

Solucions als problemes d'EQUACIONS DIFERENCIALS

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials (GETI)

ETSEIB – UPC

Equip docent d'Equacions Diferencials
Departament de Matemàtiques
ETS d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB)
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Versió: Febrer 2023

<https://mat-web.upc.edu/etseib/ed/>

CÀLCUL VECTORIAL

1. $8R$.
2. $8(k+1)R$.
3. Suposem que la Terra és una esfera S de radi R . Donats dos punts arbitraris $P_0, P_1 \in S$, sigui $\alpha \in [0, \pi]$ l'angle format pels vectors $\overrightarrow{OP_0}$ i $\overrightarrow{OP_1}$, on O és el centre de l'esfera. Per tant, la distància sobre l'esfera entre els punts P_0 i P_1 és la longitud de l'arc de circumferència de radi R i angle α : $\text{dist}(P_0, P_1) = R\alpha$. Per calcular l'angle α , és suficient observar que si $-\pi/2 \leq \phi_j \leq \pi/2$ són les coordenades geogràfiques longitud-latitud de P_j , aleshores

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\langle \overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP_1} \rangle}{\|\overrightarrow{OP_0}\| \|\overrightarrow{OP_1}\|} = (\cos \theta_0 \cos \theta_1 + \sin \theta_0 \sin \theta_1) \cos \phi_0 \cos \phi_1 + \sin \phi_0 \sin \phi_1 \\ &= \cos(\theta_1 - \theta_0) \cos \phi_0 \cos \phi_1 + \sin \phi_0 \sin \phi_1 \\ &= [1 + \cos(\theta_1 - \theta_0)] \cos(\phi_1 - \phi_0) - [1 - \cos(\theta_1 - \theta_0)] \cos(\phi_1 + \phi_0).\end{aligned}$$

A Wikipedia podem llegir que el radi mitjà de la Terra és $R \approx 6371$ km, que les coordenades geogràfiques de Lisboa (punt P_0) són $(\theta_0, \phi_0) = (9^\circ 8' W, 38^\circ 43' N) \approx (0.1594067, 0.6757333)$, i que les coordenades geogràfiques de Nova York (punt P_1) són $(\theta_1, \phi_1) = (74^\circ 0' W, 40^\circ 43' N) \approx (1.2915436, 0.7106399)$. Així doncs, l'angle és $\alpha \approx 0.8510653$ rad i la distància és $R\alpha \approx 5422$ km. Com que un nus són 1.852 km/h, necessitem aproximadament $5422/(30 \cdot 1.852) \approx 97.59$ h per a dur a terme la travessia (una mica més de 4 dies). [Obs.: Segons la font que consultem, el resultat pot diferir una mica per dues raons: la Terra no és perfectament esfèrica, i com que ambdues ciutats són grans les seves coordenades geogràfiques no estan definides amb precisió.]

4. Determinem c imposant que el radi augmenti $16 \mu\text{m}$ en donar una volta completa. És a dir, imposablem que $16 \cdot 10^{-6} = g(\theta + 2\pi) - g(\theta) = 2\pi c$, d'on $c = 8 \cdot 10^{-6}/\pi$. Aleshores $\theta_0 = 0.0111/c$, $\theta_1 = 0.0246/c$ i la longitud total de la cinta és

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(g(\theta))^2 + (g'(\theta))^2} d\theta = c \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \frac{c}{2} \left[\theta \sqrt{1 + \theta^2} + \ln \left| \theta + \sqrt{1 + \theta^2} \right| \right]_{\theta=\theta_0}^{\theta=\theta_1} \approx 94.6 \text{ m}.$$

5. $m = \frac{kh^2}{8\pi^2} \sqrt{1+a} \left[t\sqrt{t^2+a} + a \log |t + \sqrt{t^2+a}| \right]_{t=0}^{t=2\pi}$, on $a = 4\pi^2 R^2/h^2$.
6. $m = 2^{3/2} \pi k R^{3/2}$.
7. $m = \sqrt{3}(e^\pi - 1)kR/2$.
8. $m = 4kR^4/3$.
9. $\text{Area} = 225; \bar{h} = 5$.
10. Aquesta circulació resulta ser el doble de l'àrea del quadrat, és a dir, $8L^2$.
11. $\int_C z dx + x dy + y dz = \int_C z dx + \int_C x dy + \int_C y dz = 1/4 + 2/3 + 3/5 = 91/60$.

12. (a) El potencial escalar és $f(x, y) = 2x^2 + x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4$, i llavors $\int_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = f(0, 0) - f(2, 0) = -24$.
 (b) El potencial escalar és $f(x, y, z) = x^2y + xz^3$, i llavors $\int_{\sigma} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = f(-1, 0, \pi) - f(1, 0, 0) = -\pi^3$.
 (c) El potencial escalar és $f(x, y, z) = xe^y + z^2$, i llavors $\int_{\sigma} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = f(1, 1, 1) - f(1, 0, 0) = e$.
14. $\pi R^2/4k$.
15. Negatiu: $\oint_C \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \oint_C y dx = -\text{Area}(D) = -\pi$, essent D el cercle tancat per C .
16. D'una banda, $\int_D \langle \text{rot } \mathbf{F}, \mathbf{k} \rangle dx dy = 3 \int_D (x^2 + y^2) dx dy = 3 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_a^b r^3 dr \right) = 3\pi(b^4 - a^4)/2$. D'altra banda, si C_R denota la circumferència de radi R centrada a l'origen orientada en sentit antihorari, veiem que
- $$\oint_{C_R} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = R^4 \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t + \text{funció senar}) dt = R^4 \int_{-\pi}^{\pi} (3 + \cos 4t)/4 dt = 3\pi R^4/2,$$
- i per tant $\int_{\partial D} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_{C_a^-} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle + \int_{C_b^+} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = \int_{C_b} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle - \int_{C_a} \langle \mathbf{F}, d\ell \rangle = 3\pi(b^4 - a^4)/2$.
17. Si $C^+ = \partial D$ ve orientada pel vector $\mathbf{k}$, aleshores l'orientació demanada és C^- . Siguin $P(x, y) = y + x^3 \cos(x^2)$ i $Q(x, y) = e^{y^2} + 2x$. Aplicant Green sabem que $\int_{C^-} P dx + Q dy = -\int_{C^+} P dx + Q dy = -\int_D (Q_x - P_y) dx dy = -\int_D dx dy = -\text{Area}(D) = -(\pi 10^2 - \pi - \pi - \pi) = -97\pi$.
19. $\text{Area} = \pi \left[R\sqrt{R^2 + h^2} + h^2 \ln \left(\left(R + \sqrt{R^2 + h^2} \right) / h \right) \right]$.
20. $\text{Area}(S) = \sqrt{3} \text{Area}(D) = \sqrt{3/2}\pi$.
21. (a) $\text{Area}(S_{R,\alpha}) = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} R^2 \cos \phi d\phi \right) d\theta = 2\pi(1 - \cos \alpha)R^2$. Per tant, $\Omega(S_{R,\alpha}) = 1$ sr quan $2\pi(1 - \cos \alpha) = 1$, és a dir, quan $\alpha = \arccos(1 - 1/2\pi) \approx 0.5719537610$ rad.
 (b) N'hi ha prou amb observar que el casquet $C_{R,h}$ és una porció del tipus $S_{R,\alpha}$ amb $h = (1 - \cos \alpha)R$.
22. $\text{Area} = 16R^2$ i $\text{Vol} = 16R^3/3$.
23. Si escrivim $C = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : r^2 + z^2 = R^2, r \geq 0\}$ i $D = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : r^2 + z^2 \leq R^2, r \geq 0\}$, aleshores $\text{CG}(C) = (2R/\pi, 0)$ i $\text{CG}(D) = (4R/3\pi, 0)$.
24. $\text{Vol} = \pi h^3/6$, on $r^2 + (h/2)^2 = R^2$, i $\text{Area} = 2\pi(r + R)h$.
25. $c = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2(t/2)} dt \approx 15.2808$, $\text{Area}(S_1^{\pm}) = 4(\pi - 2)R^2$, $\text{Area}(S_2) = 16R^2$.
26. Si $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ i $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$, aleshores $\text{CG}(S) = (0, 0, R/2)$ i $\text{CG}(W) = (0, 0, 3R/8)$.
27. La càrrega total és la integral de la densitat de càrrega: $Q = \int_S e dS = \pi k R h \sqrt{R^2 + h^2} / 3$.
28. La càrrega total és la integral de la densitat de càrrega: $Q = \int_S e dS = \pi (\sqrt{3} - 1/3) k a^3$.
29. (a) $4\pi abc$; (b) $4\pi abc(1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2)/3$; (c) 0, per la simetria especular de l'el·lipsoide.
30. Siguin $r = r(h)$, $v = v(h)$ i $f = f(h) = \pi r^2 v$ el radi del raig d'aigua, la seva velocitat i el flux d'aigua en funció de la distància h . Sabem que $v^2 = v_0^2 + 2gh$ (moviment uniformement accelerat) i $f(h)$ és constant (fluid incompressible). Per tant, $\pi r_0^2 v_0 = f(0) = f(h) = \pi r^2(h) \sqrt{v_0^2 + 2gh}$, i obtenim $r(h) = (1 + 2gh/v_0^2)^{-1/4} r_0$. Òbviament, $r(0) = r_0$ i el radi $r(h)$ és decreixent en h .
31. (a) πR^4 ; (b) $\pi R^4/8$.
32. $\pi R^2 h/4$.
33. $\pi R^2 h^2/3$.
34. $\int_S \langle \mathbf{r}, d\mathbf{S} \rangle = -hL^2/3$ (notem que el camp és té divergència constant).
35. πR^4 .
36. $\oint_{\partial W} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \int_W (4z - y) dx dy dz = 3/2$.
37. $\int_{S_R} \langle h(r)\mathbf{r}, d\mathbf{S} \rangle = 4\pi R^3 h(R)$. La llei de Gauss ens diu que $\int_{S_R} \langle \mathbf{r}/r^3, d\mathbf{S} \rangle = 4\pi$, i per tant aquest resultat la generalitza, tot i que només és vàlid per a esferes centrades a l'origen, mentre que la llei de Gauss és vàlida per a qualsevol superfície tancada que no passi per l'origen.

38. 48π .
39. $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = 9\pi$ (el fet que el camp és solenoidal permet simplificar els càlculs).
40. (a) $\oint_C z dx + y dy - x dz = -2\pi/3$; (b) $\int_S dz dx = \int_S \langle \mathbf{j}, d\mathbf{S} \rangle = -\pi/3$.
41. $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = -15\pi$ (el fet que el camp és solenoidal permet simplificar els càlculs).
42. $\int_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = 2\pi$ (el fet que el camp és constant permet simplificar els càlculs).
43. $\oint_C -y^2 dx + z dy + x dz = \int_S -dy dz - dz dx + 2y dx dy = \int_D (2y - 4) dx dy = -9$, on S és l'interior del triangle C i D és el l'interior del triangle de vèrtexs $(0, 0)$, $(3, 0)$ i $(0, 3)$. És a dir, D és la projecció de S sobre $\{z = 0\}$.
44. $\int_S \langle \text{rot } \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = \oint_C \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle = \oint_C x dx + y dy = 0$, ja que $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.
45. $\int_S \langle \text{rot } \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = 4\pi = \oint_C \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle$.
46. (a) $\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle = 60\pi$ (usant la definició de flux, o bé aplicant Gauss i afegint tapes).
 (b) $\oint_{\partial S^+} \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle = -80\pi$ (aplicant Stokes).
 (c) Siguin C_0 i C_5 les dues components de la frontera, on $C_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z = a\}$, que és la vora del cercle $S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z = a\}$. Obtenim $\oint_{C_0^+} \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle = 20\pi$ i $\oint_{C_5^+} \langle \mathbf{F}, d\boldsymbol{\ell} \rangle = -100\pi$. Si apliquem Stokes, hem de tenir cura amb les orientacions de S_0 (cap a dalt) i S_5 (cap a baix). Si fem el càlcul per la definició hem de recórrer C_0 en sentit antihorari i C_5 en sentit horari (mirant-les des de dalt).

EQUACIONS DIFERENCIALS ORDINÀRIES (EDOs)

- Són les mateixes òrbites, però les seves respectives trajectòries les recorren en sentit contrari.
 - Són les mateixes òrbites, però les seves respectives trajectòries les recorren a diferent velocitat tot i que en el mateix sentit.
- Els punts amb velocitat horitzontal estan situats sobre l'eix horitzontal $\{y = 0\}$ o la recta vertical $\{x = 1\}$, mentre que els punts amb velocitat vertical estan situats sobre l'eix vertical $\{x = 0\}$ o la recta horitzontal $\{y = 1\}$. Les trajectòries del primer quadrant giren en sentit antihorari al voltant del punt $(1, 1)$.
- No. Com que la trajectòria $(x(t), y(t)) \equiv (0, 0)$ és una solució del sistema, pel teorema d'existència i unicitat de solucions no pot existir una altra solució que passi per l'origen.
 - La trajectòria es mou inicialment cap avall.
 - El lloc geomètric està format per la recta horitzontal $y = 0$, les dues rectes verticals $x = \pm 1$ i la gràfica de la funció $y = 2x/(1 - x^2)$.
- La funció constant $x(t) \equiv x_0$ compleix l'EDO si i només si $x_0 = 0$.
 - Si $x_0 = t_0 > 0$, $x(t)$ té un mínim local estricte en $t = t_0$.
 - Si $x_0 = t_0 < 0$, $x(t)$ té un màxim local estricte en $t = t_0$.
- $x(t)$ és creixent en $t = 0$, mentre que $y(t)$ i $z(t)$ tenen un màxim local estricte en $t = 0$.
 - Els punts d'equilibri són $x_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Si denotem $I_n = (x_n, x_{n+1})$ els intervals delimitats pels punts d'equilibri, veiem que la solució $x(t)$ creix quan està continguda en I_n amb n parell, però decreix si n és senar. Aleshores els punts d'equilibri x_n són repulsors si n és parell i atractors si n és senar.
 - No, ja que qualsevol solució no constant està confinada entre dues posicions d'equilibri.
 - No, ja que qualsevol solució no constant està confinada entre dues posicions d'equilibri, tendint a una d'elles quan $t \rightarrow \infty$ i a l'altra quan $t \rightarrow -\infty$.
 - Múltiples enters de 2π .
- Hi ha tres punts d'equilibri: $(0, 0)$, $(1/2, 0)$ i $(1, 0)$. El segon és inestable no repulsor, els altres dos són atractors. Les conques d'atracció dels punts $(0, 0)$ i $(1, 0)$ són els semiplans $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1/2\}$ i $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1/2\}$, respectivament. Els punts situats sobre la recta $x = 1/2$ són els únics que tendeixen al punt d'equilibri intermedi.
- Si $X(t)$ és una matriu fonamental qualsevol, aleshores la solució general és $\mathbf{x}_h(t) = X(t)\mathbf{c}$. Per tant, és suficient calcular matrius fonamentals:

$$(a) \quad X(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-t} & e^{-2t} \\ -2e^{-t} & -e^{-2t} \end{pmatrix},$$

$$(b) \quad X(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos 2t & 2 \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t & -(\sin 2t + \cos 2t) \end{pmatrix} e^{-t},$$

(c) $X(t) = \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ t & 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$

9. L'única solució del sistema fitada per a tot $t \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{x}(t) \equiv 0$. La solució del PVI és $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} + 2e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$

10. (a) $x(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-4t}).$
 (b) $x(t) = e^{-2t}.$
 (c) $x(t) = e^{-2t} \cos t.$

11. (a) $\mathbf{x}_g(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t - \begin{pmatrix} 15 + 11t \\ 10 + 11t \end{pmatrix},$ amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures.
 (b) $\mathbf{x}_g(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 3 + 4t \\ 3 + 2t \end{pmatrix} e^t,$ amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures.
 (c) $\mathbf{x}_g(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} t e^t,$ amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures.

12. Busquem una solució particular constant: $\mathbf{x}_p(t) \equiv \mathbf{v}$, i obtenim $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$ La solució del sistema homogeni és $\mathbf{x}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$ amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures. Finalment, la solució general és $\mathbf{x}_g(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{v}.$

14. La solució general és $\mathbf{x}_h(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ c_1(\sin t - \cos t) - c_2(\sin t + \cos t) \end{pmatrix} e^t,$ amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures. Existeixen solucions no trivials si i només si $L = L_n = 3\pi/4 + n\pi$, per a $n \geq 0$.

16. (a) Node propi repulsor, expandeix àrea. direcció lenta $\mathbf{v}_1 = (1, 3)$, direcció ràpida $\mathbf{v}_2 = (1, 1).$
 (b) Sella, expandeix àrea, direcció de sortida $\mathbf{v}_1 = (0, 1)$, direcció d'entrada $\mathbf{v}_2 = (1, -1).$
 (c) Focus repulsor, expandeix àrea, gir antihorari.
 (d) Centre, preserva àrea, gir antihorari.
 (e) Node impropri atractor, contrau àrea, única direcció d'entrada $\mathbf{v} = (1, 1).$
 (f) Sistema degenerat inestable, expandeix àrea, direcció recta punts d'equilibri $\mathbf{v}_1 = (0, 1)$, direcció de sortida $\mathbf{v}_2 = (1, 1),$ trajectòries són paral·leles a la direcció de sortida.

18. Escrivint $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$ una possible condició suficient és $c < 0$. Una altra és $b > 0$.

19. Una condició necessària i suficient és que A no sigui diagonal.

20. (a) Si i només si $\mu = -2$. (b) Mai. (c) Si i només si $\beta = -(\mu + \sqrt{\mu^2 + 1})\alpha.$

21. Aquest sistema lineal és:

- un focus atractor si $\mu < 0$;
- un centre (E, però no AE) si $\mu = 0$;
- un focus repulsor si $\mu \in (0, 1)$;
- un node impropri repulsor si $\mu = 1$;
- un node propi repulsor si $\mu > 1$.

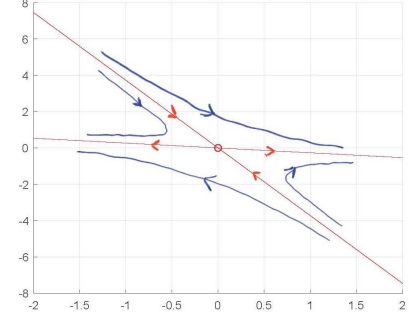
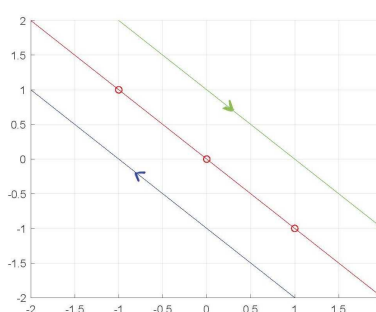
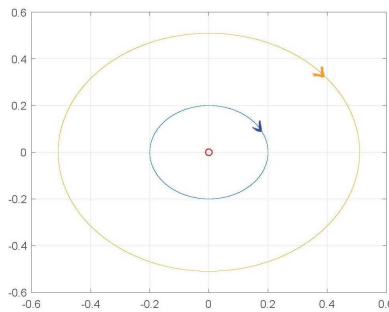
Existeixen dos valors de bifurcació: $\mu = 0, 1$, però l'estabilitat només canvia per a $\mu = 0$.

23. Els valors propis són reals: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ i $\lambda_3 = 1$. El sistema és inestable però no repulsor, ja que $\lambda_3 > 0$ però $\lambda_{1,2} < 0$. A més, contrau volum ja que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -2 < 0$. Els vectors propis són $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$ i $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 1)$. Per tant, la solució general del sistema és

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^t \\ y(t) &= c_2 e^{-t} + 2c_3 e^t \\ z(t) &= c_3 e^t \end{aligned} \right\},$$

on els coeficients $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ són lliures. Sigui $r_j = [\mathbf{v}_j]$ la recta que passa per l'origen amb direcció $\mathbf{v}_j$. Com que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$, sabem que r_1 és la recta d'entrada ràpida, r_2 és la recta d'entrada lenta i r_3 és la recta de sortida. El pla horitzontal $\Pi = \{z = 0\}$ conté les dues rectes d'entrada, és per tant un pla invariant d'entrada i el sistema 2D sobre Π és un node propi atractor, ja que té dues rectes d'entrada de valors propis diferents. Les trajectòries sobre Π no contingudes en les rectes d'entrada tendeixen a l'origen tangencialment a la recta d'entrada lenta r_2 . Existeixen uns altres dos plans invariants: els determinats per la recta de sortida r_3 i qualsevol de les rectes d'entrada. Sobre aquests plans el sistema inicial és una sella, ja que té una direcció d'entrada i una altra de sortida.

- | $\mu < -1$ | $\mu = -1$ | $-1 < \mu < 1$ | $\mu = 1$ | $\mu > 1$ |
|-----------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| $D < 0$ | $D = 0$ | $D > 0$ | $D = 0$ | $D < 0$ |
| Sella
Inestable
no repulsor | Degenerat
Inestable
no repulsor | Centre
Estable
no atractor | Degenerat
Inestable
no repulsor | Sella
Inestable
no repulsor |
25. (a)
- $\mu = 0$. El sistema és un *centre* i totes les trajectòries són periòdiques de període $T = 2\pi$. El sentit de gir és horari. Les trajectòries són circumferències centrades a l'origen i recorregudes en sentit horari.
 - $\mu = 1$. El sistema és *degenerat inestable*. El sistema és inestable perquè les trajectòries no estan acotades quan $t \rightarrow +\infty$.
 - $\mu = 2$. El sistema és una *sella*. Un vector propi de valor propi $\sqrt{3}$ és $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}-2 \end{pmatrix}$ i la recta $[\mathbf{v}_1]$ és la recta invariant de sortida. Un vector propi de valor propi $-\sqrt{3}$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ i la recta $[\mathbf{v}_2]$ és la recta invariant d'entrada. Les trajectòries que comencen al primer quadrant no poden passar pel tercer com es veu al croquis.



Croquis del retrat de fase del problema 25 (casos $\mu = 0$, $\mu = 1$ i $\mu = 2$)

- 26.
- $a < 0$. Sella. Inestable no repulsor.
 - $a = 0$
 - $b < 0$. Degenerat inestable no repulsor. Recta de punts d'equilibri i trajectòries no trivials que són semirectes amb origen un punt d'equilibri.
 - $b = 0$. Degenerat inestable no repulsor. Recta de punts d'equilibri i trajectòries no trivials que són rectes paral·leles a la recta de punts d'equilibri.
 - $b > 0$. Degenerat estable no atractor. Recta de punts d'equilibri i trajectòries no trivials que són semirectes amb final en un punt d'equilibri.
 - $a > 0$.
 - $b < -2\sqrt{a}$. Node propi repulsor.
 - $b = -2\sqrt{a}$. Node impropri repulsor.
 - $-2\sqrt{a} < b < 0$. Focus repulsor.
 - $b = 0$. Centre (estable no atractor).
 - $0 < b < 2\sqrt{a}$. Focus atractor.
 - $b = 2\sqrt{a}$. Node impropri atractor.
 - $b > 2\sqrt{a}$. Node propi atractor.
27. (a) Els punts d'equilibri són $(\pm 4, \mp 3)$, $(\pm 3, \mp 4)$.
Els punts $(\pm 4, \mp 3)$ són inestables, el punt $(3, -4)$ és atractor i el punt $(-3, 4)$ és repulsor. Les àrees s'expandeixen al semiplà superior ($y > 0$) i es contrauen al semiplà inferior ($y < 0$).
28. (a) Atractor, ja que $W(x, y) = -3x^4 - 7y^4$ és definida negativa a l'origen.
(b) Atractor, ja que $W(x, y) = ((x+y)^2 - 1)(x^2 + y^4)$ és definida negativa a l'origen.
(c) Atractor, ja que $W(x, y) = -(x^2 - 2y^2)^2$ és semi-definida negativa a l'origen i, a més, el camp de vectors és transversal a les rectes $\{y = \pm x/\sqrt{2}\}$ que formen les corbes de nivell zero de $W(x, y)$.
(d) Repulsor, ja que $W(x, y) = 2(x^2 + y^2)^2$ és definida positiva a l'origen.
- La linealització no decideix l'estabilitat en cap d'aquests casos: en (a) el sistema linealitzat és un centre, i en (b,c,d) obtenim sistemes linealitzats degenerats sense valors propis positius. De fet, la matriu del sistema linealitzat per a (c,d) és la matriu zero.
29. Si prenem $a = 2$ i $b = 1$, ens queda $W(x, y) = 2\mu(ax^4 + by^4)$. Deduïm: si $\mu > 0$, $W(x, y)$ és definida positiva i l'origen és repulsor; si $\mu < 0$, $W(x, y)$ és definida negativa i l'origen és atractor; i si $\mu = 0$, $W(x, y) \equiv 0$ i l'origen és estable però no atractor, ja que $W(x, y)$ és una integral primera del sistema. No és possible aplicar el mètode de linealització, ja que la matriu del sistema linealitzat és nul·la.

30. El cas $b = 0$ és el cas del pèndol sense fricció i està estudiat als apunts de teoria de l'assignatura (pag 36). El cas $b > 0$ és el cas del pèndol amb fricció (problema 39).
31. (a) El diagrama de bifurcació el podem veure a la figura. Els valors $\mu = \pm 1$ corresponen a nodes impropis. El color blau/verd/vermell denota un sistema linealitzat atractor/estable/repulsor.



Diagrama de bifurcació del sistema linealitzat del problema 31 per a $\mu \in \mathbb{R}$.

- (b) En aquest sistema no lineal, l'origen és atractor/repulsor quan el paràmetre μ és negatiu/positiu, independentment del valor de α . La linealització no decideix l'estabilitat quan $\mu = 0$.
- (c) Si prenem $a = 1$ i $b = 4$, ens queda $W(x, y) = 2\alpha(x^4 + 4y^6)$, i per tant: si $\alpha > 0$, $W(x, y)$ és definida positiva i l'origen és repulsor; si $\alpha < 0$, $W(x, y)$ és definida negativa i l'origen és atractor; i si $\alpha = 0$, $W(x, y) \equiv 0$ i l'origen és un centre (de fet, un centre lineal), estable però no atractor.
32. (a) La primera equació del sistema s'obté aïllant x' de la definició de y . La segona equació és $y' = x'' + (\mu + 3x^2)x' = -x$.
- (b) El diagrama de bifurcació és el que podem veure a la figura. Els valors $\mu = \pm 2$ corresponen a nodes impropis. El color blau/verd/vermell denota un sistema linealitzat atractor/estable/repulsor.



Diagrama de bifurcació del sistema linealitzat del problema 32 per a $\mu \in \mathbb{R}$.

Per tant, l'origen és un punt d'equilibri repulsor/attractor quan el paràmetre μ és negatiu/positiu. La linealització no decideix l'estabilitat quan $\mu = 0$.

- (c) $W(x, y)$ és semidefinida negativa i l'origen és estable. De fet, podem afirmar que l'origen és atractor, ja que el camp de vectors és transversal a la recta $\{y = 0\}$ on s'anul·la $W(x, y)$.
- (d) Si $\mu \geq 0$, aleshores l'origen del sistema 2D és atractor i $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$ per a tota trajectòria que comenci suficientment a prop de l'origen. Així tenim $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ i podem dir que l'origen és atractor també per a l'equació original. Un raonament anàleg s'aplica en el cas $\mu < 0$.
33. (a) Els tres punts crítics són l'origen i $(\pm a, \pm a, b)$, amb $a = \sqrt{\beta(\rho - 1)}$ i $b = \rho - 1$.
- (b) La matriu del sistema linealitzat a l'origen té els valors propis següents:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(\rho - 1)}}{2}, \quad \lambda_3 = -\beta.$$

Com que $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2, \lambda_3 < 0$, l'origen és inestable però no repulsor.

- (c) L'origen és una sella, amb una dimensió inestable (de sortida) i dues dimensions estables (d'entrada). El eix vertical és una recta invariant d'entrada. Les trajectòries prop de l'origen no giren, ja que tots els valors propis són reals.
- (d) La divergència del camp vectorial és sempre negativa, i per tant contrau volums.
34. (a) Els punts d'equilibri compleixen $x_1 = -ax_2$, $x_3 = -x_2$ i $a(x_2)^2 + bx_2 + c = 0$.
- (b) Quan $a = c = 0$ i $b \neq 0$, l'origen és l'únic punt d'equilibri. Si $b < 0$, tenim un valor propi positiu i dos valors propis impaginaris purs, i deduïm que l'origen és inestable per al sistema no lineal; però si $b \geq 0$, la linealització no decideix l'estabilitat de l'origen.
- (c) Quan $a = b = c = 0$, existeixen infinits punts d'equilibri: $(0, x_2, -x_2)$, x_2 lliure. Si $x_2 > 1$, el punt $(0, x_2, -x_2)$ és inestable però no repulsor en el sistema no lineal. En cas contrari, la linealització no decideix l'estabilitat del punt $(0, x_2, -x_2)$ en el sistema no lineal.
- (d) La trajectòria s'allunya de l'origen.
35. (a) El sistema linealitzat té valors propis $\lambda_{1,2} = \pm i$, i per tant la linealització no decideix l'estabilitat.
- (b) La derivada temporal de la funció $V(x, y)$ és idènticament nul·la.
- (c) El punt $(1, 1)$ és un centre no lineal, per tant, totes les trajectòries del sistema no lineal properes al punt $(1, 1)$ giren al seu voltant (en sentit antihorari, vegeu problema 2) i són periòdiques. A més, el període d'aquestes trajectòries periòdiques tendeix a $T = 2\pi / |\operatorname{Im} \lambda_{1,2}| = 2\pi$ quan ens apropem al punt $(1, 1)$.
- (d) Les àrees s'expandeixen al semiplà $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$ i es contrauen al semiplà $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$.
36. (a) La linealització no decideix l'estabilitat de l'origen per al sistema no lineal.
- (b) Prenent $c_2 = 2c_1$, $c_3 = c_1$ i $c_1 > 0$ arbitrari, resulta que l'origen és un repulsor si $\mu > 0$, un atractor si $\mu < 0$ i estable però no atractor si $\mu = 0$.
- (c) Distingim tres casos.
- $\mu > 0$ és creixent en $t = 0$;

- $\mu < 0$ és decreixent en $t = 0$; i
- $\mu = 0$ té un màxim local estricta en $t = 0$.

37. (a) A és un focus atractor, B és una sella i C és un focus repulsor.
- (b) L'únic punt d'equilibri atractor és A , i la seva conca de atracció és la regió a l'esquerra de la corba invariant estable de la sella B .
- (c) El punt de sella B no és un repulsor, ja que existeixen trajectòries que tendeixen a aquest punt quan $t \rightarrow \infty$. Per tant, l'únic repulsor és C . Pel teorema d'existència i unicitat, les trajectòries que comencen prop de C no poden superar la barrera que representa la trajectòria marcada en traç gruixut que el rodeja completament. Per tant, les trajectòries que comencin prop de C no poden aproximar-se ni a A ni a B .
- (d) La trajectòria marcada en traç gruixut és l'única trajectòria periòdica no constant que apareix a la figura. És atractora, ja que totes les trajectòries properes hi tendeixen quan $t \rightarrow \infty$.
38. La velocitat terminal és $v_\infty = \sqrt{mg/k}$.
39. (a) És una conseqüència de la segona llei de Newton. Angle inicial $\theta_0 = \theta(0)$ i velocitat inicial $\omega_0 = \theta'(0)$.
- (b) Introduint la velocitat angular $\omega = \theta'$, reescrivim l'EDO de segon ordre com el següent sistema autònom no lineal:

$$\begin{cases} \theta' &= \omega, \\ \omega' &= -a\omega - c \sin \theta, \end{cases}$$

on $a = k/m$ i $c = g/l$.

- (c) Els punts d'equilibri del sistema són $(\theta, \omega) = (n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$.
Si n és senar, el sistema linealitzat és una sella i, per tant, la posició de equilibri superior del pèndol és inestable.
En canvi, si n és parell, la posició d'equilibri inferior és un atractor, per al pèndol amb fricció.
- (d) La derivada temporal de l'energia mecànica total és no positiva sempre i és nul·la si i només si $\omega = 0$. Per tant, l'energia només es manté constant sobre les posicions d'equilibri.
- (e) La divergència del camp vectorial associat al sistema és sempre negativa.
40. (a) Obtenim el següent sistema autònom no lineal

$$\begin{cases} x' &= v, \\ v' &= F(x). \end{cases}$$

- (b) La derivada temporal de l'energia és idènticament nul·la:
Per tant, les trajectòries del sistema estan contingudes en les corbes de nivell

$$C(E_0) = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 : E(x, v) = E_0\} = \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^2 : v = \pm 2\sqrt{E_0 - U(x)} \right\}.$$

L'arrel quadrada només està definida quan $U(x) \leq E_0$ i totes les corbes de nivell són simètriques respecte l'eix horitzontal. La partícula es mou cap a la dreta/esquerra en el semiplà superior/inferior. D'altra banda, tenim

$$E(x(t), v(t)) = v(t)^2/2 + U(x(t)) = E_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

i deduïm que $U(x(t)) = E_0 - v(t)^2/2 \leq E_0$ per a tot t .

- (c) La condició necessària i suficient per tal que (x_*, v_*) sigui un punt d'equilibri del sistema és $\frac{dU}{dx}(x_*) = 0$, $v_* = 0$. La matriu del sistema linealitzat en el punt d'equilibri $(x, v) = (x_*, 0)$ és $A(x_*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{d^2U}{dx^2}(x_*) & 0 \end{pmatrix}$.
- Si $\frac{d^2U}{dx^2}(x_*) < 0$, el sistema linealitzat és una sella, i per tant la posició d'equilibri $x = x_*$ és inestable.
- Si $\frac{d^2U}{dx^2}(x_*) > 0$, el sistema linealitzat és un centre i la linealització no decideix l'estabilitat en $x = x_*$.
Per tant, usem l'energia com a funció de Lyapunov i veiem que la posició d'equilibri $x = x_*$ correspon a un centre no lineal, estable però no atractor.
- (d) El sistema té 3 punts d'equilibri: $(\pm 1, 0)$ que són centres no lineals, i $(0, 0)$ que és inestable.
Dibuixem les corbes de nivell $C(E_0)$. Mirant la gràfica del potencial $U(x)$ distingim 4 casos: (1) si $E_0 = 0$, aleshores $C(E_0) = \{(\pm 1, 0)\}$; (2) si $E_0 \in (0, 1)$, aleshores $C(E_0)$ conté dues corbes tancades al voltant dels punts $(\pm 1, 0)$; (3) si $E_0 = 1$, aleshores $C(E_0)$ té la forma del signe '∞', amb el punt d'equilibri inestable situat a l'encreuament, ja que

$$C(1) = \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^2 : v = \pm 2\sqrt{1 - (1 - x^2)^2} \right\} = \left\{ (x, \pm 2|x|\sqrt{2 - x^2}) : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \right\};$$

i (4) si $E_0 > 1$, aleshores $C(E_0)$ és una corba tancada al voltant del llaç anterior. La partícula mai no pot escapar a $\pm\infty$, ja que cap de les corbes de nivell ho fa. Així doncs, totes les solucions són fitades.

- (e) El sistema té 2 punts d'equilibri: $(0, 0)$ que és inestable i $(1, 0)$ que és un centre no lineal. Mirant la gràfica del potencial $U(x)$, veiem com són les corbes de nivell de l'energia $E(x, v)$: (1) si $E_0 \in (-\infty, -1/6] \cup (0, \infty)$, aleshores $C(E_0)$ és una corba oberta que escapa a ∞ quan $x \rightarrow -\infty$; (2) si $E_0 \in (-1/6, 0)$, aleshores $C(E_0)$ conté una corba tancada al voltant del punt $(1, 0)$ i una corba oberta que escapa a ∞ quan $x \rightarrow -\infty$; i (3) si $E_0 = 0$, aleshores $C(E_0)$ té forma d'un llac (semblant a una 'α' invertida) al voltant del punt d'equilibri estable $(1, 0)$, amb una autointersecció al punt d'equilibri inestable $(0, 0)$.

Finalment, existeix alguna solució fitada d'energia E_0 si i només si la corba de nivell $C(E_0)$ conté alguna corba tancada, és a dir, quan $-1/6 \leq E_0 \leq 0$.

42. (a) La solució general és $c_g(t) = q/p + ke^{-pt}$, amb $k \in \mathbb{R}$ lliure, i veiem que $\lim_{t \rightarrow \infty} c_g(t) = q/p$.
 (b) Si $l \neq p$, llavors $c_g(t) = ke^{-pt} + \beta e^{-lt}/(p-l)$. Si $l = p$, llavors $c_g(t) = (k + \beta t)e^{-pt}$. En ambdós casos, $k \in \mathbb{R}$ és lliure i $\lim_{t \rightarrow \infty} c_g(t) = 0$.
 (c) Els cabals de sortida són r_1, r_2 i $r_3 = r_1 + r_2$. Les quantitats de sal relacionades amb els dos primers dipòsits a l'instant t són les següents: $V_j c_j(t)$ a l'interior, $r_j e_j$ entrada per unitat de temps i $r_j c_j(t)$ sortida per unitat de temps. Per tant, $V_j c'_j(t) = r_j e_j - r_j c_j(t)$. Així doncs, obtenim les EDOs lineals de primer ordre

$$c'_j(t) + p_j c_j(t) = q_j, \quad p_j = r_j/V_j, \quad q_j = e_j p_j, \quad j = 1, 2.$$

Les quantitats al tercer dipòsit són: $V_3 c_3(t)$ a l'interior, $r_1 c_1(t) + r_2 c_2(t)$ entrada per unitat de temps i $r_3 c_3(t)$ sortida per unitat de temps. Per tant, $V_3 c'_3(t) = r_1 c_1(t) + r_2 c_2(t) - r_3 c_3(t)$. Així doncs, obtenim l'EDO lineal de primer ordre

$$c'_3(t) + p_3 c_3(t) = r_1 c_1(t)/V_3 + r_2 c_2(t)/V_3, \quad p_3 = r_3/V_3.$$

- (d) $\lim_{t \rightarrow \infty} c_1(t) = e_1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} c_2(t) = e_2$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} c_3(t) = (r_1 e_1 + r_2 e_2)/(r_1 + r_2)$, és a dir, la concentració als dos primers dipòsits tendeix a igualar-se a la concentració de les seves úniques entrades, ja que flueixen amb concentració constant, mentre que la concentració del tercer dipòsit tendeix a una mitjana ponderada de les concentracions límit de les seves dues entrades. Els coeficients que quantifiquen la ponderació són els respectius cabals d'entrada.

43. La quantitat de contaminant, per unitat de temps, que entra i surt de cada llac són:

- per al llac Erie, $r_E e_E$ i $r_E c_E(t)$ respectivament;
- per al llac Ontario, $r_E c_E(t) + (r_O - r_E) e_O$ i $r_O c_O(t)$ respectivament.

Per tant, obtenim el següent sistema lineal a coeficients constants:

$$\begin{cases} c'_E &= r_E (e_E - c_E)/V_E, \\ c'_O &= ((r_O - r_E) e_O + r_E c_E - r_O c_O)/V_O. \end{cases}$$

Les concentracions tendiran a igualar-se amb les respectives concentracions d'entrada: e_E per al llac Erie i $(r_E e_E + (r_O - r_E) e_O)/r_O$ per al llac Ontario. Podríem interpretar els quocients p_E i p_O com la proporció deigua que es renova en un any a cada llac, tot i que no és exactament així. Finalment, la solució general obtinguda amb els valors concrets és

$$c_E(t) = c_1 e^{-p_E t} + e_E, \quad c_O(t) = c_1 \alpha e^{-p_E t} + c_2 e^{-p_O t} + (85e_E + 14e_O)/99.$$

on $p_E = 85/116 \approx 0.73$, $p_O = 33/131 \approx 0.25$ i $\alpha = \frac{r_E p_O}{r_O (p_O - p_E)} = -9860/21921 \approx -0.45$. Com més grans són p_E i p_O , més ràpid s'estabilitzen les concentracions de contaminants. És lògic que sigui així?

44. L'equació és $r' = -k/\rho$ i la solució general és $r(t) = r_0 - kt/\rho$. És a dir, el radi de cada gra decreix a velocitat constant. Les unitats SI de k són $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$, ja que k quantifica la massa dissolta per unitat de temps i superfície.
45. L'equació és $N' = -\lambda N$ i la seva solució general és $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, essent N_0 el nombre inicial d'àtoms. La relació és $\lambda t_{1/2} = \ln 2$.
46. La data aproximada és $5730(\ln 6.68 - \ln 0.97)/\ln 2 = 15951$ anys abans de 1950, és a dir, cap a l'any 14000 aC.
47. L'equació és $mv' = \rho S v(v_c - v)$, on m és la massa de la nau, ρ és la densitat de la matèria estel·lar a l'espai i S és la superfície escombrada pel camp magnètic de la nau. És una equació logística, ja que v_c és una constant. Per tant, $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v_c$, suposant que $v(0) > 0$.
48. L'equació és $md'' = k/d^2$, on m és la massa de la vela i $k > 0$ és una constant de proporcionalitat, ja que la quantitat de fotons és inversament proporcional al quadrat de la distància. No és cert que la velocitat disminueixi en allunyar-se del Sol, ja que $d''(t) > 0$ i per tant la velocitat $d'(t)$ és estrictament creixent, tot i que es pot comprovar que tendeix a una velocitat límit.
49. (a) La matriu del sistema linealitzat a l'origen és $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$, i deduïm que el sistema linealitzat és una sella, i la seva direcció d'entrada/sortida és l'eix vertical/horitzontal.

- (b) L'altre punt d'equilibri és $(x_0, y_0) = (c/d, a/b)$, la matriu del sistema linealitzat en aquest punt és $A = \begin{pmatrix} 0 & -bc/d \\ da/b & 0 \end{pmatrix}$, i deduïm que és un centre de període $2\pi/\sqrt{ac}$ i sentit de gir antihorari.
- (c) L'origen és inestable per al sistema no lineal. La linealització no decideix l'estabilitat del punt $(c/d, a/b)$.
- (d) Una possible tria és $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ i $\delta = d$.
- (e) Totes les trajectòries són contingudes en corbes de nivell de $V(x, y)$, que són corbes tancades al voltant de $(c/d, a/b)$, que correspon a un centre no lineal. Aquestes corbes es recorren en sentit antihorari, amb un període que tendeix a $2\pi/\sqrt{ac}$ quan ens apropem al punt $(c/d, a/b)$.

50. (a) Els punts d'equilibri són $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 2)$ i $C = (1/2, 1/2)$, i les matrius dels sistemes linealitzats en aquests punts són

$$M_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad M_A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}, \quad M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad M_C = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -3/8 & -1/8 \end{pmatrix}.$$

Els valors propis de M_O són $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 1/2$, per tant el punt O és un node propi repulsor. Els valors propis de M_A són $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = -1/4$, i valors propis de M_B són $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = -1/2$, per tant A i B són nodes propis atractors. Finalment, els valors propis de M_C són $\lambda_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{57})/16$, i per tant el punt C és una sella (inestable). La linealització decideix l'estabilitat a tots quatre casos.

- (b) L'eix horitzontal és invariant (ja que tenim $y' = 0$ sobre aquest eix). L'eix vertical també és invariant (ja que $x' = 0$). Per tant, no és possible sortir del primer quadrant degut al teorema d'existència i unicitat de solucions. Les rectes són $r = \{y = 1 - x\}$ i $s = \{y = 2 - 3x\}$. La recta r passa pels punts $A = (1, 0)$ i $D = (0, 1)$, i la recta s passa pels punts $E = (2/3, 0)$ i $B = (0, 2)$; ambdues rectes s'intersequen al punt $C = (1/2, 1/2)$. A la regió quadrangular de vèrtexs O , A , B i C , tenim $x', y' > 0$, i per tant ambdues poblacions creixen. A la regió triangular de vèrtexs B , D i C , tenim $x' < 0$ i $y' > 0$, i per tant la segona espècie guanya la competició. A la regió triangular de vèrtexs A , E i C tenim $x' > 0$ i $y' < 0$, i per tant la primera espècie guanya la competició. Finalment, a la regió no fitada que hi ha per damunt de les rectes r i s , tenim $x', y' < 0$, i per tant ambdues poblacions decreixen.
- (c) La corba invariant estable del punt de sella C divideix el primer quadrant en dues parts: si comencem a la part inferior la primera espècie guanya, si comencem a la part superior la segona espècie guanya, i si comencem exactament sobre la corba tendim a un equilibri inestable.

51. Les concentracions dels 3 productes compleixen el següent sistema no lineal:

$$\begin{cases} x'_1 &= -k_1 x_1 + k_2 x_2 x_3, \\ x'_2 &= k_1 x_1 - k_2 x_2 x_3 - k_3 x_2^2, \\ x'_3 &= k_3 x_2^2. \end{cases}$$

A l'equilibri només queda el producte C i és un equilibri estable, ja que $(x_1 + x_2 + x_3)' = 0$ (la quantitat total dels tres productes no varia), però en canvi $x'_3 = k_3 x_2^2 \geq 0$ (la quantitat de producte C mai no decreix). Repte: Intenteu aplicar el mètode de linealització.

EQUACIONS EN DERIVADES PARCIAIS (EDPs)

1. Tenim:

$$u_x = w_x e^w, \quad u_{xx} = (w_{xx} + (w_x)^2) e^w, \quad u_t = w_t e^w = (w_{xx} + (w_x)^2) e^w = u_{xx}.$$

Així doncs, la funció $u(x, t)$ compleix una equació homogènia de la calor 1D amb $k = 1$.

2. N'hi ha prou amb provar que la derivada de la funció $E(t)$ mai no és positiva:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^L u(x, t) u_t(x, t) dx = k^2 \int_0^L u(x, t) u_{xx}(x, t) dx \\ &= k^2 \left[u(x, t) u_x(x, t) \right]_{x=0}^{x=L} - k^2 \int_0^L u_x^2(x, t) dx = -k^2 \int_0^L u_x^2(x, t) dx \leq 0. \end{aligned}$$

$E'(t) \equiv 0 \Leftrightarrow u_x(x, t) \equiv 0 \Leftrightarrow u(x, t) \equiv 0$. És a dir, la funció $E(t)$ és estrictament decreixent, excepte quan ens trobem a l'equilibri tèrmic del problema: $v(x) \equiv 0$.

La interpretació física és que, donat que la calor flueix lliurement i la temperatura es manté igual a zero als dos extrems, la temperatura tendeix al equilibri tèrmic $v(x) \equiv 0$.

3. (a) Derivem la densitat d'energia: $e_t = \rho u_t u_{tt} + \tau u_x u_{xt} = \tau(u_t u_{xx} + u_x u_{tx}) = -f_x$.
- (b) $E'(t) = \int_0^L e_t(x, t) dx = - \int_0^L f_x(x, t) dx = f(0, t) - f(L, t) = 0$.
- (c) $E'(t) = f(0, t) - f(L, t) = 0 \Leftrightarrow u_t(0, t) u_x(0, t) = u_t(L, t) u_x(L, t)$. Per tant, una altra possibilitat és posar condicions de Dirichlet constants. I una altra més són les condicions periòdiques,
- (d) $E(0) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho g(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \tau (f'(x))^2 dx$.

4. $h(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$ (és constant).

5. Aplicant la fórmula de D'Alembert veiem que $u(x, t) = (\sin(x-t) + \sin(x+t))/2 + t + t^2 \sin x$. A continuació, suposem que existeixen unes funcions $p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tals que $u(x, t) = p(x+t) + q(x-t)$. Veiem que

$$p(x) + q(x) = \sin x, \quad p'(x) - q'(x) = 1,$$

i deduïm que $p(x) = (x + \sin x)/2 + k$ i $q(x) = (-x + \sin x)/2 - k$, amb alguna constant de integració $k \in \mathbb{R}$. Però hem arribat a una contradicció, ja que aquestes funcions no compleixen la identitat que estàvem suposant.

6. D'una banda, homogeneïtzant l'EDP ens queda $z(t) = -\sin t$, $w(x) = \cos x$, $f(x) = -\cos x$, $g(x) \equiv 1$, $v(x, t) = t - \cos t \cos x$ i $u(x, t) = u(x, t) + w(x) + z(t) = t - \sin t + (1 - \cos t) \cos x$. D'altra banda, aplicant directament la fórmula de D'Alembert obtenim

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} (\sin s + \cos y) dy \right\} ds = t - \sin t + (1 - \cos t) \cos x.$$

7. (a) $T'(t) = -u_x(0, t)/\pi$.
 (b) $u(x, t) = e^{-9t/4} \sin(3x/2) - e^{-t/4} \sin(x/2)$.
 (c) $T'(t) = (1 - 3e^{-2t})e^{-t/4}/2\pi$ s'anul·la per a $t = t_*$, és negativa si $t < t_*$ i positiva si $t > t_*$.
8. La solució és $u(x, t) = \sin(x+ct) + \sin(x-ct) = 2 \cos(ct) \sin x$. La funció $f(x)$ que fixa la posició inicial ha de ser senar i 2π -periòdica.
9. (a) $T'(t) = 0$.
 (b) Els únics equilibris tèrmics són les temperatures constants.
 (c) La solució formal és

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(k\pi n/L)^2 t} (a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)).$$

Per tant, $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = a_0/2 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$.

- (d) Interpretacions:

La temperatura mitjana es manté constant, ja que els fluxs de calor pels extrems es compensen.

La calor tendeix a distribuir-se uniformement i per això la temperatura tendeix a un valor constant (equilibri tèrmic).

Aquest valor constant coincideix amb la mitjana de la temperatura inicial.

Els exponents $-(k\pi n/L)^2$ de les exponencials són més negatius, i per tant es tendeix més ràpidament al límit, com més grans són la constant k^2 i l'índex n , i com més petita és la longitud L .

10. (a)

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = -\mu u_t + \tau u_{xx} & 0 < x < L & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(x, 0) = 0 & 0 < x < L \\ u(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(L, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

- (b) Quan $\mu = 0$, la vibració de la corda és

$$v(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n \cos(\omega_n t) \sin(n\pi x/L),$$

on $c^2 = \tau/\rho$ i $\omega_n = n\pi c/L$ és la freqüència de vibració del mode normal n -èsim. Quan $L = \pi$ i $f(x) = \sin^3 x = (3 \sin x - \sin 3x)/4$, obtenim

$$v(x, t) = \frac{3}{4} \sin x \cos ct - \frac{1}{4} \sin 3x \cos 3ct.$$

- (c) Quan $0 < \mu \ll 1$, la vibració de la corda és

$$u(x, t) = e^{-kt} \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{\nu_n} (\nu_n \cos(\nu_n t) + k \sin(\nu_n t)) \sin(n\pi x/L)$$

on $c^2 = \tau/\rho$, $2k = \mu/\rho$, $\omega_n = n\pi c/L$ i $\nu_n = \sqrt{\omega_n^2 - k^2}$ és la "freqüència de vibració" del mode normal n -èsim. Aquesta expressió és correcta si i només si $k < \omega_n$ per a tot $n \geq 1$. Per tant, necessitem que $L\mu\sqrt{\rho} < 2\pi\sqrt{\tau}$, i per tant el coeficient de fricció no pot ser massa gran.

Aquesta vibració compleix que $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ per a tot $x \in [0, L]$.

- (d) $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} u(x, t) = v(x, t)$. Les freqüències $\omega_n = n\pi\tau^{1/2}\rho^{-1/2}L^{-1}$ i $\nu_n = \sqrt{\omega_n^2 - k^2}$ són més grans quan la corda és curta (L petita), lleugera (ρ petita), tibant (τ gran), o l'índex n és gran. A més, ν_n decreix quan la fricció augmenta.

11. $u(x, y) = \sum_{n \geq 1} b_n \frac{\sinh(n(2\pi - y))}{\sinh(2\pi n)} \sin nx.$