

Nom i cognoms (en <u>MAJÚSCULES</u> !)	Columna (A,B,C...)	Fila (1,2,3...)
---	-----------------------	--------------------

(R₁)

Puntuació: respostes correctes +1 punt, incorrectes −0.20 punts. Cal deixar ben clar quina resposta s’ha marcat, o si no se n’ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.

1 Donat el filferro parametritzat per $\sigma(t) = \left(at^3, t^2, \frac{2t}{3a}\right)$, $0 \leq t \leq 1$, i amb densitat $\rho(x, y, z) = z$, calculeu la seva massa (suposem $a > 0$).

.....

Solució: L’element de longitud ve donat per $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{(3at^2)^2 + (2t)^2 + \left(\frac{2}{3a}\right)^2} = 3at^2 + \frac{2}{3a}$. Aleshores,

$$m(C) = \int_C \rho \, d\ell = \int_0^1 z(t) \|\sigma'(t)\| \, dt = \int_0^1 \frac{2t}{3a} \left(3at^2 + \frac{2}{3a}\right) dt = \frac{1}{2} + \frac{2}{9a^2}.$$

2 Calculeu la circulació del camp $\vec{F}(x, y) = (a + x^3 + y, y^2 + y^2 \cos y)$ al llarg del tros de la corba $y = a - x^2$ que va des del punt $(-\sqrt{a}, 0)$ fins al punt $(\sqrt{a}, 0)$.

.....

Solució: Aplicarem el teorema de Green sobre el domini $D = \{(x, y) : -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}, 0 \leq y \leq a - x^2\}$. La seva vora és $\partial D = C_1 \cup C_2$, on C_1 és el tros de paràbola donat a l’enunciat, i C_2 és el segment que uneix els punts $(\pm\sqrt{a}, 0)$. Com que C_1 es recorre en sentit horari, recorrem el segment C_2 de dreta a esquerra i llavors hem de canviar el signe de la integral doble. Escrivint $\vec{F} = (P, Q)$, tenim $Q_x - P_y \equiv -1$ i, per tant,

$$\int_{C_1} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle + \int_{C_2} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = - \iint_D (-1) \, dx \, dy = \text{Area}(D) = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) \, dx = \frac{4}{3} a\sqrt{a}.$$

Parametritzant C_2 per $\sigma_2(t) = (-t, 0)$, $-\sqrt{a} \leq t \leq \sqrt{a}$, fàcilment tenim

$$\int_{C_2} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \langle (a - t^3, 0), (-1, 0) \rangle dt = -2a\sqrt{a},$$

i finalment obtenim $\int_{C_1} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = 2a\sqrt{a} + \frac{4}{3} a\sqrt{a} = \frac{10}{3} a\sqrt{a}$.

3 Calculeu el flux del camp $\vec{F} = (-y, x, z^k)$ a través de la semiesfera $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$, orientada per la normal exterior.

.....

Solució: Parametritzant la semiesfera S amb coordenades esfèriques, $\Phi(\theta, \varphi) = (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi)$, $(\theta, \varphi) \in D = [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$, el vector normal és $\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi = R \cos \varphi (x, y, z)$, on hem de considerar $x = x(\theta, \varphi)$ i anàlogament amb y i z . Aleshores tenim:

$$\begin{aligned} \int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iint_D \langle \vec{F}(\Phi(\theta, \varphi)), \Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi \rangle d\theta \, d\varphi = \iint_D \langle (-y, x, z^k), R \cos \varphi (x, y, z) \rangle d\theta \, d\varphi \\ &= \iint_D R \cos \varphi \cdot z^{k+1} d\theta \, d\varphi = 2\pi R^{k+2} \int_0^{\pi/2} \sin^{k+1} \varphi \cdot \cos \varphi \, d\varphi = \frac{2\pi R^{k+2}}{k+2}. \end{aligned}$$

Una altra opció és parametritzar la semiesfera com una gràfica $z = z(x, y)$, amb domini un cercle de radi R , i passar després a coordenades polars. També podem aplicar el teorema de Gauss, afegint com a tapa un cercle de radi R .

-
- 4** Calculeu la circulació del camp vectorial $\vec{F} = (2z, 3x, y)$ al llarg de la corba intersecció entre l'hiperboloide $ax^2 + ay^2 - z^2 = 1$ (essent $a > 1$) i el pla $z = x$, orientada en sentit antihorari si la mirem des de dalt.
-

Solució: Aplicarem el teorema de Stokes. El rotacional del camp vectorial donat és constant: $\text{rot } \vec{F} = (1, 2, 3)$. D'altra banda, la corba intersecció és una el·lipse inclinada, que podem veure com la vora $C = \partial S$ d'un tros de pla: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x, (a-1)x^2 + ay^2 \leq 1\}$, que considerem orientat cap amunt. Notem que S és la gràfica de la funció $h(x, y) = x$ sobre el domini $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (a-1)x^2 + ay^2 \leq 1\}$, que és una el·lipse horitzontal, de semieixos $1/\sqrt{a-1}$ i $1/\sqrt{a}$. El vector normal és $(-h_x, -h_y, 1) = (-1, 0, 1)$, que té l'orientació correcta. Aleshores tenim:

$$\oint_{C^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_{S^+} \langle \text{rot } \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_D \langle (1, 2, 3), (-1, 0, 1) \rangle dx dy = 2 \text{Area}(D) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - a}}.$$

-
- 5** Considerem el sistema d'EDOs $x' = x(x-2)^n$, $y' = y(y-2)^m$, essent $n, m \geq 1$, amb la condició inicial $(x(0), y(0)) = (1, 1)$. Trobeu el límit de la solució $(x(t), y(t))$ quan $t \rightarrow +\infty$.
-

Solució: Es tracta d'un sistema autònom desacoblat, de la forma $x' = f(x)$, $y' = g(y)$. Les funcions $f(x) = x(x-2)^n$ i $g(y) = y(y-2)^m$ s'anul·len a 0 i 2, i per tant els punts d'equilibri són $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ i $(2, 2)$. El límit de $x(t)$ quan $t \rightarrow +\infty$ depèn de la paritat de n : si n és senar tenim $f(1) < 0$ i per tant el límit és 0, i si n és parell tenim $f(1) > 0$ i per tant el límit és 2. Anàlogament amb $y(t)$ i m . Així doncs, el límit de $(x(t), y(t))$ és:

- * $(0, 0)$ si n i m són senars;
- * $(0, 2)$ si n és senar i m és parell;
- * $(2, 0)$ si n és parell i m és senar;
- * $(2, 2)$ si n i m són parells.

-
- 6** Si $x(t)$ és la solució l'EDO de segon ordre $x'' + 3x' + 2x = 0$, amb condicions inicials $(x(0), x'(0)) = (x_0, x'_0)$ (suposant $x_0, x'_0 > 0$), determineu el valor de $x(t^*)$ per al qual $x'(t^*) = 0$.
-

Solució: Es tracta d'una EDO lineal homogènia de segon ordre. El polinomi característic és $P(m) = m^2 + 3m + 2$, que té arrels reals simples $m = -1, -2$. Per tant, la solució general és $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$. Imposant les condicions inicials tenim $x(0) = c_1 + c_2 = x_0$ i $x'(0) = -c_1 - 2c_2 = x'_0$, d'on resulta $c_1 = 2x_0 + x'_0 > 0$ i $c_2 = -(x_0 + x'_0) < 0$. Amb aquests valors de c_1 i c_2 , imposant $x'(t^*) = -c_1 e^{-t^*} - 2c_2 e^{-2t^*} = 0$, obtenim $e^{-t^*} = \frac{c_1}{-2c_2} > 0$, i per tant

$$x(t^*) = c_1 e^{-t^*} + c_2 (e^{-t^*})^2 = \frac{c_1^2}{-4c_2} = \frac{(2x_0 + x'_0)^2}{4(x_0 + x'_0)}.$$

-
- 7** Per a quins valors del paràmetre $\beta \in \mathbb{R}$ el sistema lineal 2D donat per la matriu $\begin{pmatrix} 3\beta & 4 \\ -1 & \beta \end{pmatrix}$ és d'un tipus o altre?
-

Solució: Calculem la traça, determinant i discriminant de la matriu: $T = 4\beta$, $D = 3\beta^2 + 4$, $\Delta = T^2 - 4D = 4\beta^2 - 16$. Notem que $D > 0$ sempre. Mirant els signes de T i Δ , en funció de β tenim:

- * un node propi atractiu si $\beta < -2$,
 - * un node impropio atractiu si $\beta = -2$ (la matriu no diagonalitza),
 - * un focus atractiu si $-2 < \beta < 0$,
 - * un centre si $\beta = 0$,
 - * un focus repulsiu si $0 < \beta < 2$,
 - * un node impropio repulsiu si $\beta = 2$ (la matriu no diagonalitza),
 - * un node propi repulsiu si $\beta > 2$.
-

- 8** El sistema no lineal $x' = \sigma(y^2 - y)$, $y' = \sigma(x^2 - b^2y)$, on suposem $b > 0$ i $\sigma = \pm 1$, té exactament 3 punts d'equilibri. En un d'aquests 3 punts el sistema linealitzat és una sella, i en un altre és degenerat. Classifiquen el sistema linealitzat per al tercer punt d'equilibri.

Solució: Resolent el sistema $y^2 - y = x^2 - b^2y = 0$ podem tenir $y = 0$ i $x = 0$, o bé $y = 1$ i $x = \pm b$. Per tant els 3 punts d'equilibri són $(0, 0)$ i $(\pm b, 1)$. La matriu jacobiana del camp vectorial és $D\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma(2y - 1) \\ 2\sigma x & -\sigma b^2 \end{pmatrix}$. Al punt $(0, 0)$ el determinant és $D = 0$ i per tant el sistema linealitzat és degenerat. Als punts $(\pm b, 1)$ el determinant, la traça i el discriminant són

$$D = -2x(2y - 1) = \mp 2b, \quad T = -\sigma b^2, \quad \Delta = T^2 - 4D = b^4 \pm 8b = b(b^3 \pm 8).$$

Al punt $(b, 1)$ hi tenim una sella. En funció de σ i b , al punt $(-b, 1)$ hi tenim:

- * un node propi atractiu si $\sigma = 1$ i $b > 2$;
- * un node impropri atractiu si $\sigma = 1$ i $b = 2$ (la matriu no diagonalitza);
- * un focus atractiu si $\sigma = 1$ i $0 < b < 2$;
- * un node propi repulsor si $\sigma = -1$ i $b > 2$;
- * un node impropri repulsor si $\sigma = -1$ i $b = 2$ (la matriu no diagonalitza);
- * un focus repulsor si $\sigma = -1$ i $0 < b < 2$.

- 9** Donat el problema
$$\begin{cases} u_{tt} - \pi^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \sin(2x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \cos x, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

calculeu el valor de la solució $u(x, t)$.

Solució: Aplicant la fórmula de D'Alembert,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\sin(2(x + \pi t)) + \sin(2(x - \pi t))] + \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi t}^{x+\pi t} \cos s \, ds \\ &= \frac{1}{2} [\sin(2(x + \pi t)) + \sin(2(x - \pi t))] + \frac{1}{2\pi} [\sin(x + \pi t) - \sin(x - \pi t)] \\ &= \sin(2x) \cdot \cos(2\pi t) + \frac{1}{\pi} \cos x \cdot \sin(\pi t). \end{aligned}$$

- 10** Sigui $u(x, t)$ la solució del problema següent per a l'equació d'ones amb condicions de contorn mixtes,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi/2), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi/2), \\ u_t(x, 0) = a \cos(3x) + b \cos(5x), & x \in (0, \pi/2), \\ u_x(0, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(\pi/2, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Trobeu el valor de $u(0, \pi/2)$.

Solució: Suprimint inicialment la condició inicial no homogènia i buscant solucions $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, obtenim els problemes

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & x \in (0, \pi/2), \\ X'(0) = X(\pi/2) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ T(0) = 0, \end{cases}$$

El primer és un PVF, que té els valors propis $\lambda_n = -(2n + 1)^2$ i funcions pròpies $X_n(x) = \cos[(2n + 1)x]$, per a $n \geq 0$. Substituint les λ_n al segon problema i resolent-lo, obtenim $T_n(t) = \sin[(2n + 1)t]$. La solució és una combinació lineal (finita o infinita) dels modes normals $u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$. Imposant la condició inicial no homogènia sobre $u(x, 0)$, veiem que només cal considerar $n = 1$ i $n = 2$. La solució que obtenim és $u(x, t) = \frac{a}{3} \cos(3x) \cdot \sin(3t) + \frac{b}{5} \cos(5x) \cdot \sin(5t)$, amb $u(0, \pi/2) = -\frac{a}{3} + \frac{b}{5}$.