

SISTEMES AUTÒNOMS: idees bàsiques

Pere Gutiérrez Abril 2020

1 Trajectòries i òrbites, retrats de fase

- Ens centrarem, per simplificar la notació, en el cas de *sistemes 2D*, és a dir, quan el nombre d'EDOs i de funcions incògnites és $n = 2$. Tot i així, els conceptes i propietats que veurem s'apliquen a qualsevol dimensió n .

En general, un sistema d'EDOs 2D té la forma

$$x' = P(t, x, y), \quad y' = Q(t, x, y)$$

o, en notació vectorial, $\mathbf{X}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{X})$, on escrivim:

- * $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ la funció incògnita (vectorial);
- * $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) = (P(t, x, y), Q(t, x, y))$ una funció $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (vectorial) que defineix el sistema d'EDOs, i que suposem de classe $\mathcal{C}^1$ per tal que es compleixi el *teorema d'existència i unicitat*

(també és freqüent escriure aquests vectors com a columnes).

Un sistema d'EDOs s'anomena *autònom* quan la variable independent o temps t no apareix explícitament a les equacions,

$$\boxed{x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y)}$$

és a dir, $\boxed{\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X})}$, i vindrà donat per un *camp vectorial* que dependrà només de les variables espacials, $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (P(x, y), Q(x, y))$, definit en un domini $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$.

- Cada solució $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, s'anomena també una *trajectòria* del sistema, i la podem veure com una corba parametritzada del pla (amb t com a paràmetre). El seu conjunt imatge $\mathbf{X}(I) \subset \mathcal{U}$ s'anomena una *òrbita* del sistema, i és la corba vista com a conjunt o objecte geomètric. Si bé que cal tenir clara la distinció entre trajectòries i òrbites, és inevitable cometre algun abús de llenguatge entre els dos conceptes.

Exemple 1. Considerem el sistema $x' = -x/2 - y$, $y' = x - y/2$, que ve donat pel camp vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (-x/2 - y, x - y/2)$. Una de les seves trajectòries és l'espiral logarítmica $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t)) = (e^{-t/2} \cos t, e^{-t/2} \sin t)$. A la figura 1 podem veure, en color vermell, l'òrbita recorreguda representada sobre el pla. Aquesta òrbita és, de fet, la projecció sobre el pla xy de la gràfica $x = x(t)$, $y = y(t)$ que podem veure en color blau a la figura 2, on hem afegit t com a tercera coordenada.

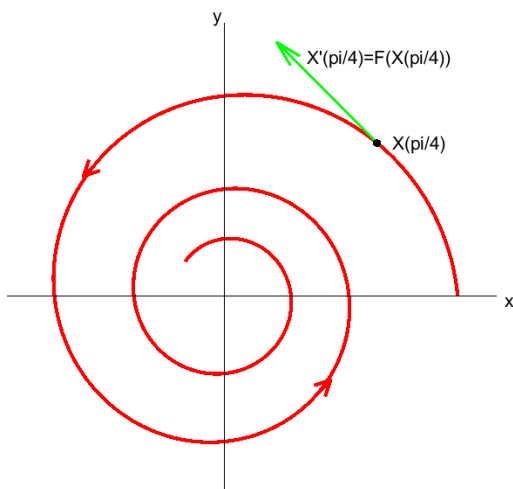


Figura 1

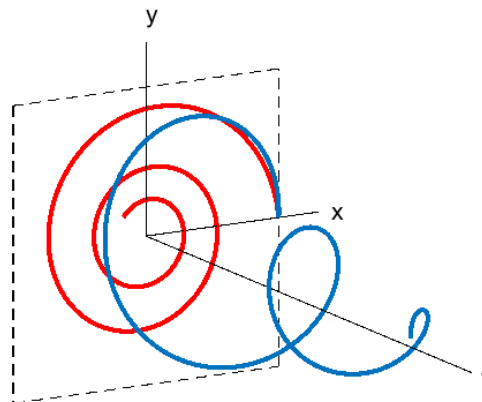


Figura 2

- Per entendre la relació entre les trajectòries i el camp vectorial, observem que la igualtat

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)), \quad t \in I,$$

ens diu que, per cada punt per on passa la trajectòria $\mathbf{X}(t)$, el seu vector tangent $\mathbf{X}'(t)$ ha de coincidir amb el camp vectorial avaluat en aquest punt, $\mathbf{F}(\mathbf{X}(t))$.

Tornant a l'exemple 1, a la figura 1 veiem marcat el punt $\mathbf{X}(\pi/4) = (e^{-\pi/8}\sqrt{2}/2, e^{-\pi/8}\sqrt{2}/2)$ i el vector tangent $\mathbf{X}'(\pi/4) = (-3e^{-\pi/8}\sqrt{2}/4, e^{-\pi/8}\sqrt{2}/4)$, que coincideix amb $\mathbf{F}(\mathbf{X}(\pi/4))$. Podríem dir el mateix per a qualsevol altre punt de la trajectòria.

- En el cas de sistemes autònoms, les propietats següents juguen un paper molt important.
 - * Donada una trajectòria $\mathbf{X}(t)$, tota *translació* en el temps $\mathbf{X}(t-t^*)$ és també una altra trajectòria, que recorre la mateixa òrbita (a la figura 2, si desplaçem la gràfica blava una distància t^* en la direcció de la coordenada t obtenim la gràfica d'una altra trajectòria, que es projecta sobre la mateixa òrbita al pla xy).
 - * Per cada punt del domini $\mathcal{U}$ passa *una única òrbita*, ja que si dues trajectòries $\mathbf{X}^{(1)}(t)$ i $\mathbf{X}^{(2)}(t)$ passen per un mateix punt en instants t_1 i t_2 , llavors una serà translació en el temps de l'altra, separades un interval de temps $t^* = t_2 - t_1$ (aquí s'ha aplicat el teorema d'existència i unicitat).

La primera propietat fa que, a la pràctica, quan plantegem un *problema de valors inicials* (PVI) en un sistema autònom, podem restringir-nos a l'instant 0 quan imposen una condició inicial (CI):

$$\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}^{(0)}.$$

Aquestes propietats suggereixen que, com que el camp vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ no depèn de t , qualsevol partícula que recorri el pla segons aquest camp de velocitats ho farà de la mateixa manera, independentment de si ho fa més aviat o més tard. Això és fals en el cas no autònom $\mathbf{F}(t, \mathbf{X})$, en què el camp de velocitats va variant en el temps.

- El dibuix o representació de totes les òrbites d'un sistema autònom sobre el domini $\mathcal{U}$ rep el nom de *retrat de fase* del sistema. Per determinar-lo amb precisió, caldria trobar les solucions del sistema (analíticament o numèricament), però si representem el camp vectorial en una bona xarxa de punts podem tenir una idea aproximada de com serà el seu retrat de fase.

Exemple 2. Per al sistema $x' = -x$, $y' = y$ mostrem a la figura 3 el camp vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (-x, y)$, el qual ens suggereix que el retrat de fase pot ser alguna cosa semblant a la figura 4.

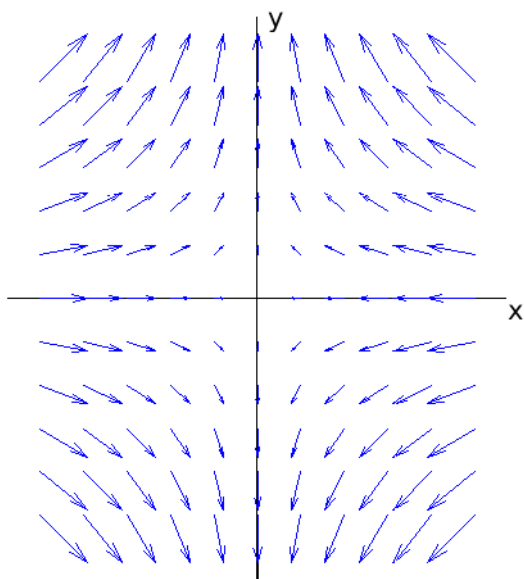


Figura 3

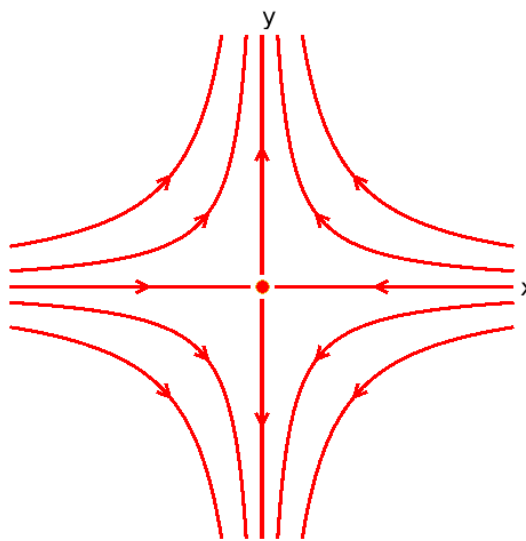


Figura 4

Per comprovar-ho, trobem totes les solucions del sistema, molt fàcil de resoldre perquè és *desacoblat*: a la primera EDO només intervé $x(t)$ i a la segona només $y(t)$, i a més són de resolució immediata. Així, si imposem una CI $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ la solució és $(x(t), y(t)) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^t)$. Per tant, i diferenciant els casos $x_0 y_0 \neq 0$; $y_0 = 0$ (amb $x_0 \neq 0$); $x_0 = 0$ (amb $y_0 \neq 0$), i $x_0 = y_0 = 0$, les òrbites són:

- * als quatre quadrants (sense els eixos), totes les branques d'hipèrbola $xy = x_0 y_0 \neq 0$ (cada branca és una òrbita);
- * sobre els eixos (sense l'origen), les quatre semirectes;
- * l'origen (un punt d'equilibri: òrbita formada per un únic punt).

Exemple 3. Donat el camp vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x + x^2)$, que podeu veure representat a la figura 5, feu un esbós aproximat del seu retrat de fase.

Solució. Vegeu la pràctica de Matlab sobre “Determinació d’esdeveniments en EDOs”.

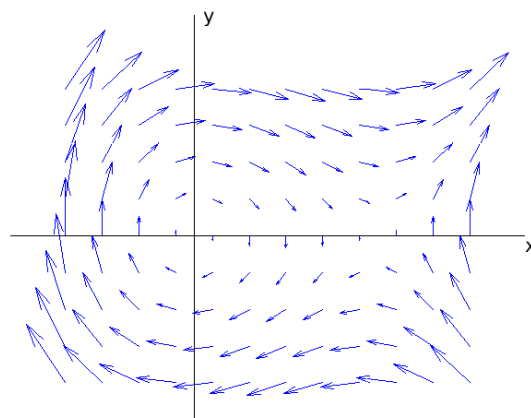


Figura 5

2 Punts d'equilibri i estabilitat

- Donat un sistema autònom $\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, amb $\mathbf{F}$ camp vectorial $\mathcal{C}^1$ sobre un domini $\mathcal{U}$, un *punt d'equilibri* és qualsevol punt $\mathbf{X}^{(0)} \in \mathcal{U}$ on el camp vectorial s'anul·li: $\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(0)}) = \mathbf{0}$. Això equival a demanar que el sistema té la solució constant $\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{X}^{(0)}$, és a dir, l'òrbita per $\mathbf{X}^{(0)}$ està formada només per aquest punt.

- Ens proposem ara d'establir diferents tipus o categories de punts d'equilibri. És clar que si només mirem el punt d'equilibri $\mathbf{X}^{(0)}$ no hi ha gran cosa a dir, però es tracta d'estudiar què passa al seu voltant. Així, considerant trajectòries $\mathbf{X}(t)$ amb condicions inicials properes a $\mathbf{X}^{(0)}$, i volem estudiar-ne el comportament per a $t > 0$ (“futur”, o “cap endavant”): si s'apropen a $\mathbf{X}^{(0)}$, o si se n'allunyen, o si es mantenen a prop... D'això en diem estudiar l'estabilitat del punt d'equilibri $\mathbf{X}^{(0)}$.

Definim aquí de manera informal els següents conceptes (per a definicions precises, vegeu les pàg. 32–33 dels apunts). El punt d'equilibri $\mathbf{X}^{(0)}$ és:

- * *estable* (*E*) si tota trajectòria $\mathbf{X}(t)$ amb CI prou propera a $\mathbf{X}^{(0)}$ es manté prop de $\mathbf{X}^{(0)}$ per a tot $t > 0$;
 - * *inestable* (*I*) si no és estable, és a dir, hi ha trajectòries amb CI tan propera com vulguem a $\mathbf{X}^{(0)}$ que s'allunyen de $\mathbf{X}^{(0)}$;
 - * *atractor* (*A*) o *asimptòticament estable*, si tota trajectòria $\mathbf{X}(t)$ amb CI prou propera a $\mathbf{X}^{(0)}$ tendeix a $\mathbf{X}^{(0)}$ quan $t \rightarrow \infty$;
 - * *repulsor* (*R*) si és atractor per al sistema $\mathbf{X}' = -\mathbf{F}(\mathbf{X})$, i llavors tota trajectòria $\mathbf{X}(t)$ amb CI prou propera a $\mathbf{X}^{(0)}$ s'allunya de $\mathbf{X}^{(0)}$ (excepte el propi $\mathbf{X}^{(0)}$).
- Cada punt d'equilibri pertany a una única de les categories següents:

atractor (A) / estable no atractor (E no A) / inestable no repulsor (I no R) / repulsor (R)

Si coneixem el retrat de fase del sistema, no és difícil d'establir a quina categoria pertany un punt d'equilibri donat. Tot i així, més endavant veurem com podem determinar l'estabilitat d'un punt d'equilibri sense haver de dibuixar el seu retrat de fase (mètodes de linealització i de Lyapunov).

A les figures següents podem veure diferents retrats de fase amb un punt d'equilibri que pertany a cadascuna de les categories anteriors,

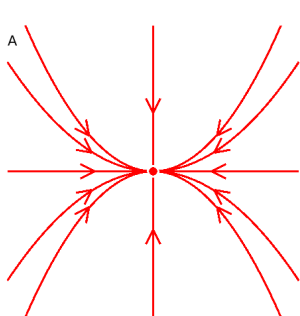


Figura 6

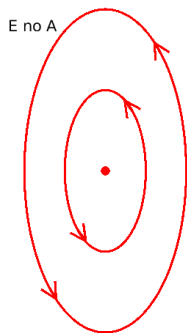


Figura 7

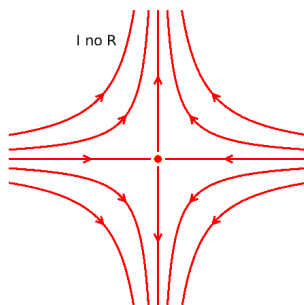


Figura 8

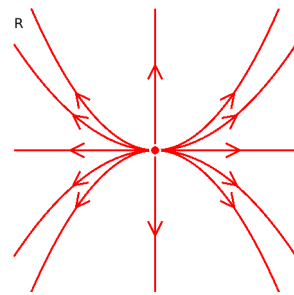


Figura 9

En el cas de la figura 7 (E no A), observem que una trajectòria amb CI prou propera a $\mathbf{X}^{(0)}$ es manté sempre prop del punt, però la distància al punt pot ser oscil·lant (creix i decreix alternativament).

3 Cas d'una EDO de primer ordre autònoma

- Als apartats anteriors ens hem ocupat de sistemes autònoms 2D, dibuixant els retrats de fase sobre el pla $\mathbb{R}^2$. Considerem ara el cas 1D, que és molt més simple i ens permetrà fer-ne un estudi complet. Estem parlant d'una sola EDO autònoma de primer ordre $x' = f(x)$, on el “camp vectorial” $f(x)$ és una funció escalar d'una variable, de classe $\mathcal{C}^1$, definida en un interval $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. Ara les solucions o trajectòries són funcions escalars $x(t)$, i les òrbites i el retrat de fase es dibuixaran sobre la recta $\mathbb{R}$.

- Començarem sempre buscant els punts d'equilibri, que són els zeros de la funció $f(x)$. La resta d'òrbites seran intervals de $\mathbb{R}$ (o eventualment semirectes, o fins i tot la recta sencera). Aquestes òrbites són la imatge o recorregut de solucions $x(t)$, les quals es podrien trobar resolent l'EDO, que és *separable*: integrant $\int \frac{dx}{f(x)} = t + C$, i aïllant $x = x(t)$. Però veurem que això no és necessari per trobar les òrbites.

Exemple 4. Considerem l'EDO $x' = kx(1 - x/m)$, essent $k, m > 0$, anomenada *equació logística*. Tenim dos punts d'equilibri, $x = 0$ i $x = m$, que són els zeros de la funció $f(x) = kx(1 - x/m)$. Podem trobar la resta de solucions integrant i aïllant; amb una condició inicial $x(0) = x_0$ ($\neq 0, m$), tenim la solució $x(t) = \frac{m x_0 e^{kt}}{m + x_0(e^{kt} - 1)}$.

A la figura 10 podeu veure les gràfiques d'aquestes solucions, incloent les dels punts d'equilibri (que són rectes horitzontals). La projecció d'aquestes gràfiques sobre l'eix vertical x ens dona el retrat de fase de l'EDO (compareu amb les figures 1 i 2). Aquest retrat de fase està format per només 5 òrbites: els punts d'equilibri 0 i m , l'interval $(0, m)$ (recorregut de 0 a m) i les semirectes $(-\infty, 0)$ i (m, ∞) (recorregudes de 0 a $-\infty$, i de ∞ a m , respectivament). Si observem les òrbites que no són punts d'equilibri, per exemple l'interval $(0, m)$, veiem que hi ha infinites solucions que recorren la mateixa òrbita, i que totes aquestes solucions només es diferencien en una translació en el temps (és a dir, un desplaçament horitzontal de les seves gràfiques).

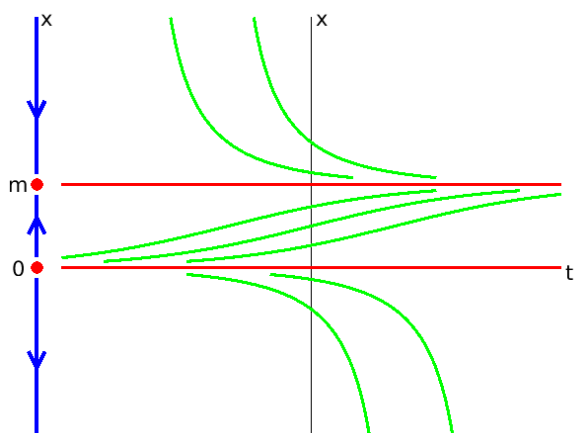


Figura 10

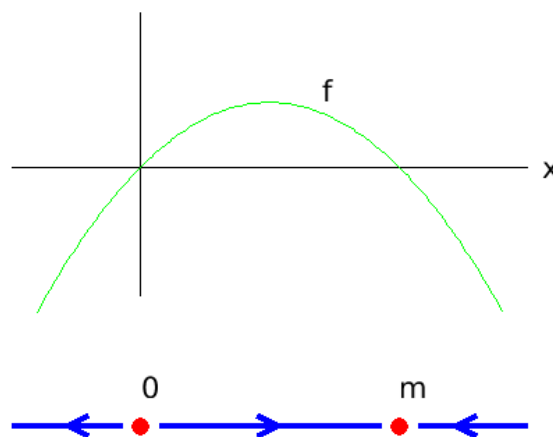


Figura 11

A partir del retrat de fase, veiem clarament que els punts d'equilibri 0 i m són repulsor i atractor, respectivament.

Vegem que podem dibuixar el retrat de fase sense necessitat de trobar explícitament les solucions. A la figura 11 podem veure la gràfica de la funció $f(x)$ (una paràbola) i, a sota, de nou el retrat de fase (posat ara horitzontalment). L'EDO $x'(t) = f(x(t))$ ens diu que, a les zones on $f(x)$ es positiva/negativa les solucions $x(t)$ són creixents/decreixents i per tant l'òrbita es recorre cap a la dreta/esquerra. Això ens permet dibuixar el retrat de fase i, al mateix temps, determinar l'estabilitat dels punts d'equilibri. En efecte, al punt $x = 0$ la funció $f(x)$ passa de negativa a positiva i, per tant, a la seva esquerra les solucions van cap a l'esquerra, i a la seva dreta van cap a la dreta; en ambdós casos s'allunyen del punt d'equilibri i, per tant, es tracta d'un repulsor. De fet, sense fer la gràfica podem usar que $f'(0) > 0$ per deduir que $f(x)$ passa de negativa a positiva. Anàlogament, al punt $x = m$ tenim $f'(m) < 0$, per tant $f(x)$ passa de positiva a negativa i tenim un atractor.

- Algunes propietats que hem observat a l'exemple 4, de fet són vàlides en general:

- * Un punt d'equilibri x_0 és atractor si $f'(x_0) < 0$, i és repulsor si $f'(x_0) > 0$ (per al cas en què $f'(x_0) = 0$, vegeu el punt següent).
- * Un punt d'equilibri x_0 és atractor si $f(x)$ passa de positiva a negativa en x_0 , és repulsor si $f(x)$ passa de negativa a positiva en x_0 , i és inestable no repulsor si $f(x)$ és positiva a esquerra i dreta de x_0 , o negativa a esquerra i dreta de x_0 .
- * Les òrbites que no són punts d'equilibri són els intervals entre dos punts d'equilibri consecutius, i les semirectes entre $-\infty$ i el primer punt d'equilibri, i entre el darrer punt d'equilibri i ∞ .
- * Qualsevol solució $x(t)$ que prové o tendeix a un punt d'equilibri ho fa en un temps infinit ($t \rightarrow \pm\infty$). En canvi, una solució que prové o tendeix de $\pm\infty$ ho pot fer en un temps finit o infinit, dependent de l'EDO.

Exemple 5. Dibuixeu el retrat de fase de l'EDO $x' = x^2$ i estudeu l'estabilitat del seu punt d'equilibri.

Solució. La funció $f(x) = x^2$ només té un zero, $x = 0$, que és l'únic punt d'equilibri. Com que la funció $f(x)$ és positiva a esquerra i dreta d'aquest punt, és inestable no repulsor. Vegeu a la figura 12 el retrat de fase, que té 3 òrbites: el punt d'equilibri 0, i les semirectes $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ ambdues recorregudes cap a la dreta.

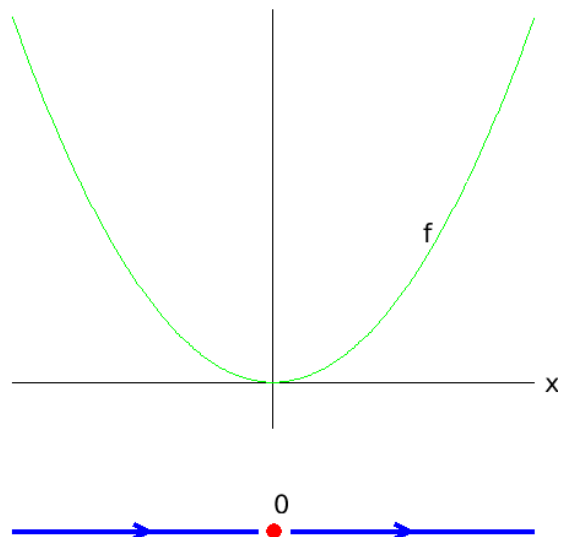


Figura 12