 941 192	$K_8^*A^2H_{11}$ 9 920 736	$P_8^*A^2H_{11}$ 65 547 720	$Q_9^*A^2H_{11}$ 581 071 680
15	$HS(K_{2,2})d$ 102	6^*91 546	K^+ 2 912	K^+ 20 304	K^+ 142 688	$2 \times 2H_{11}$ 1 417 248	$K_9^*A^1H_{11}$ 12 755 232	$P_9^*H_{11}$ 96 727 176	$Q_{11}^*H_{11}$ 1 037 425 536

CAPITULO V

LOS PROBLEMAS

$(\Delta, D, D+1, 1)$ Y $(\Delta, D, D+2, 1)$

5.1 INTRODUCCION

En este último capítulo se prosigue el estudio del problema $(\Delta, D, D', 1)$ en los casos $D' = D + 1, D + 2$.

En relación con los correspondientes problemas $(\Delta, D, D+1, 1)$ y $(\Delta, D, D+2, 1)$ cabe destacar, al igual que antes, las contribuciones, realizadas por Bond y Peyrat en [10] y [48]. Por ejemplo, en ellos, y para casos particulares, se obtuvieron cotas sobre el número máximo de vértices de los grafos $(\Delta, D, D', 1)$, $D' > D$, aunque el caso general no está resuelto. También estudiaron, entre otros, la vulnerabilidad de los grafos compuestos $G_1 [G_2]$ descritos en la Sección 2.2.

Abre este capítulo un estudio de la vulnerabilidad de los grafos FF que, en los casos más interesantes, resultan ser grafos $(\Delta, D, D+1, 1)$. En la siguiente sección se define un sencillo producto de grafos bipartitos. Seguidamente, en la Sección 5.4 se estudia el grafo bipartito bisecuencia, obtenido a partir del grafo bisecuencia, suprimiendo la polaridad. En la Sección 5.5 se comienza a estudiar el problema $(\Delta, D, D+2, 1)$ tratando algunos grafos DQ_Δ y $B_0 \nabla B_1$. Se prosigue en la Sección 5.6 definiendo varios tipos de grafos compuestos, muy parecidos a los de la sección anterior. En la Sección 5.7 se comprueba la vulnerabilidad de los grafos $B_{\Delta pt}$. Posteriormente se estudian los grafos $B(G^*)$ definidos en la Sección 2.10. A continuación se revisa la vulnerabilidad de los grafos compuestos $B_0 \Sigma_i B_1$ y, finalmente, en la Sección 5.10 se muestran las tablas de mayores grafos $(\Delta, D, D+1)$ y $(\Delta, D, D+2, 1)$ que incluyen todos los valores estudiados en este capítulo.

5.2 VULNERABILIDAD DE LOS GRAFOS FF

Los grafos compuestos FF propuestos por Fiol y Fábrega en [27] (véase también Sección 2.4) se construyen tomando varias copias de un único grafo bipartito, B , con N_B vértices, grado Δ_B y diámetro D_B y uniéndolas de acuerdo con la estructura de un grafo G_2 , según muestra la Figura 5.1.

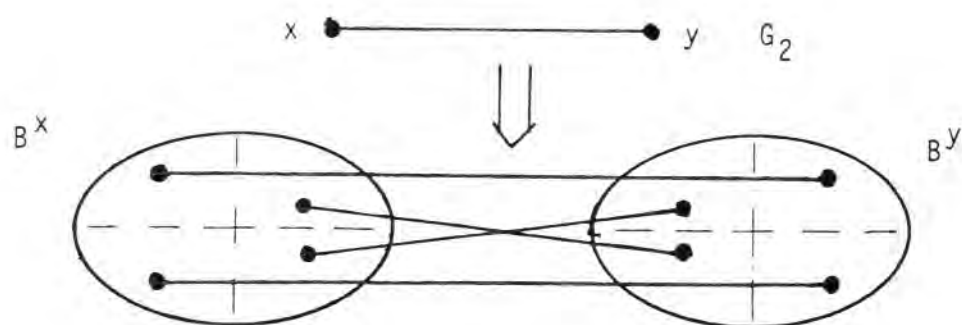


Figura 5.1

Los grafo FF que estudiamos en esta sección, a los que denominamos *FF óptimos*, son los obtenidos cuando G_2 es el grafo completo K_m (con lo que resultan los grafos más densos para $\Delta \leq 16$ y $D \leq 10$), B es un grafo

$$(\Delta_B, D_B, D'_B, 1), \quad D'_B \leq 2D_B, \quad (5.1)$$

y de cada vértice de toda copia parte, por lo menos, una rama intercopia.

Teorema 5.2.1: Los grafos FF óptimos son grafos

$$(\Delta, D, D+1, 1).$$

Demostración:

Sea $z \in B_1^x$ el vértice suprimido, basta comprobar que las dos siguientes distancias

a) de $t \in B^x$ a $u \in B^x$

b) de $t \in B^x$ a $v \in B^y$

son $\leq (2D_B - 1) + 1 = 2D_B$

a) Este caso es evidente, ya que la distancia entre t y u , véase (5.1), satisface $d(t, u) \leq 2D_B$.

b) Desde t y en un paso alcanzamos el vértice $w \in B^s, s \neq x$, del cual parte un camino de longitud $\leq 2D_B - 1$ hacia el vértice destino que no contiene a z . Por tanto $d(t, v) \leq 1 + 2D_B - 1 = 2D_B$.

5.3 GRAFOS $B|G|$

Se puede verificar fácilmente que los grafos $2nB$ cuando $n = 1$ son grafos $(\Delta_B + 2, D_B, D_B + 1, 1)$ (véase la Sección 4.5) Además, dicho grafo se puede interpretar como el grafo $B|K_2|$, que se ha construido sustituyendo los vértices de K_2 por sendas copias de B , y su rama por $4(N_1/2)$ ramas. Ello induce a pensar en otra generalización tomando en vez de K_2 un grafo G . Sin embargo, el grafo resultante tiene grado bastante elevado ($\Delta = \Delta_B + 2\Delta_G$). Para solventar este problema se propone otra nueva generalización que describimos a continuación:

Sea G un grafo, con grado $\Delta_G \geq 2$. Cada vértice x de V_G se sustituye, de igual forma que en la construcción anterior, por una copia de B , B^x , con diámetro *par*; y cada rama $xy \in V_G$ se reemplaza por $3\frac{N_B}{2}$ ramas, según muestra el esquema de la Figura 5.2

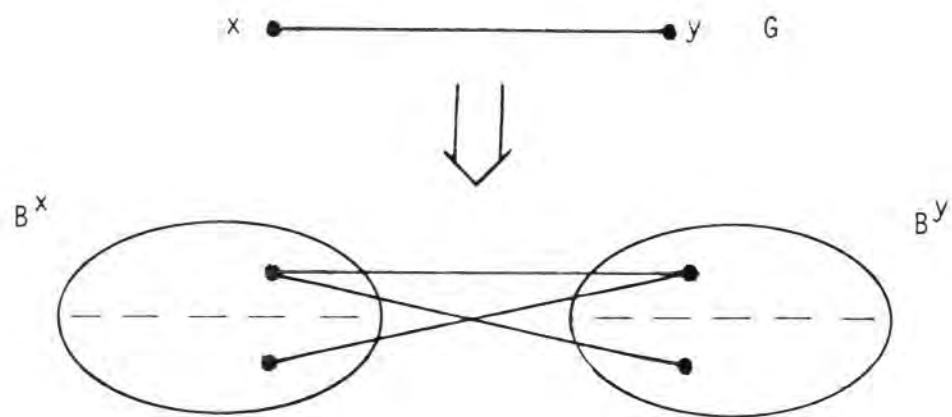


Figura 5.2

Además cada vértice (x, i, p) ($x \in \{0, 1, \dots, \frac{N_B}{2} - 1\}$, $i \in \mathbb{Z}_2$ y $p \in \{0, 1, \dots, N_G - 1\}$) debe ser adyacente, como mínimo, a dos vértices

$$(x, i, q) \quad (x, \bar{i}, q) \quad q \neq p \quad (5.2)$$

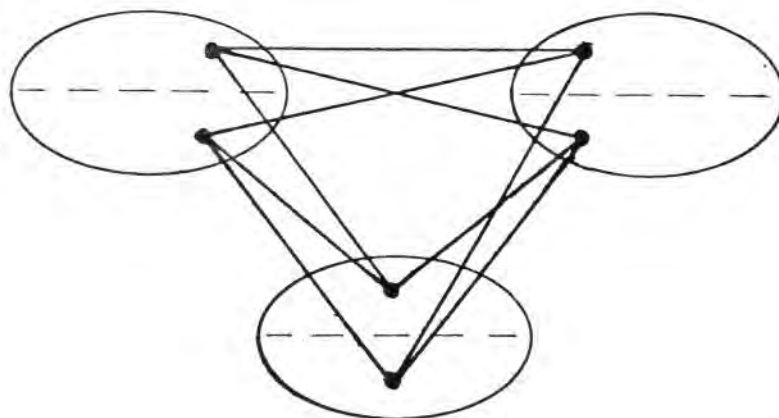
El grafo así construido, $B|G|$, tiene

$$N = N_G N_B \quad (5.3)$$

vértices.

La Figura 5.3 muestra la construcción del grafo $B|K_3|$,

Figura 5.3



que tiene $3N_B$ vértices y grado $\Delta = \Delta_B + 3$.

Teorema 5.3.1: El grafo $B|G|$ tiene diámetro $D \leq D_B + D_G - 1$.

Demostración:

Sean $u = (x, i, p)$ y $v = (y, j, q)$ los vértices origen y destino respectivamente, y considérese el camino que une p y q en G , el cual se puede escribir como

$$P = p_0, p_1, p_2, \dots, p_{r-1}, p_r = q, \quad r \leq D_G \quad (5.4)$$

Los casos a considerar son los siguientes:

- a) Desde el vértice (x, i, p) existen sendos caminos de longitudes $\leq i$ que le unen a los vértices (x, i, p_i) y $(x, \bar{T}, p_i)$.
- b) Desde el vértice origen no existe alguno de los citados caminos.

y sus correspondientes caminos de longitud $\leq D_B + D_G - 1$ son:

- a) $(x, i, p), \dots, (x, k, p_i), \dots, (x, \bar{T}, p_i), \dots, (y, j, q)$
 $(\leq i) \quad (\leq D_G - 1) \quad (\leq D_B - i)$
- b) $(x, i, p), \dots, (y, \bar{T}, p_i), \dots, (y, k, p_i), \dots, (y, j, q)$
 $(\leq D_B - 1) \quad (\leq i) \quad (\leq D_G - i)$

Teorema 5.3.2: El grafo $B|G|$ es un grafo $(\Delta, D, D+1, 1)$.

Demostración:

Los casos a considerar son los siguientes

- a) $z = (s, 1, p)$ (vértice suprimido)
 - a.1) de $u = (x, i, p)$ a $v = (y, j, q)$
 - a.2) de $u = (x, i, p)$ a $v = (y, j, p)$
- b) $z = (s, 1, p_i)$, $1 \leq i \leq r-1$, de $u = (x, i, p)$ a $v = (y, j, q)$
 - b.1) u está a distancia $\leq i$ del vértice $(x, \bar{T}, p_i)$
 - b.2) u no está a distancia $\leq i$ del vértice $(x, \bar{T}, p_i)$

y sus correspondientes caminos de longitud $\leq D_B + D_G$ que no con tienen a z son:

- a.1) $(\leq D_G) \quad (\leq D_B)$
 $(x, i, p), \dots, (x, k, q), \dots, (y, j, q)$
- a.2) $(1) \quad (\leq D_B - 1) \quad (1)$
 $(x, i, p), (x, k, q), \dots, (x, k, q), (y, j, p)$
- b.1) $(\leq i) \quad (\leq D_G - i) \quad (\leq D_B)$
 $(x, i, p), \dots, (x, T, p_i), \dots, (x, k, q), \dots, (y, j, q)$
- b.2) $(\leq D_B - 1) \quad (\leq i) \quad (\leq D_G - i + 1)$
 $(x, i, p), \dots, (y, T, p), \dots, (y, T, p_i), \dots, (y, j, q)$

5.4 GRAFO BIPARTITO BISECUENCIA

A partir de la idea dada en [40] para construir el grafo bisequencia, se puede formar el *digrafo bipartito bisequencia*, $T_B\{d_1, d_2, k\}$, $k = 1 + 4n$, definiendo sus vértices de la forma

$$x = x^i = x_0^i x_1^i x_2^i \dots x_{4n-1}^i x_{4n}^i, \quad (5.5)$$

$$i \in \{0, 1, 2, 3\}, x^i \in \begin{cases} A & \text{si } i+j \equiv 0, 1 \pmod{4}, |A| = d_1 \\ B & \text{en caso contrario, } |B| = d_2 \end{cases}$$

Además, el vértice x^i es adyacente a $y^j = y_0^j y_1^j y_2^j \dots y_{4n-1}^j y_{4n}^j$ si $j = i + 1$ y

$$\begin{aligned} x_1^i &= y_0^j \\ x_2^i &= y_1^j \\ x_3^i &= y_2^j \\ &\vdots \\ x_{4n-1}^i &= y_{4n-2}^j \\ x_{4n}^i &= y_{4n-1}^j \end{aligned}$$

El digrafo T_B tiene

$$N = 2(d_1 + d_2)(d_1 d_2)^{2n} \quad (5.6)$$

vértices.

Lema 5.4.1: El digrafo $T_B\{d_1, d_2, k\}$, $k = 1 + 4n$, tiene diámetro $D = 4n + 4$.

Demostración:

El camino de longitud $4n+1 + [(j-i) \bmod 4] = 4(n+1) - [(i-j) \bmod 4]$ que une x^i a y^j es el siguiente:

$$\begin{aligned} x = x^i &= x_0^i x_1^i x_2^i \dots x_{4n-1}^i x_{4n}^i \\ &\quad \cdot \cdot \cdot \\ &\quad \cdot \cdot \cdot \\ &\quad x_{j-i}^{j-1} \dots x_{4n}^{j-1} z_1^{j-1} \dots z_{j-i-1}^{j-1}, \\ &\quad x_{j-i+1}^j \dots x_{4n}^j z_1^j \dots z_{j-i-1}^j y_0^j \\ &\quad \cdot \cdot \cdot \\ &\quad \cdot \cdot \cdot \\ &\quad y_0^j y_1^j y_2^j \dots y_{4n-1}^j y_{4n}^j = y^j = y \end{aligned}$$

donde los supraíndices están en módulo 4 y $z_1^k \in A$ [B] si $k+1 = 0, 1$ [2, 3] mod 4.

Es fácil comprobar que los digrafos $T_B\{d_1, d_2, k\}$ ($d_1, d_2 \leq 2$) verifican las condiciones que exige la Proposición 4.1 de Bond y Peyrat, es decir,

$$D(U(T_B\{d_1, d_2, k\}) - z) \leq D(T\{d_1, d_2, k\}) = 4(n+1) \quad (5.7)$$

En el Lema 5.4.2 se mejorará esta cota.

Por comodidad de nomenclatura, al grafo bipartito bise-

cuencia, $U(T_B\{d_1, d_2, k\})$, lo denotamos de la misma forma que el digrafo.

Lema 5.4.2: El grafo $T_B\{d_1, d_2, k\}$ tiene diámetro $D=4n+2$.

Demostración:

Se puede comprobar, de forma sencilla, que en el digrafo $T_B\{d_1, d_2, k\}$ se cumple:

$$d(x^i, y^i) \leq 4n + 4 \quad d(y^i, x^i) \leq 4n + 4 \quad (5.8a)$$

$$d(x^i, y^{i+1}) \leq 4n + 1 \quad d(y^{i+1}, x^i) \leq 4n + 3 \quad (5.8b)$$

$$d(x^i, y^{i+2}) \leq 4n + 2 \quad d(y^{i+2}, x^i) \leq 4n + 2 \quad (5.8c)$$

$$d(x^i, y^{i+3}) \leq 4n + 3 \quad d(y^{i+3}, x^i) \leq 4n + 1 \quad (5.8d)$$

Por tanto, basta comprobar que de x^i a y^i existe un camino de longitud $4n+2$. En realidad existen, por lo menos $d_1 + d_2$ caminos de dicha longitud, que son:

$$\begin{aligned} x = x^i &= x_0^i x_1^i x_2^i \dots x_{4n-1}^i x_{4n}^i \\ v^{i-1} &= s^{i-1} x_0^{i-1} x_1^{i-1} \dots x_{4n-1}^{i-1}, \quad s^{i-1} \in \begin{cases} A & \text{si } i-1=0,1 \\ B & \text{en caso cont.} \end{cases} \\ &\quad x_0^i x_1^i x_2^i \dots x_{4n-1}^i y_0^i \\ &\quad \dots \\ &\quad \dots \\ &\quad \dots \\ &\quad x_{4n-1}^{i-1} y_0^{i-1} y_1^{i-1} \dots y_{4n-1}^{i-1} \\ &\quad y_0^i y_1^i y_2^i \dots y_{4n-1}^i y_{4n}^i = y^i = y \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 x &= x^i = x_0^i x_1^i x_2^i \dots x_{4n-1}^i x_{4n}^i \\
 w^{i+1} &= x_1^{i+1} x_2^{i+1} \dots x_{4n}^{i+1} t^{i+1}, \quad t^{i+1} \in \begin{cases} A & \text{si } i-1=0,1 \\ B & \text{en caso cont.} \end{cases} \\
 &\quad y_{4n}^i x_1^i x_2^i \dots x_{4n-1}^i x_{4n}^i \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \dots \\
 &\quad y_1^{i+1} y_2^{i+1} \dots y_{4n}^{i+1} x_1^{i+1} \\
 &\quad y_0 y_1 y_2 \dots y_{4n-1} y_{4n}
 \end{aligned}$$

y los simbolizamos por

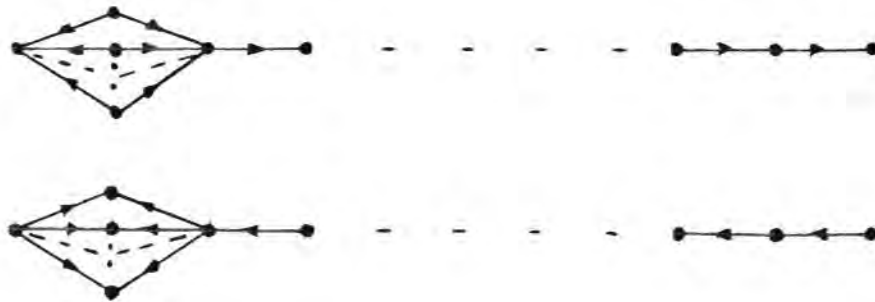


Figura 5.4

Lema 5.4.3: El grafo $T_B\{d_1, d_2, k\}$ es un grafo $(\Delta, D, D+1, 1)$,
 $d_1, d_2 \geq 2$.

Demostración:

Primeramente tratamos las situaciones des-
 critas por (5.8b), (5.8c) y (5.8d). En el caso de que el v́er-
 tice suprimido, z , sea coḿun a los dos caminos que unen x^i con
 y^j , es f́acil construir un circuito de longitud $\leq 2D$ (al igual
 como se indićo en la Seccíon 4.2), que contenga x^i e y^j y no
 z , por tanto podemos encontrar un camino de x^i a y^j que no
 contenga a z de longitud $\leq D$. Si z est́a únicamente en uno de

los caminos que unen x con y , entonces la distancia entre x e y viene acotada por

$$4n + 3 = D + 1 \quad (5.9)$$

Si x e y son de la forma x^i, y^i , se ha demostrado, en el Lema 5.4.2, que existen $d_1 [d_2]$ (suponemos $i-1=0,1 \bmod 4$) caminos que unen x^i con y^i , los cuales emplean un primer paso $\Gamma^- [\Gamma^+]$ y el resto del tipo $\Gamma^+ [\Gamma^-]$. Para que z esté en todos caminos tiene que ser distinto de los d_1+d_2 vértices v^{i-1}, w^{i+1} . Pero, en esta situación, es fácil hallar, al igual que antes, un circuito que une x^i con y^i , de longitud $\leq 2D$ que no contiene a z .

5.5 VULNERABILIDAD DE LOS GRAFOS DQ_Λ y $B_0 \nabla B_1$

Se puede comprobar fácilmente que tanto los grafos DQ_Λ como los grafos $B_0 \nabla B_1$ son grafos $(\Delta, D, D+3, 1)$, sin embargo, bajo ciertas condiciones se demostrará que son grafos $(\Delta, D, D+2, 1)$. Seguidamente se mencionan los casos más interesantes (con sus respectivas restricciones) en que esto es así.

$$DQ_\Lambda$$

$$1.a) - D'_G, D'_1 \leq D + 2 \quad (5.10a)$$

$$1.b) - D'_G \leq D + 2 \quad (5.10b)$$

- Todo vértice de G^t es adyacente a dos vértices de dos copias diferentes de B

$$B_0 \nabla B_1$$

$$2.a) - D'_i \leq D + 2, i \in \{0,1\} \quad (5.10c)$$

$$2.b) - D'_0 \leq D + 2 \quad (5.10c)$$

- Todo vértice de B_0^t es adyacente a dos vértices de copias diferentes

donde D'_α , $\alpha \in \{0,1,B,G\}$, denota que se trata de un grafo $(\Delta_\alpha, D_\alpha, D'_\alpha, 1)$

Los grafos DQ_Λ y $B_0 \nabla B_1$ que pertenecen a alguno de estos casos los denotamos por $G\Lambda^I B$ y $B_0 \nabla^I B_1$.

Lema 5.5.1: Los grafos $G\Lambda^I B$ y $B_0 \nabla^I B_1$ son grafos $(\Delta, D, D+2, 1)$.

Demostración:

Únicamente se demuestra para los grafos $B_0 \nabla B_1$ que verifican la condición 2.a), en las demás situaciones la demostración es similar.

Sea x , el vértice suprimido, que pertenece a B_i^t , los ca sos a comprobar son :

- a) de $x \in B_i^t$ a $y \in B_j^w$, $t \neq w$
- b) de $x \in B_i^u$ a $y \in B_j^v$
- c) de $x \in B_i^t$ a $y \in B_j^v$

y sus respectivos caminos de longitud $\leq D + 2$ son:

- a) Desde x y en un paso alcanzamos el vértice $s \in B_j^u$. De s parte un camino hacia el vértice destino, y , que no contiene a z , de longitud $\leq D_0 + D_1 - 1$.
- b) En esta situación la demostración es un poco más com

pleja. Desde x y en $D_0 + D_1 - 1$ pasos llegamos a todo tice $s \in B_i^W$ $w \neq t$. Desde él y en un paso alcanzamos cualquier vértice $y \in B_T^V$, excepto los adyacentes a los vértices de B_i^t , a los cuales se llega en un paso más, ya que pertenecen a copias diferentes. Entonces,

$$d(x,y) \leq D_0 - D_1 - 1 + 1 + 1 = D_0 + D_1 + 1.$$

- c) Desde x y en un paso vamos a un vértice $z \in B_T^t$. A partir de aquí la demostración es igual que en el caso b). Por tanto

$$d(x,y) \leq 1 + D_0 + D_1 + 1 = D_0 + D_1 + 2.$$

Nota: en la tabla de mayores grafos $(\Delta, D, D+2, 1)$, estos grafos se denotan sin supraíndice.

5.6 GRAFOS $G\Lambda^{II}B$ y $B_0 \nabla^{II} B_1$

Como se verá más adelante, pueden construirse dos tipos de grafos, $G\Lambda^{II}B$ y $B_0 \nabla^{II} B_1$ muy parecidos a los grafos DQ_Λ y $B_0 \nabla B_1$ respectivamente, con igual número de vértices, grado y diámetro que sus "homólogas". Sin embargo, si al construirse estos grafos se cumplen ciertas condiciones (más adelante se estudiarán las más interesantes) resultan grafos $(\Delta, D, D+2, 1)$.

Para construir los grafos $B_0 \nabla^{II} B_1$ se toman, por ejemplo, $\frac{N_1}{2} = n_1$ copias de B_0 y $\frac{N_1}{2}$ copias de B_1 . Utilizando la misma nomenclatura con que se definieron los grafos $B_0 \nabla B_1$ en la Sección 2.7, cada vértice (x, j) de la copia l del grafo B_i se denota por (x, i, j, l) . Entonces se unen las copias de B_i con las

de $B_{\overline{T}}$ mediante las condiciones de adyacencia

$$x = (s, i, j, t) \sim \begin{cases} (t, \overline{T}, j, s) = y & (5.11a) \\ (t, \overline{T}, \overline{j}, s-1-2i) = z & (5.11b) \end{cases}$$

Como puede verse en (5.11), de cada vértice x parten dos ramas hacia los vértices y, z pertenecientes al otro tipo de copias, $y \in V$ y $z \in U$ (al igual como sucede con los grafos $B_0 \nabla_0 B_1$). Sin embargo, dichos vértices pertenecen ahora a copias *diferentes*.

Lema 5.6.1: El grafo $B_0 \nabla^{II} B_1$ tiene diámetro $D \leq D_0 + D_1$.

Demostración:

Basta comprobar que la distancia entre los vértices x e y de la forma

$$\begin{aligned} x &= (s, i, j, t) & y^0 &= (u, \overline{T}, j, v) \\ & & y^1 &= (u, \overline{T}, \overline{j}, v) \end{aligned}$$

es $\leq D_0 + D_1 - 1$. Suponiendo D_0 y D_1 pares (la demostración en los otros casos es similar), los caminos de longitud $\leq D_0 + D_1 - 1$ que unen x con y^0 e y^1 son:

$$\begin{aligned} & (\leq D_0 - 1) & (1) & & (\leq D_1 - 1) \\ x &= (s, i, j, t), \dots, (v, i, \overline{j}, t), (t, \overline{T}, \overline{j}, v), \dots, (u, \overline{T}, j, v) = y^0 \\ & (\leq D_0 - 1) & (1) & & (\leq D_1 - 1) \\ & \dots, (v-1+2i, \overline{j}, t), (t, \overline{T}, j, v), \dots, (u, \overline{T}, \overline{j}, v) = y^1 \end{aligned}$$

Naturalmente, siguiendo el mismo criterio para las adyacencias, pueden formarse grafos en los que el grado de los vértices de las copias puede aumentar en más unidades que en la anterior construcción. Dichos grafos también serán denotados por $B_0 \nabla^{II} B_1$.

Con la misma idea se construyen los grafos $G_{\Delta}^{II} B$. Omiti-
mos su definición porque se deduce de la anterior.

Lema 5.6.2: Los grafos $B_0 \nabla^{II} B_1$ son grafos $(\Delta, D, D+2, 1)$.

Demostración:

Sea $z = (s, i, j, t)$ el vértice suprimido. Co-
mo cada vértice de un tipo de copias es adyacente a otros dos
(por lo menos) pertenecientes a copias distintas del otro ti-
po, véase (5.11), es suficiente comprobar que la distancia en-
tre los vértices (y, i, j, t) y $(u, \bar{t}, 1, v)$ es

$$\leq D_0 + D_1 + 1 \quad (5.12)$$

En efecto, desde (y, i, j, t) y en un paso, según, (5.11) pode-
mos ir al vértice (t, i, j, y) . Desde él y en un paso más llega-
mos al vértice

$$(y, i, j, t+1-2\bar{t})$$

que no pertenece a la copia t . Desde él y según la demostra-
ción del Lema 5.6.1 existe un camino que le une al vértice
destino longitud $\leq D_0 + D_1 - 1$, que no contiene a z .

De forma análoga se puede demostrar que los grafos $G_{\Delta}^{II} B$
son grafos $(\Delta, D, D+2, 1)$.

5.7 VULNERABILIDAD DE LOS GRAFOS B_{Δ}^{pt}

Los grafos B_{Δ}^{pt} se definen en [19] a partir de los gra-
fos DQ_{Δ} cuando G es el grafo trivial K_1 . Concretamente, en vez
de tomar $\left\lfloor \frac{\Delta}{2} \right\rfloor$ copias de B se usan $\left\lceil \frac{\Delta+1}{2} \right\rceil$ y se unen a $N_B/2$ vér-
tices según se muestra en las Figuras 5.5a y 5.5b

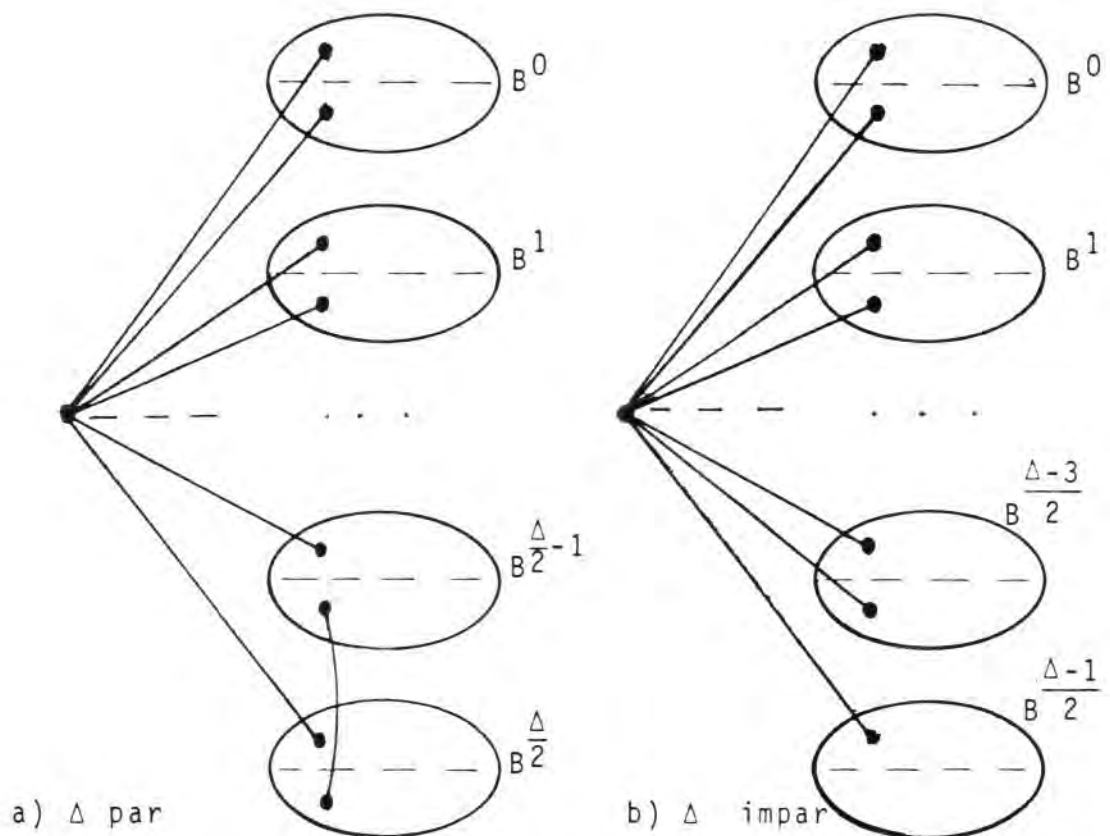


Figura 5.5

Es sencillo comprobar que el diámetro de los grafos $B\Delta pt$ es el mismo que el de sus grafo "origen" ($B\Delta K_1$), es decir, $D_B + 1$.

Lema 5.7.1: Los grafos $B\Delta pt$, con grado $\Delta = 6 + 2n$, $n \in \{0, 1, \dots, \frac{\Delta}{2}\}$ son grafos $(\Delta, D, D+2, 1)$.

Demostración:

Sea A un conjunto con $\frac{N_B}{2}$ elementos, cada vértice K_1 lo simbolizamos por un elemento de A . Al vértice (x, i) de B^1 lo denotamos por $(x, i, 1)$ $x \in \{0, 1, 2, \dots, \frac{N_B}{2} - 1\}$, $i \in \{0, 1\}$ y $1 \in \{0, 1, 2, \dots, \frac{\Delta}{2}\}$.

Las situaciones en que hay que comprobar la distancia son

a) $z = s$

b) $z = (s, i, 1)$

Los casos a considerar en a) son:

a.1) de y a x

a.2) de y a $(x, j, 1)$

a.3) de (y, i, k) a (x, j, m) , $k \in \{0, 1, \dots, \frac{\Delta}{2} - 2\} \equiv C$

a.4) de $(y, i, \frac{\Delta}{2} - 1)$ a $(x, j, \frac{\Delta}{2})$

y sus correspondientes caminos de longitud $\leq D_B + 3$ son los siguientes:

a.1) (1) ($\leq D_B$) (1)
 $y, (y, i, n), \dots, (x, i, n), x, n \in C$

a.2) (1) ($\leq D_B$)
 $y, (y, i, 1), \dots, (x, j, 1)$

a.3) (1) (1) (1) ($\leq D_B$)
 $(y, i, k), (q, i, k), q, (q, 0, m), \dots, (x, j, m), q \neq x$

a.4) ($\leq D_B + 2$)
 $(y, i, \frac{\Delta}{2} - 1), \dots, (x, j, \frac{\Delta}{2})$.

Los diferentes caminos necesarios de longitud $\leq D_B + 3$ para el caso b) no se muestran ya que, además de ser muy numerosos, no entrañan mayor dificultad.

5.8 VULNERABILIDAD DE LOS GRAFOS $B(G^*)$

En esta sección se estudia la vulnerabilidad de los grafos $B(G^*)$, definidos en la Sección 2.10. Al camino (dirigido en uno u otro sentido) que une dos vértices del digrafo G^* , p y q lo denotamos por

$$P = p_0, p_1, p_2, \dots, p_{r-1} p_r = q, r \leq D^*.$$

Lema 5.8.1: El grafo $B(G^*)$ es un grafo $(\Delta, D, D+2, 1)$.

Demostración:

Recordemos que, cada vértice de $B(G^*)$ se denota por (x, i, p) , $x \in \{0, 1, \dots, \frac{N_B}{2} - 1\}$, $i \in \{0, 1\}$ e $p \in \{0, 1, \dots, N^* - 1\}$.

Las situaciones a considerar son:

a) $z = (s, k, p)$

a.1) de $u = (x, i, p)$ a $v = (y, j, p)$

a.2) de $u = (x, i, p)$ a $v = (y, j, q)$

b) $z = (s, k, p_i)$, $1 \leq i \leq r-1$, de $u = (x, i, p)$ a $v = (y, j, q)$

y sus correspondientes caminos de longitud $\leq D_B + D + 1$ son:

a.1) Desde u y en un paso (o en cero pasos) vamos a un vértice del que parte, por lo menos, un camino de longitud $\leq D_B + D - 1$ hacia v , que no contiene a z .

a.2) Suponemos que la unión entre la copia B^P y B^{P_1} es según muestra la Figura 5.6

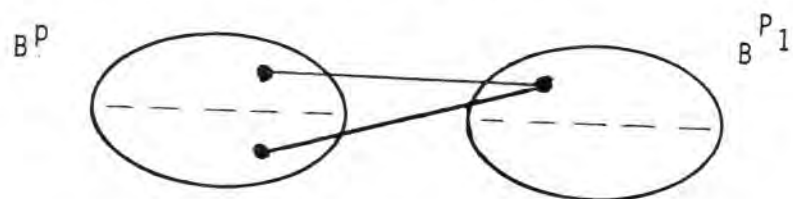


Figura 5.6

(en el otro caso la demostración es similar). Desde u y en un paso vamos al vértice (u, k, p_1) , (k puede ser 0 o 1). Desde él y en D_B pasos, como máximo, alcanzamos el vértice (y, k, p_1) que es adyacente a v .

- b) Según la demostración del Teorema 2.10.1 desde u y en $D_B + D^* - 1$ pasos alcanzamos los $\frac{N_B}{2} - 1$ vértices de la forma

$$(y, k, q) \quad y \neq s$$

(k puede ser 0 ó 1). Por tanto, desde u y en y en $D_B + D^* + 1$ pasos, como máximo, alcanzamos el vértice v .

5.9 VULNERABILIDAD DE LOS GRAFOS $B_0 \Sigma B_1$ y $G \Sigma B$.

En las Secciones 2.8 y 2.9 se han definido varios tipos de grafos compuestos que denotábamos por $B_0 \Sigma_i B_1$ y $G \Sigma_j B$. Por lo que se refiere a su vulnerabilidad, tema de esta sección, se puede demostrar, tal como se verá en un caso concreto, que para $i, j \leq 5$ dichos grafos son $(\Delta, D, D+2, 1)$. En caso contrario se obtienen grafos $(\Delta, D, D+2, 1)$ siempre y cuando se satisfagan ciertas condiciones, de manera análoga a lo que ocurría con los grafos DQ_Δ y $B_0 \nabla B_1$.

La demostración general de que los grafos compuestos $B_0 \Sigma_i B_1$ y $G \Sigma_j B$, $i, j \leq 5$, son grafos $(\Delta, D, D+2, 1)$, es muy larga, aunque no difícil. A título de ejemplo, seguidamente estudiamos la vulnerabilidad de los grafos $B_0 \Sigma_1 B_1$, cuya configuración básica se muestra en la Figura 2.6.

Teorema 5.9.1: El grafo $B_0 \Sigma_1 B_1$ es un grafo $(\Delta, D, D+2, 1)$.

Demostración:

Debido a la enorme cantidad de posibilidades, suponemos que z es de la forma $(s, 0, i, 0, t)$ y el vértice origen es $(x, 0, 0, 0, t)$. En las demás situaciones es similar o

incluso más sencilla.

Los respectivos caminos de longitud $\leq D+2$, que no contienen a z y que abarcan todos los posibles destinos son:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{ccccc}
 (1) & (\leq D_1-1) & (1) & (\leq D_0-1) & \\
 (x,0,0,0,t), (t,1,0,1,x), \dots, (w,1,0,1,x), (x,0,1,0,w), \dots, (v,0,0,0,w) & w \neq t & & &
 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc}
 & (1) & (\leq D_0-1) & & \\
 & (x,0,0,0,w), \dots, (v,0,1,0,w) & w \neq t & &
 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc}
 (1) & (1) & (\leq D_0-1) & (1) & (1) \\
 , (t,1,0,0,x), (x,0,1,2,t), \dots, (v,0,0,2,t), (t,1,0,0,v), (v,0,0,0,t) & & & &
 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc}
 (1) & (1) & (\leq D_0-1) & (1) & (1) \\
 , (t,1,0,1,x), (x,0,0,1,t), \dots, (v,0,0,1,t), (t,1,1,0,v), (v,0,1,0,t) & & & &
 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc}
 (\leq D_1-1) & (1) & (\leq D_0) & & \\
 , \dots, (y,1,0,1,x), (x,0,0,1,y), \dots, (v,0,0,1,y) & & & &
 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc}
 & (\leq D_0-1) & & & \\
 & , \dots, (v,0,1,1,y) & & &
 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc}
 (1) & (\leq D_1-1) & (1) & (\leq D_0-1) & \\
 , (t,1,0,0,x), \dots, (y,1,0,0,x), (x,0,1,2,y), \dots, (v,0,0,2,y) & & & &
 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc}
 & (\leq D_0-1) & & & \\
 & , (x,0,0,2,y), \dots, (v,0,1,2,y) & & &
 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc}
 (1) & (1) & (\leq D_0-1) & (1) & (\leq D_1-1) \\
 , (t,1,1,2,x), (x,0,1,2,t), \dots, (y,0,0,2,t), (t,1,0,0,y), \dots, (v,1,0,0,y) & & & &
 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc}
 (1) & (1) & (\leq D_0-1) & (1) & (\leq D_1-1) \\
 , (t,1,0,1,x), (x,0,0,1,t), \dots, (y,0,1,1,t), (t,1,1,0,y), \dots, (v,1,1,0,y) & & & &
 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc}
 & (1) & (\leq D_1) & & \\
 & , (t,1,1,1,y), \dots, (v,1,0,1,y) & & &
 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc}
 & (\leq D_1-1) & & & \\
 & , \dots, (v,1,1,1,y) & & &
 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc}
 (1) & (1) & (\leq D_0-1) & (1) & (\leq D_1-1) \\
 , (t,1,0,0,x), (x,0,1,2,t), \dots, (y,0,0,2,t), (t,1,0,2,y), \dots, (v,1,0,2,y) & & & &
 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccccc}
 (1) & (\leq D_0-1) & (1) & (\leq D_1-1) & \\
 , (x,0,0,2,t), \dots, (y,0,1,2,t), (t,1,1,2,y), \dots, (v,1,1,2,y) & & & &
 \end{array}
 \end{aligned}$$

A continuación se indican algunas situaciones (las más interesantes) en que los grafos $B_0 \Sigma_i B_1$ y $G \Sigma_j B$, $i, j \geq 6$, son grafos $(\Delta, D, D+2, 1)$.

$$B_0 \Sigma_6 B_1$$

$$a.1) - \Delta \geq \Delta_0 + 5$$

$$a.2) - D_0 \geq 3$$

$$B_0 \Sigma_7 B_1$$

$$b.1) - \Delta \geq \Delta_0 + 6$$

$$b.2) - D_0 \geq 2$$

$$G \Sigma_8 B_1$$

$$c.1) - \Delta \geq \Delta_0 + 10$$

$$c.2) - D_G \geq 1$$

5.10 MAYORES GRAFOS $(\Delta, D, D+1, 1)$ y $(\Delta, D, D+2, 1)$

En esta sección se muestran las tablas de mayores grafos $(\Delta, D, D+1, 1)$ y $(\Delta, D, D+2, 1)$ conocidos hasta la fecha (Julio, 1986). Los valores indicados corresponden a las construcciones presentadas en este capítulo.

Tabla de mayores grafos $(\Delta, D, D+1, 1)$

Δ	D	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		5	6	7	8	9	10	11	12	13
3		10	PG 14	Coxeter 28	Coxeter _r 36	$K_2 \times C_{25}$ 50	H 102	$K_2 \times C_{61}$ 122	$K_2 \times C_{85}$ 170	$K_2 \times C_{113}$ 226
4		15	O_4 35	$5 \bullet P$ 50	$P[K_{11}]$ 110	$C_5(4,5,2)$ 128	$20[K_{21}]$ 420	$5 \bullet H_2$ 630	$38[K_{39}]$ 1 482	$C_2(5,9,2)$ 2 560
5		24	P_4 42	O_5 126	$15[K_{16}]$ 240	$6 \bullet O_3$ 480	$40[K_{41}]$ 1 640	$6 \bullet H_3$ 4 368	$95[K_{96}]$ 9 120	$T_8(3,2,9)$ 12 960
6		32	P_5 62	$7 \bullet 24$ 168	$24[K_{25}]$ 600	$2 \times 1 H_3$ 1 456	$66[K_{67}]$ 4 422	$7 \bullet H_4$ 19 110	$174[K_{175}]$ 30 450	$C_2(5,9,3)$ 98 415
7		50	$2 \times 1 P_4$ 84	$2 \times 1 O_4$ 340	$24[K_{49}]$ 1 174	$2 \times 1 H_4$ 5 460	FFQ_5 24 648	$8 \bullet H_5$ 62 496	$320[K_{321}]$ 102 720	$T_8(4,3,9)$ 207 360
8		57	$2 \times 1 P_5$ 124	$2 \times 1 O_5$ 624	$HS[K_{51}]$ 2 550	$2 \times 1 H_5$ 15 624	FFQ_5 48 584	K 81 920	K 327 680	$C_5(5,9,4)$ 1 310 720
9		74	$3 \bullet 45$ 150	$Q_5 K_3$ 936	$HS[K_{101}]$ 5 050	$H_5 K_3$ 23 436	FFQ_5 73 320	$10 \bullet H_7$ 392 160	$807[K_{808}]$ 652 056	$Q_5 \gamma^1 H_5$ 2 437 344
10		91	$2 \times 1 P_7$ 228	$2 \times 1 O_7$ 1 600	$HS[K_{151}]$ 7 550	$2 \times 1 H_7$ 78 432	$585[K_{586}]$ 380 835	$11 \bullet H_8$ 823 878	$HS \Delta^2 H_7$ 2 941 200	$Q_7 \gamma^2 H_7$ 15 686 400
11		94	$2 \times 1 P_9$ 292	$Q_7 K_3$ 2 400	$P_8[K_{156}]$ 11 338	$2 \times 1 H_8$ 149 796	$585[K_{1236}]$ 723 060	$12 \bullet H_9$ 1 594 320	$HS \Delta^2 H_8$ 7 439 300	$Q_8 \Delta^2 H_9$ 46 249 515
12		133	$2 \times 1 P_9$ 364	$2 \times 1 O_9$ 3 280	$P_9[K_{193}]$ 17 563	$2 \times 1 H_9$ 265 720	FFQ_9 1 346 440	$H_9 \Delta^2 K_6$ 2 790 060	$HS \Delta^2 H_9$ 16 607 500	$Q_8 \Delta^2 H_9$ 120 969 030
13		133	$5 \bullet 74$ 370	$Q_9 K_3$ 4 920	$P_9[K_{281}]$ 25 344	$H_9 K_3$ 398 580	FFQ_9 2 022 120	$14 \bullet H_{11}$ 4 960 368	$4680[K_{5201}]$ 24 340 660	$C_9 \gamma^1 H_9$ 217 890 400
14		183	$2 \times 1 P_{11}$ 532	$2 \times 1 O_{11}$ 5 856	$P_{11}[K_{279}]$ 37 107	$2 \times 1 H_{11}$ 708 624	FFQ_{11} 4 289 520	$K_7 \Delta^2 H_{11}$ 9 920 736	$P_8 \Delta^2 H_{11}$ 65 547 720	$Q_9 \gamma^2 H_{11}$ 581 071 680
15		136	$6 \bullet 91$ 546	$Q_{11} K_3$ 8784	$P_{11}[K_{412}]$ 44 796	$H_{11} K_3$ 1 062 936	FFQ_{11} 6 432 816	$2 H_9 K_3$ 13 953 300	$P_9 \Delta^1 H_{11}$ 96 727 176	$Q_{11} \gamma^1 H_{11}$ 1 037 425 536

Tabla de mayores grafos $(\Delta, D, D+2, 1)$

Δ	D	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		5	7	8	9	10	11	12	13	14
3		P 10	20	Q_2 30	$K_2 \times C_{25}$ 50	$K_2 \times C_{41}$ 82	$K_2 \times C_{61}$ 122	$K_2 \times C_{85}$ 170	$K_2 \times C_{113}$ 226	$K_2 \times C_{145}$ 290
4		15	Q_4 35	Q_3 80	$P[K_{11}]$ 110	$5 \cdot 38$ 190	$20[K_{21}]$ 420	$5 \cdot 128$ 640	$38[K_{39}]$ 1 482	$C_5(5, 9, 2)$ 2 560
5		24	P_4 42	Q_4 170	$6 \cdot 40$ 240	$6 \cdot 95$ 570	$K_1 \wedge H_3$ 1 820	$6 \cdot 731$ 4 386	$95[K_{96}]$ 9 120	$20 \cdot I_2 H_3$ 21 840
6		32	P_5 62	Q_5 312	$Q_4 \wedge P_1$ 765	$7 \cdot 174$ 1 218	$H_4 \wedge P_1$ 12 285	$K_4 \wedge H_4$ 21 840	$(15) \wedge I_2 H_4$ 61 425	$(40) \wedge I_2 H_4$ 163 800
7		HS 50	$2 \times 1 P_4$ 84	$Q_5 d$ 346	$K_1 \cdot I_3 Q_4$ 1 275	$H_3(T_4)$ 2 928	$K_1 \wedge H_5$ 27 342	$K_4 \wedge H_5$ 78 120	$(24) \wedge I_2 H_5$ 281 232	$(66) \wedge I_2 H_5$ 773 288
8		57	$2 \times 1 P_5$ 124	$Q_4(T_4)$ 680	$K_1 \cdot I_7 Q_5$ 2 808	$H_4(T_4)$ 10 920	$K_1 \cdot I_7 H_5$ 70 308	$K_{3,3} \cdot I_6 H_5$ 210 924	$P_4 \cdot I_7 H_5$ 820 260	$Q_4 \cdot I_6 H_5$ 3 984 120
9		74	585	$Q_5(T_4)$ 1 248	$HS[K_{101}]$ 5 050	$H_5(T_4)$ 31 246	$K_1 \wedge H_7$ 176 472	$K_5 \wedge H_7$ 588 240	$HS \wedge I_2 H_7$ 2 941 200	$(122) \wedge I_2 H_7$ 7 176 528
10		91	650	$Q_5(T_5)$ 1 560	$K_1 \cdot I_8 Q_7$ 10 000	$H_5(T_5)$ 39 060	$H_8 \wedge P_1$ 486 837	$K_{5,5} \cdot I_6 H_7$ 1 764 720	$HS \wedge H_8$ 7 489 800	$Q_7 \cdot I_2 H_7$ 47 055 200
11		94	715	$Q_7(T_4)$ 3 200	$K_1 \cdot I_8 Q_8$ 14 625	$H_7(T_4)$ 156 864	$K_1 \cdot I_7 H_8$ 898 776	$K_{6,6} \cdot I_6 H_8$ 4 044 492	$P_7 \cdot I_7 H_8$ 21 345 930	$Q_7 \cdot I_6 H_8$ 179 755 200
12		133	780	$Q_8(T_4)$ 4 680	$K_1 \cdot I_7 Q_9$ 21 320	$H_8(T_4)$ 299 592	$K_1 \cdot I_7 H_9$ 1 727 180	$K_{7,7} \cdot I_6 H_9$ 8 370 180	$P_8 \cdot I_7 H_9$ 48 493 900	$Q_8 \cdot I_6 H_9$ 466 338 600
13		136	845	$Q_9(T_4)$ 6 560	$P_9[K_{284}]$ 25 844	$H_9(T_4)$ 531 440	$K_1 \wedge H_{11}$ 2 303 028	$K_{8,8} \cdot I_6 H_9 d$ 10 257 408	$P_9 \cdot I_7 H_9$ 72 541 560	$Q_9 \cdot I_6 H_9$ 762 616 400
14		183	910	$Q_9(T_5)$ 8 200	$K_1 \cdot I_8 Q_{11}$ 51 240	$H_9(T_5)$ 664 300	$K_1 \cdot I_8 H_{11}$ 6 200 460	$K_{7,7} \cdot I_6 H_{11}$ 29 762 208	$P_9 \cdot I_7 H_{11}$ 164 755 080	$Q_8 \cdot I_6 H_{11}$ 1 865 452 680
15		186	975	$Q_{11}(T_4)$ 11 712	$K_1 \cdot I_8 Q_{11}$ 58 560	$H_{11}(T_4)$ 1 417 248	$K_1 \cdot I_8 H_{11}$ 7 086 240	$K_{8,8} \cdot I_6 H_{11} d$ 35 947 392	$P_{11} \cdot I_7 H_{11}$ 282 740 976	$Q_{11} \cdot I_6 H_{11}$ 3 630 989 376

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. B. AKERS: "On the construction of (d,k) graphs".
I.E.E.E. Trans. Electron. Comput. vol. EC-14, Junio
1965, p. 488.
- [2] B.W. ARDEN y H. LEE: "A regular network for multi-
computer systems". I.E.E.E. Transc. on Comp., vol.
C-31, no.1, Enero 1982 pp. 60-69.
- [3] A.T. BANNAI y T. ITO: "On finite Moore graphs".
J. Fac. Sci., Tokyo Univ., 1973, pp. 191-208.
- [4] C. BERGE: "Graph and Hipergraphs. North-Holland,
Amsterdam , 1973.
- [5] J.C. BERMOND, C. DELORME y J.J. QUISQUATER: "Grands
graphs non dirigés de degree et diameter fixes". Equi-
po de investigación asociado a CNRS: nº 252 A1
Khowarizmi, R.R. nº 113, Dic. 1982.
- [6] J.C. BERMOND, C. DELORME y J.J. QUISQUATER: "Strategies
for interconnection networks: Some methods from graph
theory", Research Report M-58, Philips Research
Laboratory, Brussels, Mayo 1983.
- [7] J.C. BERMOND, C. DELORME y J.J. QUISQUATER: "Strategies
for interconnection networks: Some methods from graph
theory", Research Report M-58, Philips Research
Laboratory, Brussels, Julio 1985
- [8] B. BOLLOBAS: "Extremal Graph Theory" Academic Press,
1978.

- [9] B. BOLLOBAS: "Graph Theory. An introductory course". Springer, 1979.
- [10] J. BOND: "Construccions de grands reeaux d'interconexion". Thesis, Université de Paris-Sud, 1984.
- [11] J. BOND y C. PEYRAT: "Diameter vulnerability in networks". Graph Theory and its Applications to Algorithms and Computer Science, John Wiley & Sons, New York (1985) pp 123-149.
- [12] G.E. CARLSSON, J.E. DRUTHIRDS, H.B. SEXTON, y C.G. WRIGHT: "Interconnection Networks based on a Generalization of Cube-Connected Cycles", I.R.E.E. Transc. on Comp., vol, C-34, no, Agosto 1985 pp 769-772.
- [13] R. DAMERELL: "On Moore graphs, Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 43, pp. 459-474, 1973.
- [14] N.G. DE BRUIJN: "A combinatorial problem". Porc problem Koninkl. Med. Akad. Kwetenschap (49) pp 758-764.
- [15] C. DELORME: "Large Bipartite Graphs with given degree and diameter". Equipo de investigación asociado a CNRS nº 458 Al Khowarizmi. R. R. nº 120 1982.
- [16] C. DELORME: "Large Bipartite Graphs with given degree and diameter (1984), (por aparecer en J. of Graph Theory.
- [17] C. DELORME: "Some new large graphs with given degree and diameter", (1984),(por aparecer)

- |18| C. DELORME y G. FARHI: "Large graphs with given degree and diameter - Part I, IEEE Trans. Comput. vol. C-33, no. 9, pp. 857-860, Sep. 1984.
- |19| C. DELORME y J.J. QUISQUATER: Manuscrito sobre grafos densos (por aparecer, 1984).
- |20| N. DEO: "Graph Theory with aplicaciones to Engineering and Computer Science" Prentice- Hall, 1974.
- |21| K.W DOTY: "Large regular interconnection networks", Proc. International Conf. on distributed Computing Systems (Miami, 1982), pp 312-317.
- |22| M. ESCUDERO, J. GOMEZ, J. FABREGA, M.A. FIOL e I. ALEGRE: "Vulnerability and routing algorithms in graphs on alphabets", First China-U.S.A. International Conference on Graph Theory and its Aplications, Jinan, China, 9-20 Junio 1986.
- |23| G. FARHI: "Diamètres dans les graphes et numerotations gracieuses, Thèse de 3ème Cycle, Université de Paris-Sud, Francia, 1981.
- |24| M.A. FIOL: "Contribución a la teoria de grafos regulares, P.F.C. Universidad politecnica de Barcelona 1979.
- |25| M.A. FIOL: "Aplicaciones de la teoría de grafos al diseño de redes de interconexión de multiprocesadores", Tesis Doctoral, Barcelona 1982.

- [26] M.A. FIOL, I. ALEGRE y J.L.A. YEBRA: "Line digraphs iterations and the (d,k) problem por directed graphs", 10th International Symposiyn on Computer Architecture, Junio,13-17, 1983, Stokholm, Sweden.
- [27] M.A. FIOL y J. FABREGA: "Algunos grafos compuestos", Stochastica, vol VII, no. 2, 1983 pp. 137-143.
- [28] M.A. FIOL, J.L.A. YEBRA e I. ALEGRE: "Line digraph iterations and the (d,k) problem IEEE Trans. on Comp. vol. C-33, nº 5, Mayo 1984, pp 400-403.
- [29] M.A FIOL, M. VALERO, J.L.A. YEBRA y E. SANVICENTE: "En caminamientos en sistemas multiprocesadores 2º Simposium español de informatica repartida, Septiembre 1982.
- [30] M.A. FIOL, J.L.A. YEBRA y J. FABREGA: " Secuence graphs and interconnection networks", IX British Combinatorial conference, Southampton, Julio 1983.
- [31] H. FRIEDMAN: "On the impossibility of certain Moore graphs", J. Combinatorial Theory (B), 1917, pp 245-252.
- [32] R. GOKE y G.J. LIPOVSKI: "Banyan networks for partition partitioning multiprocessor systems", Proceeding of the 1th Conference on Computer Architecture, University of Florida, 1974, pp 21-28.
- [33] J. GOMEZ: "Redes de Interconexión. Métodos para mejorar sus características", Proyecto Fin de Carrera, E.T.S.I. de Telecomunicación, Barcelona 1984.

- [34] J. GOMEZ: "Diameter and vulnerability of some families of graphs", 3eme Colloque International sur la Theorie des Graphs et Combinatorie, Junio 1986.
- [35] J. GOMEZ y M.A. FIOL: "Una nueva familia de grafos con elevado número de vértices", Nota de Investigación, E.T.S.I. de Telecomunicación, Barcelona, 1984.
- [36] J. GOMEZ y M.A. FIOL: "Dense compound graphs", X British Combinatorial Conference, Glasgow, Julio 1985.
- [37] J. GOMEZ y M.A. FIOL: "Some new compound graphs of type $B_0 \Sigma B_1$ ", Nota de Investigación, E.T.S.I. de Telecomunicación, Barcelona, 1986.
- [38] J. GOMEZ, M. A. FIOL y J.L.A. YEBRA: "Non increasing diameter expansion of secuencia networks trough multistage topologies", 24th International Symposium Mimi 1984.
- [39] J. GOMEZ, M.A. FIOL y J.L.A. YEBRA: "Large graphs with maximun degree and diameter odd", Nota de Investigación, E.T.S.I. de Telecomunicación, Barcelona, 1984.
- [40] J. GOMEZ, M.A. FIOL y J.L.A. YEBRA: " Graphs on alphabets as models for large computer networks", próximo a publicarse en Journal of Parallel and Distributed Computing.
- [41] I.J. GOOD: "Normal Recurring Decilmals", J. London, Math. Soc., (21), 1946, pp 167-169.

- [42] F. HARARY: "Graph theory", Addison-wesley, Reading, Massachusetts, 1969.
- [43] A.J. HOFFMAN y R.R. SINGLETON: "On moore graphs with diameter 2 and 3". IBMJ Res. Develop. 1960, pp 497-504.
- [44] JERRUM y SKYUM: "Families of fixed degree graphs for processor interconnection, IEEE Trans, Comp., vol. C-33, pp. 190-194, Feb. 1984.
- [45] W.H. KAUTZ: "Design of optimal interconnection networks for multiprocessors, in Architecture and Design of Digital Computer. Nato Advanced Summer Institute, pp. 249-272, 1969.
- [46] W.E. LELAND y M.H. SOLOMON: "Dense trivalent graphs for processor interconnection, IEEE Trans. Comp., vol. C-30 pp. 439-443, June 1981.
- [47] G. MEMMI e Y. RAILLARD: "Some new results about the (d,k) graph problem, IEEE Trans. Comput., vol. C-31, pp. 784-791, Agosto, 1982.
- [48] C. PEYRAT: "Vulnérabilité dans les réseaux d'interconexion", Thesis, Université de Paris-Sud, 1984.
- [49] J. PLESNIK y S. ZANM: "Strongly geodetic directed graphs". Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comenian. Math. Publi. 29 (1974), pp 29-34.
- [50] C. ROOS y A.J. VAN ZANTEN: "On a class of distance regular graphs" (por aparecer)

- |51| A.R. TRIPATHI y G.J. LIPOUVSKI. "Paket switching in Banyan networks", Proceeding of the 6th Symposium on Computer Architecture, University of Texas at Austin, 1979.

- |52| M. VALERO: "Redes de interconexión en sistemas multi-procesadores: Estudio de las redes multibus y multibus con buses parciales". Memoria presentada para optar a la Cátedra de Arquitectura de Computadores de la Facultad de Informatica de la U.P.B. Diciembre de 1980.

- |53| J.L.A YEBRA, M.A. FIOL e I. ALEGRE: "Some large graphs with given degree and diameter", Journal of Graph Theory, vol. 10, 1986.