

Grands Graphes de Degré et Diamètre Donnés

CHARLES DELORME

We give some constructions of graphs with given degree and diameter, having a large number of vertices. The recipes given here involve incidence graphs of generalized quadrangles and hexagons.

INTRODUCTION

Le problème traité ici a sa source dans les réseaux de communications.

Soit G un graphe simple et non orienté. La distance de deux sommets est la longueur du plus court chemin les joignant dans le graphe; le diamètre de G est la plus grande des distances entre deux sommets de G .

Le degré d'un sommet est le nombre des arêtes auquel il appartient; le degré G est le plus grand des degrés de ses sommets.

Le problème est de trouver des graphes ayant un diamètre D donné et un degré Δ donné, et comptant le plus possible de sommets.

Le lien avec les réseaux de communication est clair: les sommets représentent les stations, les arêtes, les liaisons entre ces stations; on s'efforce d'avoir un réseau étendu, mais une station possède un nombre limité d'entrées-sorties, et on veut limiter le nombre des stations intermédiaires nécessaires aux communications.

Divers auteurs ont déjà travaillé à la question: l'on trouvera une bibliographie étendue dans [3] ou [6].

On donne ici des techniques dérivant des quadrangles généralisés et des hexagones généralisés.

Pour finir on donne aussi des tables précisant les meilleures valeurs numériques connues (fin 1983) et leur comportement asymptotique.

1. QUELQUES RAPPELS

Le graphe d'incidence d'une géométrie est le graphe biparti dont les sommets sont d'une part les points, d'autre part les blocs de la géométrie. Un sommet-point et un sommet-bloc du graphe sont adjacents dans le graphe si et seulement si le point et le bloc correspondants de la géométrie sont incidents.

La géométrie est un *quadrangle généralisé* (resp. un *hexagone généralisé*) lorsque son graphe d'incidence est de maille 8 (resp. 12) et de diamètre 4 (resp. 6). Si le degré de tous les sommets est $q+1$, le nombre des sommets est $2(q+1)(q^2+1)$ (resp. $2(q+1) \times (q^4+q^2+1)$).

On sait aussi que dans le graphe d'incidence d'un quadrangle généralisé, entre deux points à la distance $d \leq 3$, il y a exactement un chemin de longueur d , qui est contenu dans un circuit de longueur 8, et entre deux points à distance 4, il y a $q+1$ chemins de longueur 4, deux à deux disjoints. On a bien sûr une propriété analogue pour les hexagones généralisés.

On sait construire de tels graphes et géométries lorsque $q=1$ (c'est évident, et ce cas sera exclu par la suite) et lorsque q est une puissance de nombre premier [1]. Ces graphes fournissent effectivement des valeurs intéressantes pour les diamètres 4 et 6.

On ne s'intéressera ici qu'aux quadrangles les plus simples, décrits par [13]. Les points sont les points de l'espace projectif de dimension 3 sur le corps F_q , les blocs sont les

droites de cet espace dont les coordonnées plückeriennes vérifient $x_{12} = x_{34}$ (en plus de la relation $x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0$); autrement dit, les blocs incidents au point de coordonnées homogènes ${}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sont dans le plan d'équation $x_1X_2 - x_2X_1 - x_3X_4 + x_4X_3 = 0$. Rappelons que les points de la droite de coordonnées plückeriennes (x_{ij}) sont les combinaisons linéaires non nulles de ${}^t(0, x_{12}, x_{13}, x_{14})$, ${}^t(-x_{12}, 0, x_{23}, x_{24})$, ${}^t(-x_{13}, -x_{23}, 0, x_{34})$ et ${}^t(x_{14}, x_{24}, x_{34}, 0)$, autrement dit, ce sont les solutions du système

$$\begin{bmatrix} 0 & x_{34} & -x_{24} & x_{23} \\ x_{34} & 0 & -x_{14} & x_{13} \\ x_{24} & -x_{14} & 0 & x_{12} \\ x_{23} & -x_{13} & x_{12} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lorsque q est une puissance de 2, on peut attacher au point M de coordonnées ${}^t(x, y, z, t)$ la droite $f(M)$ de coordonnées plückeriennes $(x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}) = (h, x, z, t, y, h)$, avec $h^2 = xy - zt$. On constate que le point P de coordonnées ${}^t(p, q, r, s)$ est sur $f(M)$ si et seulement si M est sur $f(Q)$, où Q est le point de coordonnées ${}^t(p^2, q^2, r^2, s^2)$, ce qui montre que f donne une *dualité*, c'est à dire un automorphisme du graphe échangeant les sommets-points et les sommets-blocs (avec $f^2(Q) = P$).

Lorsque q est une puissance impaire de 2, disons $q = 2^{2a-1}$, on a même une *polarité*, c'est à dire une dualité involutive. Au point M de coordonnées homogènes ${}^t(x, y, z, t)$ on associe la droite $\pi(M) = f(M')$, où M' a pour coordonnées les puissances 2^a -ièmes de celles de M . Ainsi M est sur $\pi(P)$ si et seulement si P est sur $\pi(M)$.

On sait aussi que les hexagones généralisés classiques ont une dualité quand q est une puissance de 3, et une polarité quand q est une puissance impaire de 3 [12].

2. CONSTRUCTION USANT DE LA POLARITÉ

THÉORÈME. *Si q est une puissance impaire de 2, il existe un graphe de degré $q+1$ de diamètre 3, ayant $(q+1)(q^2+1)$ sommets. Si q est une puissance impaire de 3, il existe un graphe de degré $q+1$ de diamètre 5, ayant $(q+1)(q^4+q^2+1)$ sommets.*

Pour cela, on forme le quotient des graphes d'incidence par leur polarité π : autrement dit, les sommets seront les points de la géométrie, deux sommets M et N étant adjacents si M est sur $\pi(N)$, on ce qui revient au même, si N est sur $\pi(M)$. Comme dans le graphe incidence d'un quadrangle généralisé tout sommet-point est à la distance au plus 3 de tout sommet-bloc, le quotient aura pour diamètre 3. Même chose au sujet des hexagones généralisés.

La figure 1 correspond au cas des quadrangles avec $q = 2$.

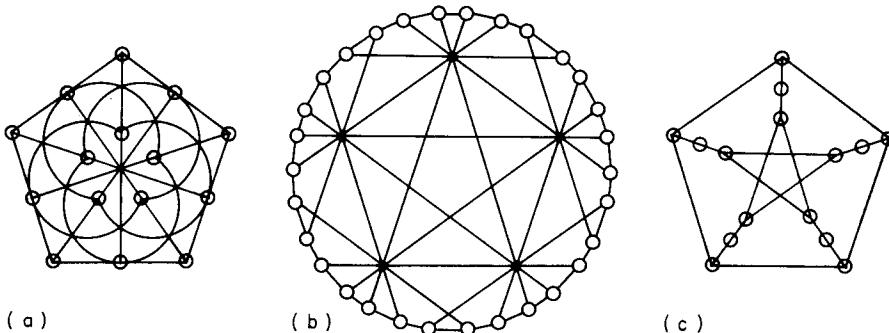


FIGURE 1. (a) Quadrangle (napperton de Payne), (b) graphe d'incidence (de Tutte-Coxeter), (c) graphe quotient.

3. CONSTRUCTIONS USANT DE LA DUALITÉ

Voici d'abord une construction voisine de celle des graphes C_p . L'ensemble des sommets est $Z/mZ \times Q^k$, où m est un entier ≥ 3 et Q l'ensemble des points d'un quadrangle généralisé possédant une dualité f . Le sommet $(a, x_1, \dots, x_k)$ est adjacent aux $q+1$ sommets $(a+1, x_2, \dots, x_k, y)$ où y est incident au bloc $f(x_1)$, et aux $q+1$ sommets $(a-1, z, x_1, \dots, x_{k-1})$ où z vérifie la condition: $f(z)$ est adjacent à x_k . Cette condition équivaut à: z est incident au bloc $f^{-1}(x_k)$, car f est une dualité.

On obtient ainsi un graphe de degré maximum $2(q+1)$. Pour estimer le diamètre, on observera que des chemins de longueur $3k$ permettent de relier tout sommet dont la première coordonnée est a à tout sommet dont la première coordonnée est $a-3k$, ou $a-k$, ou $a+k$ ou $a+3k$.

On pourra faire la même chose avec les hexagones généralisés pourvus d'une dualité, les chemins de longueur $5k$ joignent cette fois les sommets dont la première coordonnée est a à ceux de première coordonnée $a-5k+2lk$, $0 \leq l \leq 5$.

Pour les degrés $2(2^a+1)$ et les diamètres $3h$, où $h \not\equiv 0 \pmod 3$, on a un graphe à $3(2^a+1)^h(4^a+1)^h$ sommets. Pour les degrés $2(3^a+1)$, et les diamètres $5h$, où $h \not\equiv 0 \pmod 5$ on a un graphe à $5(3^a+1)^h(9^{2a}+9^a+1)^h$ sommets, pour les degrés $2(3^a+1)$ et les diamètres $25h$, où $h \not\equiv 0 \pmod 3$, on a un graphe à $3(3^a+1)^{5h}(9^{2a}+9^a+1)^{5h}$ sommets.

4. USAGE DES PRODUITS

Observons que les graphes-quotients obtenus au paragraphe 2 ont la propriété P , c'est-à-dire qu'entre deux points à la distance D (où D est le diamètre du graphe), il existe un chemin de longueur $D+1$. Cela résulte du fait suivant: si x et y sont à la distance 3 (dans le cas des quadrangles généralisés), les sommets-points x' et y' correspondant à x et y dans le graphe d'incidence sont à la distance 4. Parmi les $q+1$ chemins de longueur 4 joignant x' à y' , au plus 2 utilisent des arêtes de la forme $(z, \pi(z))$, où π est la polarité (sinon le graphe d'incidence contiendrait des cycles de longueur < 8). Ceux qui restent donnent des chemins de longueur 4 entre x et y dans le quotient, et il en reste, vu que $q+1 \geq 3$ (ce serait faux pour $q=1$). La preuve se fait de la même façon pour les hexagones généralisés.

Ceci permet d'augmenter le diamètre de 1 et le degré de d , et de multiplier le nombre des sommets par au moins $2d$, plus précisément par 8 pour $d=3$, par $2d+1$ si $2d+1$ est une puissance de premier avec d pair, et par $2d$ pour les autres valeurs de d [5].

Par exemple, le graphe-quotient de quadrangle obtenu pour $q=8$, à 585 sommets de degré 9 et de diamètre 3, donne un graphe de degré 12 et de diamètre 4 à 4680 sommets.

Rappelons comment sont constitués les produits par des groupes: à partir d'un groupe fini Γ , et d'une partie S de Γ , stable par passage à l'inverse et ne contenant pas l'élément neutre de Γ , on forme le graphe G' dont les sommets sont les éléments de Γ , deux sommets x' et y' étant adjacents si $x'^{-1}y'$ est dans S . Alors G' est régulier de degré le cardinal de S .

Le produit $G * G'$ est formé comme suit: les sommets sont les éléments de $G \times G'$, ses arêtes sont de deux sortes, d'une part les $((x, x'), (x, y))$, où (x', y') est une arête de G' , d'autre part les $((x, x'), (y, y'))$, où (x, y) est un arc de G et $y' = \phi_{(x,y)}(x')\alpha_{(x,y)}$, où $\phi_{(x,y)}$ est un automorphisme de Γ et $\alpha_{(x,y)}$ un élément de Γ . Si Ψ est un automorphisme de Γ , le groupe opposé Γ^0 de Γ opère sur $(x, y) * G'$ par automorphisme, en associant à γ l'automorphisme $(x, x') \mapsto (x, x'\Psi(\gamma))$, $(y, y') \mapsto (y'\alpha_{(x,y)}^{-1}\phi_{(x,y)}\Psi(\gamma)\alpha_{(x,y)})$. Donc Γ^0 opère sur tout $T * G'$, où T est un arbre de G , transitivement sur chaque copie (x, G') de G' . Ceci permet de ne regarder que les distances à un sommet de chaque copie de G' . Pour plus de détails, voir [4].

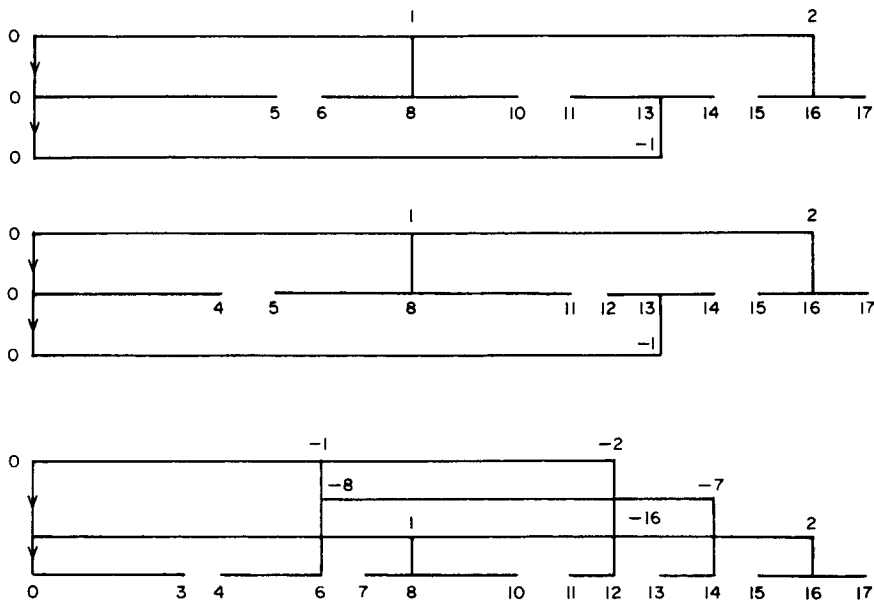


FIGURE 2.

On va fournir à un graphe d'incidence G d'un quadrangle généralisé ou d'un hexagone généralisé une orientation telle que (i) entre deux sommets à la distance maximum D ($D = 4$ ou 6) il existe un chemin de longueur D contenant 2 arcs consécutifs et (ii) en chaque sommet il arrive et il part au moins un arc.

Pour cela, prenons un couplage parfait dans G (il en existe, car G est régulier biparti) [2, ch. 7]. Les arêtes de ce couplage seront orientées des sommets-points vers les sommets-blocs, et les autres arêtes en sens contraire.

De la sorte (ii) est évidemment réalisé, et (i) a lieu, car entre deux sommets à la distance D il existe un chemin de longueur D commençant par une arête du couplage.

Ceci permet d'utiliser les produits suivants:

- (a) $G * F_4$ ($\Delta + 1, D + 1, 4n$) cf. [4]
- (b) $G * C_{19}$ ($\Delta + 2, D + 2, 19n$) idem
- (c) $G * C_{35}$ ($\Delta + 2, D + 3, 35n$) avec l'arête $((a, m), (a', 8m))$ au-dessus de l'arc (a, a') .

La figure 2 permet de vérifier que ce produit convient pour $D \geq 2$, avec les conditions (i) et (ii) (on a $8^2 \equiv -6 \pmod{35}$ et $8 \cdot 13 \equiv -1 \pmod{35}$)

- (d) Le produit $G * S_3$ ($\Delta + 1, D + 2, n \cdot 6$).

Le groupe des permutations d'un ensemble à 3 éléments est d'ordre 6. Choisissons une transposition t et une permutation circulaire s . On munit S_3 des arêtes (u, tu) , et au-dessus d'un arc (a, a') de G on met les arêtes $((a, u), (a', sus^2))$. Ceci convient pour $D \geq 3$, avec les conditions (i) et (ii), vu la figure 3. Il est clair en outre que si G est biparti, le produit $G * S_3$ l'est aussi.

5. GRAPHES DE DEGRÉ $3(q+1)$

Construisons des graphes de degré $3(q+1)$, où q est une puissance de nombre premier, de diamètre 6, à $18(q^2 + q + 1)^3$ sommets.

Pour cela nous considérons un plan projectif sur le corps à q éléments, on peut observer que c'est un 'triangle généralisé', où les blocs sont les droites, et possédant une dualité f (et même une polarité).

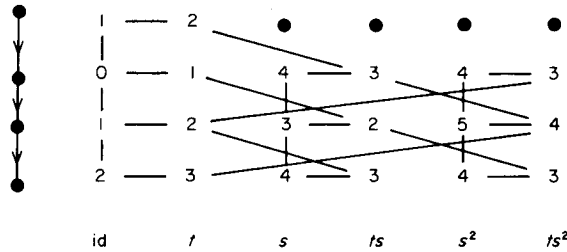


FIGURE 3.

L'ensemble des sommets de G est $Z/9Z \times Z/2Z \times P^3$, où P est l'ensemble des points du plan projectif. Les voisins de (a, b, x, y, z) sont les $q+1$ points $(a+1, b, y, z, t)$, où t parcourt $f(x)$, les $q+1$ points $(a-1, b, t, x, y)$, où t parcourt $f'(z)$, qui est la droite des points t tels que $f(t)$ passe par z , et enfin les $q+1$ points $(ra, b+1, x, t, z)$, où

si $b=1$, alors $ra=4a$ et t parcourt $f(y)$

si $b=0$, alors $ra=7a$ et t parcourt $f'(y)$.

Pour vérifier que le diamètre est bien 6, on utilisera la figure 4.

	0 → 0	0 → 1	1 → 1
0	+++---	○+○+○+	+++---
1	---○+○	+○+○-○	+++○+○
2	---○-○	++++○+	-○-○-○
3	-----	-○-○-○	-----
4	--○-○+	+++--○-	---○+○

FIGURE 4.

Le mode d'emploi sera clair sur l'exemple suivant: dans la ligne 1 de la colonne 0 → 1, on lit +○+○-○. Cette expression symbolise un chemin qui permet d'aller de tout point de $(a, 0; P, P, P)$ à tout point de $(7a+1, 1; P, P, P)$. En effet, à partir de $(a, 0, x, y, z)$ on atteint successivement les points de $(a+1, 0; y, z, X)$, de $(7a+7, 1; y, Z, X)$, de $(7a+8, 1; Z, X, Y)$, de $(a+5, 0; Z, P, Y)$, de $(a+4, 0; P, Z, P)$ et enfin on arrive aux points de $(7a+1, 1; P, P, P)$ (X désigne $f(x)$ ou $f'(x)$, etc).

Pour aller de $(a, 0; x, y, z)$ à un point quelconque de $(7a-1, 1; P, P, P)$, on utiliserait le chemin symbolisé par -○-○+○, obtenu par changement de signe à partir du précédent. On pourra vérifier sans difficulté que les chemins indiqués dans le tableau ont bien les propriétés voulues.

Pour aller de $(a, b, ., ., .)$ à $(a+x, b, ., ., .)$ on utilisera le chemin indiqué à la ligne x de la colonne $(b \rightarrow b)$.

Sur la figure 5 on dessine les chemins de $(2, 0)$ à $(6, 1)$ et de $(1, 0)$ à $(5, 0)$

Un travail analogue fournit, à partir des quadrangles généralisés munis d'une dualité, des graphes de degré $3(q+1)$, de diamètre 9, ayant $42(q+1)^3(q^2+1)^3$ sommets, où q est une puissance de 2.

On prendra $ra=5a$ pour $b=1$ et $ra=17a$ pour $b=0$, et $Z/21Z$ au lieu de $Z/9Z$.

Le contrôle du diamètre se fera à l'aide de la figure 6.

6. CONSTRUCTIONS SPÉCIALES POUR LES DIAMÈTRES 3 ET 5.

Avec un quadrangle généralisé muni d'une dualité f , formons un graphe de degré $3(q+1)$, de diamètre 3, à $12(q+1)(q^2+1)$ sommets; c'est possible si q est une puissance de 2. L'ensemble des sommets est $V_1 \times Q$, où V_1 est l'ensemble des sommets du graphe D_1 ci-dessous (affecté d'une orientation quelconque) et Q l'ensemble des points du

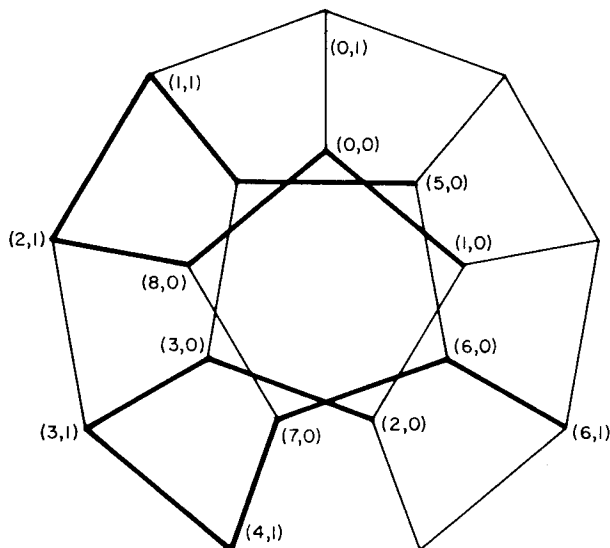


FIGURE 5.

quadrangle. Les arêtes sont les paires $((a, x), (b, y))$, où (a, b) est un arc de D_1 et $y \in f(x)$. Le diamètre est 3 car entre deux sommets distincts ou non de D_1 il existe un chemin, non nécessairement élémentaire, de longueur 3 exactement.

De même, avec un hexagone généralisé possédant une dualité, et le graphe D_2 , on trouve des graphes de diamètre 5, de degré $3(q+1)$, ayant $30(q+1)(q^4+q^2+1)$ sommets, où q est une puissance de 3.

Le même procédé, appliqué à un hexagone généralisé possédant une dualité et au composé du graphe de Petersen et de la clique à 11 sommets, fournit un graphe de degré $4(q+1)$, à $110(q+1)(q^4+q^2+1)$ sommets, si q est une puissance de 3.

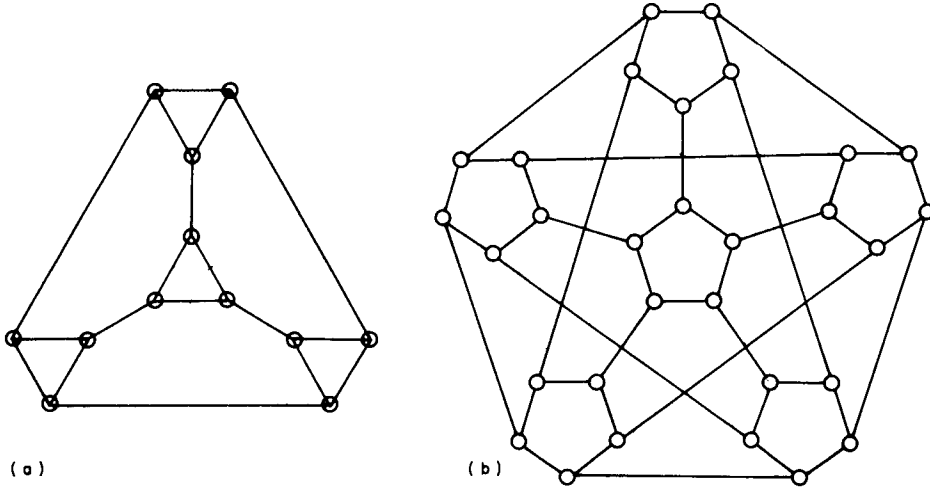
Les graphes définis dans cette section présentent l'intérêt que le rapport du nombre de leurs sommets à Δ^D dépasse la borne inférieure connue (en avril 1982) pour $\liminf_{\Delta \rightarrow \infty} (N/\Delta^D)$, à savoir $8/27$ pour le diamètre 3 et $256/3125$ pour le diamètre 5, pour q assez grand.

7. AUGMENTATION DU DEGRÉ (GÉNÉRALITÉS)

Soient G un graphe, et A un sous-graphe induit de G . On dira que G' est obtenu en dédoublant A dans G si l'ensemble des sommets de G' est la réunion (disjointe) de G et

	0 → 0			0 → 1			1 → 1		
0	++○	+++	+○-	+++	+++	-○-	+++	++○	+○-
1	+++	+++	○-○	○+○	-○-	---	++○	+○-	○-○
2	+++	○++	++○	+++	++○	○+○	+++	+++	○+○
3	+++	+++	---	+++	++-	○--	+++	+++	---
4	+++	○--	--○	++○	+++	○-○	---	○-○	+++
5	+++	○+○	---	○-○	+++	++○	---	○--	+○-
6	+○+	+++	+○+	---	○+○	○--	++○	+++	+○-
7	++○	++○	○-○	○+○	-○-	+++	--○	-○+	○-○
8	---	○--	-+○	+++	-○-	○+○	+++	○++	++○
9	+++	+++	+++	-○-	+++	+++	+++	+++	+++
10	---	---	○-○	+++	++○	○-○	+++	+++	○-○

FIGURE 6.

FIGURE 7. (a) Composé de K_3 et K_4 , (b) composé de C_5 et K_6 .

d'une copie de A , un sommet x de G étant adjacent à un sommet y de la copie de A si et seulement si x est déjà adjacent au sommet de A dont y est la copie.

Considérons à présent un graphe G de diamètre D , de degré maximum Δ , et une suite de sous-graphes induits $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ de G tels que

- (a) pour tout $i \geq 0$, le voisinage de A_{i+1} dans G est inclus dans A_i et tout sommet de $A_i - A_{i+1}$ est adjacent à au plus un sommet de A_{i+1}
- (b) tout sommet de $G - A_0$ est adjacent à au plus un sommet de A_0
- (c) toute composante connexe B de A_0 a la propriété que pour tous x et y dans B , il existe z dans G hors de A_0 tel que $d(x, z) + d(y, z) \leq D$.

Le graphe G' obtenu en dédoublant A_0 , puis A_1 dans A_0 et sa copie, puis A_2 dans A_1 et ses copies, etc, (l'opération s'arrête sûrement, car l'un des A_i est vide) a les propriétés suivantes: son degré est $\Delta + 1$, son diamètre est D , le nombre de ses sommets est $|G| + |A_0| + 2|A_1| + 4|A_2| + \dots + 2^i|A_i| + \dots$; de plus, si G est biparti, G' l'est aussi, si G est k -connexe, G' l'est aussi.

Je ne donne pas la preuve (qui ne présente aucune difficulté), mais plutôt un exemple: à partir du 9-cycle, on construit un graphe de degré 3 de diamètre 4 à 16 sommets.

Si G est de diamètre ≥ 2 , de degré Δ , on pourra prendre pour A_0 un ensemble de sommets dont les distances mutuelles sont au moins 3 (autrement dit un stable du carré G^2); le dédoublement de A_0 augmente le nombre de sommets d'au moins $|G|/(\Delta^2 + 1)$.

Pour avoir une augmentation de r du degré, on pourra 'dé- $r+1$ -upler', ce qui amène

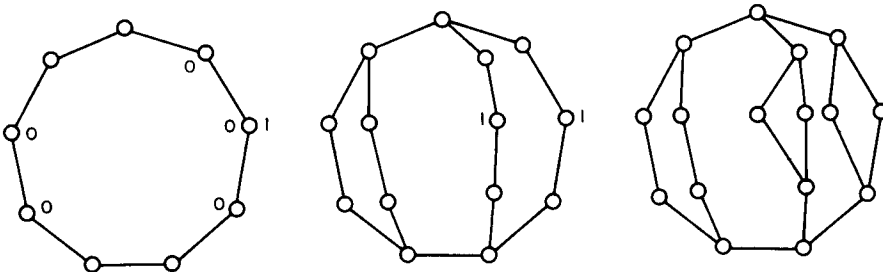


FIGURE 8.

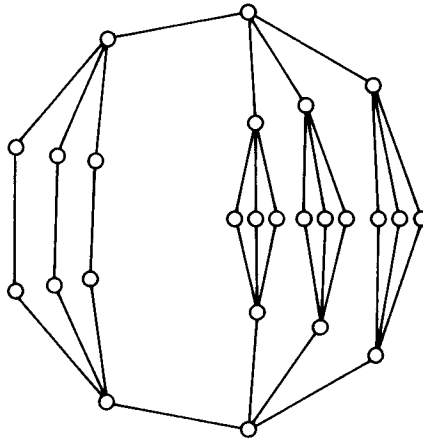


FIGURE 9.

une augmentation du nombre de sommets de $(r-1)(A_0 + rA_1 + \dots + r^iA_i + \dots)$. Le même exemple que ci-dessus donne un graphe de degré 4 de diamètre 4, à 25 sommets, avec $r=2$.

8. EXEMPLES D'AUGMENTATION DU DEGRÉ

(a) Graphes d'incidence de quadrangles généralisés

Considérons le quadrangle d'ordre q , où q est une puissance de premier, dont les points sont ceux de l'espace projectif de dimension 3 sur le corps GF_q à q éléments et dont les blocs adjacents au point M_0 de coordonnées homogènes X_0 (où ${}^tX_0 = (x_0, y_0, z_0, t_0)$) sont les droites passant par M_0 et situées dans le plan d'équation $x_0y - y_0x - z_0t + t_0z = 0$, ou encore ${}^tX_0UX = 0$, où U est la matrice produit de Kronecker

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prenons deux éléments a et b de F_q tels que le polynôme $T^2 - aT + b^2$ soit irréductible dans $F_q[T]$. Soit A la matrice

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elle n'a pas de vecteur propre, vu que son polynôme caractéristique est $(T^2 - aT + b^2)^2$. Donc les points de coordonnées X et AX sont différents. Comme

$$UA = \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

est antisymétrique, la droite qui les joint est un bloc. En outre, $A^2 - aA + b^2I = 0$, donc le point de coordonnées A^2X est sur la droite définie par ceux de coordonnées X et AX . Ceci prouve que les droites ainsi formées réalisent une partition de l'espace, en $q^2 + 1$ droites disjointes.

Il s'ensuit que le graphe d'incidence du quadrangle contient $q^2 + 1$ sommets dont les distances mutuelles valent 4.

Si A_1 est l'un de ces sommets, et A_0 l'union du voisinage de A_1 et des $q^2 + 1$ sommets en question, le dédoublement de A fournit une augmentation du degré de 1 et du nombre

de sommets de $q^2 + q + 4$. En particulier, pour $q = 5$, on arrive à un graphe de degré 7, à $312 + 34 = 346$ sommets.

Les graphes ainsi formés sont encore bipartis et 2-connexes.

(b) *Graphes d'incidence des hexagones généralisés*

On sait également construire des hexagones généralisés d'ordre q , où q est une puissance de premier, tels que leur graphe d'incidence contienne $q^3 + 1$ sommets dont les distances mutuelles valent 6 [14].

On prendra pour A_2 l'un de ces sommets, pour A_1 le voisinage de A_2 et les $q^3 + 1$ sommets, pour A_0 l'union de A_1 et du voisinage de A_1 dans le graphe. De la sorte, $|A_2| = 1$, $|A_1| = q^3 + q + 2$, $|A_0| = q^4 + 2q^3 + q^2 + 2q + 2$. Par exemple, pour $q = 5$, on obtient un graphe de degré 7, de diamètre 6 ayant $7812 + 912 + 2(132) + 4 = 8992$ sommets.

Les graphes ainsi obtenus sont encore bipartis et 2-connexes.

(c) *Graphes-quotients pour les quadrangles ayant une polarité*

En raison de la polarité, un ordre convenable des sommets du graphe d'incidence Q donne une matrice d'adjacence de la forme

$$C \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A,$$

où C est symétrique. Le nombre de coefficients égaux à 1 sur la diagonale de C est le nombre des points absolus pour la polarité. C'est aussi la trace de C . Si on remplace ces coefficients par des coefficients nuls, on obtient la matrice d'incidence du graphe quotient Q' .

Le fait que A soit la matrice d'adjacence du graphe d'incidence du quadrangle généralisé d'ordre q se traduit par $(C^3 - (2\Delta - 1)C) + C = J$ (chaque sommet-bloc est à distance 3 ou 1 de chaque sommet-point, et le chemin de longueur minimum est unique). On a donc $\text{tr } C^3 = \text{tr } J + 2q \text{ tr } C$. D'autre part le coefficient diagonal de C^3 qui correspond à un sommet x du quotient Q' est le nombre des chemins de longueur exactement 3, non nécessairement élémentaires et pouvant emprunter une boucle autour des sommets de degré q de Q' (qui correspondent aux points et blocs absolus de la polarité), qui joignent x à lui-même. On notera que Q' ne contient pas de 3-cycles, et que deux sommets absolus sont certainement à distance ≥ 3 , car Q a pour maille 8. Chaque sommet non absolu est donc adjacent à au plus un sommet absolu. Il apparaît alors que le coefficient diagonal correspondant à un sommet absolu dans C^3 est $1 + 2q$, que le coefficient correspondant à un autre sommet est le nombre (0 ou 1) de sommets absolus qui lui sont adjacents. La contribution à la trace de C^3 est donc $n(1 + 2q)$ pour les n sommets absolus, nq pour les autres, car chaque sommet absolu est adjacent à q sommets, tous non absolus.

On a donc $\text{tr } C^3 = n(1 + 2q) + nq = (1 + q)(1 + q^2) + 2qn$ vu le calcul des traces, c'est-à-dire $n = 1 + q^2$. Par suite, Q' comporte $q^2 + 1$ sommets mutuellement à distance 3.

Ce résultat s'observe aisément pour $q = 2$ (figure 1). Pour $q = 8$, on obtient par dédoublement, détriplement etc de la partie A_0 formée des 65 sommets absolus, des graphes à 650, 715... sommets de diamètre 3 pour les degrés 10, 11...

REMARQUES: Chaque sommet non absolu est voisin d'exactly 1 sommet absolu.

Les graphes obtenus ont encore la propriété P .

(d) *Graphes quotients pour les hexagones ayant une polarité.*

Comme précédemment, le graphe d'incidence H a une matrice d'adjacence de la forme

$$A = C \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

où C est symétrique. La suppression des 1 sur la diagonale de C fournit la matrice d'adjacence du graphe quotient H' .

Chaque sommet-bloc de h est à distance 5, 3 ou 1 de chaque sommet-point, et le chemin de longueur minimum est unique. Cela se traduit par $(C^5 - (4\Delta - 3)C^3 + (\Delta - 1) \times (3\Delta - 1)C) + (C^3 - (2\Delta - 1)C) + C = J$. On a donc en passant aux traces $\text{tr } C^5 - 4q \text{ tr } C^3 + 3q^2 C = \text{tr } J$. Comme H est de maille 12, H' ne contient pas de cycles de longueur 3, 4, 5 et les sommets de degrés q ont pour distances mutuelles 5. Chaque sommet non absolu est donc à distance ≤ 2 d'au plus un sommet absolu. On peut alors en examinant les chemins fermés de longueur 5 évaluer la trace de C^5 . La contribution d'un sommet absolu est $1 + 4q + 5q^2$, celle d'un sommet à distance 1 d'un sommet absolu est $1 + 4q$, celle d'un sommet à distance 2 d'un sommet absolu est 1. Comme un sommet absolu est à distance 1 de q sommets, et à distance 2 de q^2 sommets, la trace de C^5 est $n(1 + 4q + 5q^2) + nq(4q + 1) + nq^2 = n(1 + 5q + 10q^2)$. Le calcul des traces donne donc $n(1 + 5q + 10q^2) - 4q \cdot n(1 + 3q) + 3q^2 n = q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$, c'est-à-dire $n = q^3 + 1$. Ainsi H' possède $q^3 + 1$ sommets de degré q , dont les distances mutuelles valent 5.

Pour $q = 3$, on obtient par dédoublement et détriplement de A_0 et A_1 où A_1 est formée de ces sommets absolus, et A_0 de l'union de A_1 et de son voisinage dans h' , des graphes de degrés 5 et 6, de diamètre 5, à 532 et 756 sommets respectivement.

REMARQUES: Tout sommet de H' est à distance au plus 2 de exactement 1 sommet absolu.

Les graphes obtenus ont encore la propriété P .

(e) Graphes des plans projectifs.

Les méthodes décrites plus haut (section 7) ne donnent que des résultats ridicules en diamètre 2.

Rappelons que le graphe d'incidence du plan projectif construit sur le corps à q éléments admet une polarité: au point de coordonnées homogènes X_0 , où $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$, on associe la droite d'équation $X_0 X = 0$. Les points absolus pour cette polarité forment en caractéristique 2 la droite d'équation $(1, 1, 1)X = 0$. En dédoubleant dans le graphe quotient le point de coordonnées $(1, 1, 1)$ on obtient encore un graphe de degré $q + 1$, de diamètre 2, à $q^2 + q + 2$ sommets (par exemple 74 pour $q = 8$).

Au contraire, si q est une puissance de premier impair, les points absolus sont deux à deux non adjacents, en nombre $q + 1$, mais parmi les q^2 autres points, $q(q + 1)/2$ sont adjacents à 2 points absolus et les $q(q - 1)$ restants ne sont adjacents à aucun point absolu.

En dédoubleant la partie A formée des points absolus, on augmente donc le degré de 2. En dédoubleant des sommets d'un triangle de droites absolues, on n'augmente le degré que de 1. On pourra donc, en dédoubleant plusieurs fois l'ensemble des points absolus, construire des graphes à $q^2 + q + 1 + r(q + 1)$ sommets de degré $q + 1 + 2r$; en dédoubleant ensuite les sommets d'un triangle de droites absolues, on obtiendra des graphes à $q^2 + q + 1 + r(q + 1) + 3$ sommets, de degré $q + 1 + 2r + 1$.

9. INSERTION DE SOMMETS SUR LES ARÊTES

Soit G un graphe d'incidence d'un hexagone généralisé. Choisissons une arête (u, v) . Sur chaque arête (a, b) de G telle que $\inf(d(a, u), d(a, v)) = 2$ et que

TABLE 1

D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u	1	1	8/27	3/16	4 ⁴ /5 ⁵	2/81	2 ⁻⁷	3.2 ⁻⁸	2 ⁻⁹	3.2 ⁻¹⁰	2 ⁻¹¹
	Cs	Cp	prod. 0.296	Cp 0.187	compo. 0.082	§ 5 0.024	Cs 0.0078	Cp 0.0117	Cs 0.0019	Cp 0.0029	Cs 0.0005
v			1	3 ³ /2 ⁷	1	2.5 ⁵ /6 ⁶	6 ⁶ /7 ⁷		14/3 ⁸	5.2 ⁻¹⁰	10 ¹⁰ /11 ¹¹
	Cs	Cp	quad. 0.210	prod. 0.210	hexa. 0.136	prod. 0.136	compo. 0.056		§ 5 0.0021	§ 3 0.0049	compo. 0.034

Les types Cs et Cp sont décrits dans [8].

Les types quad., hexa., § 5 sont décrits dans le présent article

La composition (compo.) est décrite dans [6].

Les produits (prod.) sont décrits dans [4, 5].

$\inf(d(b, u), d(b, v)) = 3$, insérons un sommet supplémentaire. Il y a ainsi $2q^3$ nouveaux sommets, et le degré n'a pas augmenté. Montrons que le diamètre est passé à la valeur 7.

Toute paire de sommets de G appartient à au moins un circuit de longueur 12 de G . Un tel circuit contient au plus deux arêtes à modifier, donc devient de longueur 12 ou 14 après modification. La distance des anciens sommets dans le nouveau graphe est donc au plus 7. Les distances mutuelles des nouveaux sommets sont évidemment au plus 7. Enfin, soient x un ancien sommet et y un nouveau. Si un des sommets de G voisins de y est à la distance 6 de x dans G , l'arête de G recevant y s'insère dans un circuit de longueur 12 de G , donc dans un circuit de longueur 14 du nouveau graphe. Sur ce circuit, la distance de x à y ne dépasse pas 7. Sinon, un des sommets z de G voisins de y est à la distance $d \leq 4$ de x . Le chemin de G le longeur d entre x et z porte au plus 2 arêtes à modifier, donc la nouvelle distance entre x et z est au plus 6, et celle entre x et y est au plus 7.

On notera que les graphes ainsi obtenus sont encore bipartis et 2-connexes.

Dans le nouveau graphe, la partie A_0 des sommets tels que $\inf(d(x, u), d(x, v)) \leq 2$ a pour voisinage précisément l'ensemble des nouveaux sommets, chacun d'eux est adjacent à au plus un sommet de A_0 . Pour chaque paire (x, y) de sommets de A_0 , il existe un nouveau sommet z tel que $d(x, z) + d(y, z) \leq 7$. Les nouveaux sommets étant de degré 2 seulement, on pourra dédoubler A_0 à $q - 1$ reprises sans modifier le degré ni le diamètre.

TABLE 2
Table des valeurs connues (fin 1983)

D									
A	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	10	20	38	70	128	180	286	462	708
4	15	40	95	364	128	856	1 872	3 708	7 000
5	24	60	174	532	2 734	2 988	7 000	11 340	30 240
6	32	105	320	820	7 817	10 920	19 138	43 744	131 232
7	50	120	480	1 550	8 998	31 248	62 536	156 340	562 824
8	57	200	807	2 550	39 223	48 984	154 800	524 288	1 310 729
9	74	585	1178	5 050	74 906	160 800	480 250	1 176 690	5 883 450
10	91	650	1755	7 550	132 869	380 835	1 117 550	3 906 250	14 981 200
11	94	715	2925	11 388	142 474	723 060	1 990 050	5 580 498	33 217 250
12	133	780	4680	17 563	354 323	1 346 440	3 778 261	20 155 392	85 887 453
13	136	845	5265	25 844	374 464	2 146 224	7 211 386	24 340 680	130 691 232
14	183	910	5850	37 107	804 481	4 289 520	12 694 773	80 707 214	322 828 871
15	186	1215	7605	54 796	842 062	6 432 816	22 303 302	81 352 872	550 731 776

On obtient ainsi quelques graphes intéressants pour le diamètre 7 qui sont encore bipartis et 2-connexes; par exemple, pour $q=2$, le graphe d'incidence de l'hexagone généralisé d'ordre 2 a 126 sommets, l'insertion de sommets fait passer le nombre des sommets à 142, et le diamètre à 7, le dédoublement de A_0 ajoute 14 sommets: on trouve un graphe à 156 sommets. Plus généralement; cette construction donne un graphe de degré $q+1$, de diamètre 7, biparti et 2-connexe, qui comporte $2(q+1)(q^4+q^2+1)+2q^3+(q-1)(2(q^2+q+1))=2q(q^4+q^3+3q^2+q+1)$ sommets.

10. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Posons $u_D = \liminf \Delta^{-D} N(\Delta, D)$ et $v_D = \limsup \Delta^{-D} N(\Delta, D)$, où $N(\Delta, D)$ est le nombre maximum des sommets d'un graphe de degré Δ et de diamètre D . La majoration de Moore donne $v_D \leq 1$. Les diverses techniques de construction fournissent les minorations de la table 1.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. T. Benson, Minimal graphs of girth 8 and 12, *Canad. J. Math.* **18** (1966), 1091-1094
2. C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, France, 1974
3. J. C. Bermond and B. Bollobas, Diameters in graphs: a survey, *Congr. Numer.* **32** (1981), 3-27
4. J. C. Bermond, C. Delorme and G. Farhi, Large graphs with given degree and diameter II, *J. Combin. Theory, Ser. B* **36** (1984), 32-48
5. J. C. Bermond, C. Delorme and G. Farhi, Large graphs with given degree and diameter III, *Ann. Discrete Math.* **13** (1982), 23-32
6. J. C. Bermond, C. Delorme and J. J. Quisquater, Grands graphes non dirigés de degré et diamètre fixés, *Ann. Discrete Math.* **17** (1982), 65-73
7. N. Biggs, Algebraic graph theory, *Cambridge Tracts in Math.* **67** (1974)
8. C. Delorme and G. Farhi, Large graphs with given degree and diameter 1, *IEEE Trans. Comput.* **33** (1984), 857-860
9. P. Dembowski, *Finite Geometries*, Springer Verlag, Berlin, Germany 1968
10. S. E. Payne, Finite generalized quadrangles: a survey. *Proc. Intern. Conf. on Projective Planes* 219-261. Washington State University Press, 1973.
11. J. J. Quisquater, New constructions of large graphs with fixed degree and diameter, to appear.
12. M. A. Ronan, A geometric characterization of Moufang hexagons, *Invent. Math.* **57** (1980), 227-262
13. R. Singleton, On minimal graphs of maximum even girth, *J. Combin. Theory* **1** (1966), 306-332
14. J. A. Thas, Polar spaces, generalized hexagons, and perfect codes, *J. Combin. Theory, Ser. A* **29** (1980), 87-93

Received 11 June 1982 and in revised form 3 December 1984

CHARLES DELORME
Université Paris-Sud, Département de Mathématiques,
Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France