

Nom i cognoms
(en MAJÚSCULES !)

Columna
(A,B,C...)

Fila
(1,2,3...)

(R₁)

Equacions Diferencials (240131)

Revaluació – 5 Jul 2023

Temps: 2h 30min

Puntuació: respostes correctes +1 punt, incorrectes -0.25 punts. Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.

- 1** Donat el quart d'astroide parametritzat per $\sigma(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$, que suposem homogeni amb densitat ρ , calculeu el seu moment d'inèrcia respecte l'eix X .

- (a) $\frac{3}{8} a^2 \rho$ (b) $\frac{3}{5} a^2 \rho$ *(c) $\frac{3}{8} a^3 \rho$ (d) $\frac{3}{5} a^3 \rho$ (e) cap de les anteriors

Solució: La distància a l'eix de gir és $|y(t)| = a \sin^3 t$, i tenim $\|\sigma'(t)\| dt = 3a \cos t \cdot \sin t$. Per tant,

$$I_X = \rho \int_{\sigma} y^2 d\ell = \rho \int_0^{\pi/2} y(t)^2 \|\sigma'(t)\| dt = 3a^3 \rho \int_0^{\pi/2} \sin^7 t \cdot \cos t = \frac{3}{8} a^3 \rho.$$

- 2** Considerem a $\mathbb{R}^2$ un camp vectorial de la forma $\vec{F} = (y f(x), g(y))$. Quant val la circulació de $\vec{F}$ al llarg de la frontera ∂D del rectangle $D = [0, 3] \times [0, 2]$, orientada en sentit antihorari?

- (a) $-3 \int_0^2 g(y) dy$ *(b) $-2 \int_0^3 f(x) dx$ (c) $3 \int_0^2 g(y) dy$ (d) $2 \int_0^3 f(x) dx$
(e) cap de les anteriors

Solució: Notem que l'orientació antihorària de ∂D és la compatible amb el domini D . Aplicant el teorema de Green,

$$\int_{\partial D^+} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \iint_D (-f(x)) dx dy = -2 \int_0^3 f(x) dx.$$

- 3** Considerem la corba del pla XZ definida per $x = 1 + z^2$, $1 \leq z \leq 2$, i la fem girar al voltant de l'eix Z , generant una superfície de revolució S . Suposant que la densitat superficial a cada punt ve donada per $\rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4z^2}}$, calculeu la massa de S .

- (a) 11π (b) 22π (c) $10\pi/3$ *(d) $20\pi/3$ (e) cap de les anteriors

Solució: Parametritzem S per $\Phi(\theta, z) = ((1 + z^2) \cos \theta, (1 + z^2) \sin \theta, z)$, amb domini $D = [0, 2\pi] \times [1, 2]$ i tenim $\|\Phi_\theta \wedge \Phi_z\| = (1 + z^2) \sqrt{1 + 4z^2}$. Llavors,

$$m(S) = \int_S \rho dS = \iint_D \rho(\Phi(\theta, z)) \|\Phi_\theta \wedge \Phi_z\| d\theta dz = \iint_D (1 + z^2) d\theta dz = 2\pi \int_1^2 (1 + z^2) dz = \frac{20\pi}{3}.$$

- 4** Calculeu el flux del camp vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (0, 5y + y^2, 0)$ a través del tros de cilindre $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 9, 0 \leq z \leq 3 + x\}$, orientat per la normal exterior.

*(a) 135π (b) 90π (c) -105π (d) -120π (e) cap de les anteriors

Solució: Aplicarem el teorema de Gauss sobre el sòlid $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 3 + x\}$. La seva frontera és $\partial W = S \cup T_1 \cup T_2$, amb les tapes planes

$$T_1 = \{(x, y, z) : z = 0, x^2 + y^2 \leq 9\}, \quad T_2 = \{(x, y, z) : z = 3 + x, x^2 + y^2 \leq 9\},$$

que orientem per la normal exterior al sòlid: $\vec{N}_1 = (0, 0, -1)$ i $\vec{N}_2 = (-1, 0, 1)/\sqrt{2}$ respectivament.

Com que $\langle \vec{F}, \vec{N}_1 \rangle = \langle \vec{F}, \vec{N}_2 \rangle = 0$, només hem de calcular la integral triple de la divergència sobre el sòlid,

$$\begin{aligned} \int_{S^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iiint_W \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_W (5 + 2y) \, dx \, dy \, dz \\ &= 5 \operatorname{vol}(W) = 5 \iint_{x^2 + y^2 \leq 9} (3 + x) \, dx \, dy = 15 \operatorname{Area}(\{x^2 + y^2 \leq 9\}) = 15 \cdot 9\pi = 135\pi, \end{aligned}$$

on hem usat dues simetries: $\iiint_W y \, dx \, dy \, dz = 0$ i $\iint_{x^2 + y^2 \leq 9} x \, dx \, dy = 0$.

- 5** Considerem l'EDO $x' = (x - \alpha)(x - 1)^2(x - 5)$. Trobeu tots els valors del paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$ per als quals el punt d'equilibri $x = \alpha$ és atractor.

(a) $\alpha \geq 5$ *(b) $\alpha < 5$ (c) $\alpha > 1$ (d) $\alpha \leq 1$ (e) cap de les anteriors

Solució: Hem de tenir en compte la posició relativa de α respecte els punts 1 i 5, i el signe de $f(x) = (x - \alpha)(x - 1)^2(x - 5)$ a esquerra i dreta de α :

- * si $\alpha < 1$, la funció $f(x)$ passa de positiva a negativa en α ;
- * si $\alpha = 1$, la funció $f(x) = (x - 1)^3(x - 5)$ passa de positiva a negativa en 1;
- * si $1 < \alpha < 5$, la funció $f(x)$ passa de positiva a negativa en α ;
- * si $\alpha = 5$, la funció $f(x) = (x - 1)^2(x - 5)^2$ és positiva a esquerra i dreta de 5;
- * si $\alpha > 5$, la funció $f(x)$ passa de negativa a positiva en α .

Per tant el punt α és atractor si $\alpha < 5$, és inestable no repulsor si $\alpha = 5$, i és repulsor si $\alpha > 5$.

- 6** Si $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ és la solució del PVI $X' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X$, $X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, trobeu x_0 per tal que $y(\ln 2) = 12$.

*(a) 1 (b) 3 (c) -3 (d) 2 (e) cap de les anteriors

Solució: Els valors propis de A són 2 i 4, amb vectors propis $(1, -1)$ i $(0, 1)$, respectivament. Per tant, una matriu fonamental del sistema és $M(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ -e^{2t} & e^{4t} \end{pmatrix}$, i la solució del PVI ha de ser de la forma $M(t)C$. Imposant la condició inicial, hem de resoldre el sistema $M(0)C = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, i obtenim $C = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$, és a dir $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^{2t} \\ -x_0 e^{2t} + x_0 e^{4t} \end{pmatrix}$. Avaluant la segona component, hem de tenir $y(\ln 2) = -4x_0 + 16x_0 = 12$, i per tant $x_0 = 1$.

7 Trobeu totes les solucions de l'EDO $x'' + 2x' + 5x = 10 \cos t$ que compleixen $x(0) = 0$. [Ind.: L'EDO té una solució particular de la forma $x_p(t) = A \cos t + B \sin t$.]

- (a) $x(t) = 2 \sin t + e^{-t}(c \cos 2t + 2 \sin 2t)$, $c \in \mathbb{R}$
 *(b) $x(t) = 2 \cos t + \sin t + e^{-t}(-2 \cos 2t + c \sin 2t)$, $c \in \mathbb{R}$
 (c) $x(t) = \cos t - 4c \sin t + e^{-t}(-\cos 2t + 5 \sin 2t)$, $c \in \mathbb{R}$
 (d) $x(t) = 5 \cos t + c e^{-t}(\cos 2t - \sin 2t)$, $c \in \mathbb{R}$
 (e) cap de les anteriors

.....

Solució: Primer resollem l'EDO homogènia $x'' + 2x' + 5x = 0$. El polinomi característic $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ té les arrels $-1 \pm 2i$, i per tant la solució general és $x_h(t) = c_1 e^{-t} \cos 2t + c_2 e^{-t} \sin 2t$.

Substituint $x_p(t) = A \cos t + B \sin t$ a l'EDO no homogènia tenim $x_p''(t) + 2x_p'(t) + 5x_p(t) = (4A + 2B) \cos t + (-2A + 4B) \sin t$. Igualant amb el terme no homogeni $10 \cos t$, hem de resoldre el sistema $4A + 2B = 10$, $-2A + 4B = 0$. Obtenim $A = 2$ i $B = 1$, i per tant $x_p(t) = 2 \cos t + \sin t$.

Així, la solució general de l'EDO no homogènia és $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$. Finalment, imposem la condició: $x(0) = x_h(0) + x_p(0) = c_1 + 2 = 0$, i per tant $c_1 = -2$ amb qualsevol $c_2 \in \mathbb{R}$.

8 Donada l'EDO de segon ordre no lineal $x'' + 2x' + \mu(x - x^2) = 0$, determineu tots els valors del paràmetre μ per als quals l'origen és un punt d'equilibri estable.

- (a) $\mu \leq 1$ (b) $\mu < 0$ (c) $\mu > 2$ *(d) $\mu \geq 0$ (e) cap de les anteriors

.....

Solució: Escrivim l'EDO com a sistema: $x' = y$, $y' = -\mu(x - x^2) - 2y$. La matriu del sistema linealitzat al $(0, 0)$ és $DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & -2 \end{pmatrix}$, que té traça $T = -2 < 0$ i determinant $D = \mu$. Per tant, el $(0, 0)$ és atractor (i per tant estable) si $\mu > 0$, i tipus sella (i per tant inestable) si $\mu < 0$. El cas $\mu = 0$ no es pot decidir a partir del sistema linealitzat, però en aquest cas el propi sistema original és lineal i correspon a un punt estable no atractor. Per tant, és estable si $\mu \geq 0$.

9 Considerem el problema següent, corresponent a l'equació de la calor 1D no homogènia amb condicions de contorn de Neumann,

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 3 \sin(3x), & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 5 - \cos(2x), & x \in (0, \pi), \\ u_x(0, t) = a, & t > 0, \\ u_x(\pi, t) = -a & t > 0, \end{cases}$$

Determineu el valor de a pel qual la temperatura mitjana $T(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) dx$ es manté constant.

[Ind.: No cal trobar la solució $u(x, t)$, trebal·leu amb $T'(t)$.]

- (a) $a = 0$ (b) $a = 4/3$ *(c) $a = 1/4$ (d) $a = 2/3$ (e) cap de les anteriors

.....

Solució: Calculem la derivada de la temperatura mitjana,

$$T'(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_t(x, t) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [4u_{xx}(x, t) + 3 \sin(3x)] dx = \frac{1}{\pi} \left[4u_x(x, t) - \cos(3x) \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{-8a + 2}{\pi}.$$

Demanant que $T'(t) \equiv 0$, obtenim $a = 1/4$.

Sigui $u(x, t)$ la solució del problema següent per a l'equació d'ones homogènia amb condicions de contorn mixtes,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi/2), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 1 + \cos(5x), & x \in (0, \pi/2), \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi/2), \\ u_x(0, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(\pi/2, t) = 1, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Trobeu la funció $u_t(0, t)$ (derivada temporal a l'extrem $x = 0$).

[Ind.: busqueu una solució particular estacionària $u_p(x)$ de l'EDP i que satisfaci també les condicions de contorn, i plantegeu el problema per a $v(x, t) = u(x, t) - u_p(x)$.]

- (a) 0 (b) $1 - \sin(5t)$ *(c) $-5 \sin(5t)$ (d) $1 + \cos(5t)$ (e) cap de les anteriors

Solució: La funció constant $u_p(x) \equiv 1$ satisfà l'EDP i les condicions de contorn. Definint $v(x, t) = u(x, t) - u_p(x)$, tenim el problema

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0, & x \in (0, \pi/2), \quad t \in \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = \cos(5x), & x \in (0, \pi/2), \\ v_t(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi/2), \\ v_x(0, t) = v(\pi/2, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Suprimint inicialment la condició inicial, tenim un problema homogeni i en busquem solucions per separació de variables, $v(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. D'aquesta manera, obtenim 2 EDOs amb algunes condicions addicionals:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & x \in (0, \pi/2), \\ X'(0) = X(\pi/2) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ T'(0) = 0, \end{cases}$$

En el primer cas tenim un PVF que té com a valors propis $\lambda_n = -(2n+1)^2$ i funcions pròpies $X_n(x) = \cos[(2n+1)x]$, $n \geq 0$. Amb aquests valors de λ_n , obtenim com a solució del segon problema $T_n(t) = \cos[(2n+1)t]$. Els modes normals són $v_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$, $n \geq 0$, i caldria buscar la solució com a combinació lineal infinita d'aquests modes normals, és a dir, $v(x, t) = \sum_{n \geq 0} d_n \cos[(2n+1)t] \cdot \cos[(2n+1)x]$. Imposant la condició inicial veiem per inspecció directa que $d_2 = 1$,

i $d_n = 0$ per a tot $n \neq 2$. Tornant al problema original, la solució és $u(x, t) = u_p(x) + v(x, t) = 1 + \cos(5t) \cdot \cos(5x)$, i per tant $u_t(0, t) = -5 \sin(5t)$.