

Nom i cognoms
(en MAJÚSCULES !)

Columna
(A,B,C...)

Fila
(1,2,3...)

(R₁)

Equacions Diferencials (240131)

Reavaluació – 5 Jul 2022

Temps: 2h 30min

Puntuació: respostes correctes +1 punt, incorrectes -0.25 punts. Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.

1 Calculeu la coordenada y del centre geomètric de l'arc de cicloide $\sigma(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

- (a) $\frac{5R}{4}$ (b) $\frac{6R}{5}$ (c) $\frac{3R}{2}$ *(d) $\frac{4R}{3}$ (e) cap de les anteriors

Solució: Tenim $\sigma'(t) = (R(1 - \cos t), R \sin t)$, i l'element de longitud és

$$d\ell = \|\sigma'(t)\| dt = R\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 2R \sin(t/2) dt.$$

Hem de calcular el quocient de les integrals:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} y d\ell &= \int_0^{2\pi} R(1 - \cos t) \cdot 2R \sin(t/2) dt = 4R^2 \int_0^{2\pi} \sin^3(t/2) dt = 4R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2(t/2)) \sin(t/2) dt \\ &= 4R^2 \left[-2 \cos(t/2) + \frac{2 \cos^3(t/2)}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{32}{3} R^2, \\ \int_{\sigma} d\ell &= \int_0^{2\pi} 2R \sin(t/2) dt = 2R [-2 \cos(t/2)]_0^{2\pi} = 8R \text{ (la longitud)}. \end{aligned}$$

Obtenim $\bar{y} = \frac{\frac{32}{3} R^2}{8R} = \frac{4R}{3}$.

2 Donat el domini pla $D = \{(x, y) : R^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2Rx\}$ (essent $R > 0$), calculeu la circulació del camp vectorial $\vec{F} = (y^2 + \ln x, x + 2xy + \cos y)$ al llarg de la frontera ∂D recorreguda en sentit antihorari.
[Ind.: Recordeu que una circumferència $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ es pot parametritzar, en coordenades polars, per $r = 2R \cos \theta$.]

- *(a) $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) R^2$ (b) $\frac{\pi}{2} R^2$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2} R^2$ (d) $\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}\right) R^2$ (e) cap de les anteriors

Solució: Aplicarem el teorema de Green. Per al camp vectorial $\vec{F} = (P, Q)$, tenim $Q_x - P_y \equiv 1$, i per tant només ens caldrà calcular l'àrea de D . Aquest domini és la regió compresa entre dues circumferències, que en polars s'expressen $r = R$ i $r = 2R \cos \theta$. Els punts de tall $(R/2, \pm\sqrt{3}R/2)$ ens diuen a quin interval hem d'agafar l'angle: $-\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$. Així doncs, tenim:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D^+} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle &= \text{Area}(D) = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_R^{2R \cos \theta} r dr d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=R}^{r=2R \cos \theta} d\theta = \frac{R^2}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (4 \cos^2 \theta - 1) d\theta \\ &= \frac{R^2}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (1 + 2 \cos \theta) d\theta = [\theta + \sin 2\theta]_{-\pi/3}^{\pi/3} = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) R^2. \end{aligned}$$

- 3** Considerem al pla XZ el rombe de vèrtexs $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$ i $(2, 4)$, i el fem girar entorn de l'eix Z . Calculeu l'àrea de la superfície de revolució obtinguda.

*(a) $16\sqrt{5}\pi$ (b) 16π (c) $4\sqrt{5}\pi$ (d) 4π (e) cap de les anteriors

Solució: La longitud del rombe és $L = 4\sqrt{5}$ i el seu centre geomètric és el punt $(2, 2)$, que es troba a distància $D = 2$ de l'eix de gir. Pel teorema de Guldin, l'àrea de la superfície de revolució és: $A = L \cdot 2\pi D = 16\sqrt{5}\pi$.

- 4** Considerem les superfícies

$$S_1 = \{(x, y, z) : z = 0, x^2 + y^2 \leq 4\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\},$$

ambdues orientades pel vector normal que té la tercera component positiva.

Donat el camp vectorial $\vec{F} = (3x, -y, 1 + z)$, calculeu els fluxos

$$I_1 = \int_{S_1^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle, \quad I_2 = \int_{S_2^+} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle.$$

[Ind.: Considereu el sòlid comprès entre les dues superfícies.]

*(a) $I_1 = 4\pi$, $I_2 = 20\pi$ (b) $I_1 = I_2 = 16\pi$ (c) $I_1 = 0$, $I_2 = 16\pi$ (d) $I_1 = I_2 = 4\pi$
(e) cap de les anteriors

Solució: Per a la superfície S_1 , que és un cercle de radi 2, el vector normal és $\vec{N}_1 = (0, 0, 1)$ i tenim $\langle \vec{F}, \vec{N}_1 \rangle = 1 + z = 1$, i per tant $I_1 = \text{Area}(S_1) = 4\pi$.

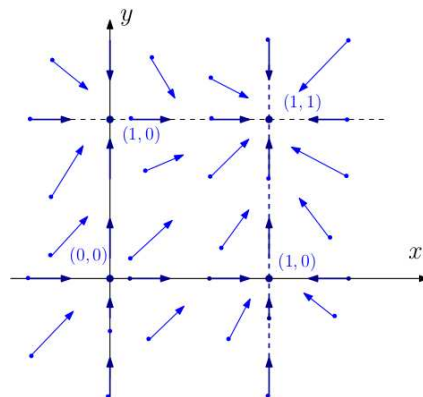
La superfície S_2 és una semiesfera de radi 2, i amb S_1 tanca la semiesfera sòlida W . Pel teorema de Gauss, canviant l'orientació de S_1 perquè s'orienti per la normal exterior al sòlid, i tenint en compte que $\text{div } \vec{F} \equiv 3$, resulta $I_2 - I_1 = 3 \text{vol}(W) = 3 \cdot \frac{2}{3} \pi \cdot 2^3 = 16\pi$, i per tant $I_2 = 20\pi$.

- 5** El sistema autònom $x' = x^2(1 - x)$, $y' = y^2(1 - y)$ té quatre punts d'equilibri: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 1)$. Esbrineu si són: estables (E), inestables (I), atractors (A), repulsors (R).

*(a) el punt $(1, 1)$ és A, i els altres tres punts són I no R
(b) el punt $(0, 0)$ és R, el punt $(1, 1)$ és A, i els altres dos punts són I no R
(c) els quatre punts són I no R
(d) els punts $(0, 0)$ i $(1, 1)$ són I no R, i els punts $(1, 0)$ i $(0, 1)$ són E no A
(e) cap de les anteriors

Solució:

Es tracta d'un sistema 2D desacoblat, i per a cada coordenada tenim una EDO autònoma de primer ordre, que resulta ser la mateixa: $x' = f(x) = x^2(1 - x)$, i $y' = f(y)$. Els zeros de f ens diuen que els punts d'equilibri d'aquesta EDO són 0 i 1, i mirant signes que pren la funció f veiem que el punt 0 és I no R, i el punt 1 és A. En el sistema 2D, el punt $(1, 1)$ és A i els punts $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$ són I no R ja que, al voltant de cadascun d'aquests tres punts, tenim almenys una òrbita que s'apropa al punt i una altra que s'allunya del punt.



6 Calculeu $\vec{X}(1)$, per a la solució $\vec{X}(t)$ del PVI $\vec{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \vec{X}$, $\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2e \\ e \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} e^{-9} \\ -4e^{-9} \end{pmatrix}$ *(d) $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ (e) cap de les anteriors

Solució: La matriu té com a valors propis $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -9$, amb vectors propis $\vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, respectivament. Com que el vector $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ es troba sobre la direcció de valor propi 0, la solució és constant: $\vec{X}(t) \equiv \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

7 Trobeu tots els valors de μ per als quals la solució $\vec{X}(t)$ del PVI

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 2-\mu & \mu \\ 8 & \mu-2 \end{pmatrix} \vec{X}, \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

tendeix a l'origen quan $t \rightarrow \infty$.

- (a) $\mu > 2$ (b) per a cap valor de μ (c) $\mu = -2$ *(d) $\mu < -2$ (e) cap de les anteriors

Solució: El determinant de la matriu és $D = -\mu^2 - 4\mu - 4 = -(\mu+2)^2 < 0$. Per tant, es tracta d'una sella per a tot μ excepte quan $\mu = -2$. Tenint en compte que la traça és 0, els valors propis són $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-D} = \pm(\mu+2)$.

- * Si $\mu < -2$, el valor propi negatiu és $\lambda_1 = \mu+2$ amb vector propi $\vec{v}^{(1)} = (1, 2)$, i per tant la solució del PVI tendeix a l'origen, ja que la condició inicial es troba sobre la direcció atractora.
- * Si $\mu = -2$, tenim el 0 com a valor propi doble i la solució no tendeix a l'origen.
- * Si $\mu > -2$, el valor propi negatiu és $\lambda_2 = -(\mu+2)$ amb vector propi $\vec{v}^{(2)} = (-\mu, 4)$, que no és proporcional a la condició inicial $(1, 2)$ (ho seria si $\mu = -2$) i per tant la solució del PVI no tendeix a l'origen.

8 Considerem l'EDO de segon ordre no lineal $x'' = 6x^2$. Dues de les solucions d'aquesta EDO són:

$$x_1(t) = \frac{1}{(t+1)^2}, \quad t \in (-1, \infty); \quad x_2(t) = \frac{1}{(t-1)^2}, \quad t \in (-\infty, 1).$$

Amb aquesta informació, què podem dir de l'estabilitat del $(0, 0)$ com a punt d'equilibri del sistema 2D associat a l'EDO? [Ind.: Estudieu el límit d'aquestes solucions quan $t \rightarrow \infty$ o quan $t \rightarrow -\infty$, segons el cas.]

- (a) és estable no atractiu (b) és atractiu *(c) és inestable no repulsiu (d) és repulsiu
(e) cap de les anteriors

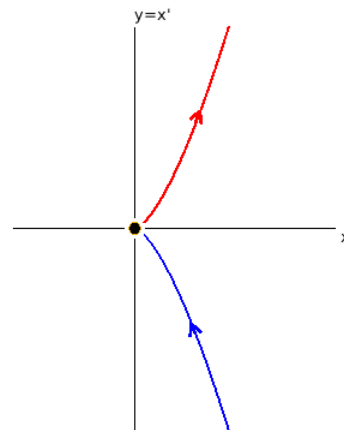
Solució:

El sistema 2D associat a l'EDO és $x' = y$, $y' = 6x^2$, que té l'origen $(0, 0)$ com a punt d'equilibri. Entre les solucions del sistema, tenim:

$$(x_1(t), x_1'(t)) = \left(\frac{1}{(t+1)^2}, -\frac{2}{(t+1)^3} \right), \quad t \in (-1, \infty);$$

$$(x_2(t), x_2'(t)) = \left(\frac{1}{(t-1)^2}, -\frac{2}{(t-1)^3} \right), \quad t \in (-\infty, 1).$$

La primera tendeix a l'origen quan $t \rightarrow \infty$, i la segona tendeix a l'origen quan $t \rightarrow -\infty$ (és a dir, prové de l'origen). Per tant, l'origen és inestable no repulsiu.



9 Sigui $u(x, t)$ la solució del problema següent, que correspon a l'equació d'ones per a una corda vibrant infinita,

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 4 \cos 2x, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \frac{1}{9} \cos 2x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Calculeu $u(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$. [Ind.: Comenceu trobant una solució particular $u_p(x)$ de l'EDP (que no depengui de t) i, escrivint $u(x, t) = u_p(x) + v(x, t)$, plantegeu el nou problema per a $v(x, t)$.]

- (a) $-\frac{1 + \arctan \pi}{6}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\arcsin \frac{2}{3}$ *(d) $\frac{\arctan \pi}{6} - \frac{1}{9}$ (e) cap de les anteriors

Solució: La solució particular ha de satisfer l'EDO $0 - 9u_p''(x) = 4 \cos 2x$, i una possible solució és $u_p(x) = \frac{1}{9} \cos 2x$, que també satisfà una de les condicions inicials. Llavors $v(x, t) = u(x, t) - u_p(x)$ ha de ser solució del problema

$$\begin{cases} v_{tt} - 9v_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ v(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ v_t(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aplicant la fórmula de D'Alembert, obtenim $v(x, t) = \frac{1}{6} \int_{x-3t}^{x+3t} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{6} (\arctan(x+3t) - \arctan(x-3t))$.

Sumant-hi la solució particular i substituint $x = \pi/2$ i $t = \pi/6$, resulta $u(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}) = \frac{\arctan \pi}{6} - \frac{1}{9}$.

10 Trobeu el valor de $u(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ per a la solució $u(x, t)$ del problema següent, associat a l'equació d'ones amb condicions de contorn de Dirichlet,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = 2 \sin 2x + 3 \sin 3x, & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (a) 5 (b) -2 *(c) 1 (d) 0 (e) cap de les anteriors

Solució: Suprimint inicialment la condició inicial sobre $u_t(x, 0)$ (no homogènia), tenim un problema homogeni i en busquem solucions per separació de variables, $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. D'aquesta manera, obtenim 2 EDOs amb algunes condicions addicionals:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ X(0) = X(\pi) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0, & t > 0, \\ T(0) = 0, \end{cases}$$

En el primer cas tenim un PVF que té valors propis $\lambda_n = -n^2$, $n \geq 1$, i funcions pròpies $X_n(x) = \sin nx$. Substituint λ_n a la segona EDO, resulta $T_n(t) = \sin nt$. Els modes normals són $u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$, $n \geq 0$, i cal buscar la solució com a combinació d'aquests modes normals: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_n(x, t)$. Imposant la condició inicial no homogènia,

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n d_n \sin nx = 2 \sin 2x + 3 \sin 3x,$$

veiem clarament que es compleix amb $d_2 = d_3 = 1$ com a únics coeficients no nuls. Així doncs, la solució és

$$u(x, t) = u_2(x, t) + u_3(x, t) = \sin 2x \cdot \sin 2t + \sin 3x \cdot \sin 3t,$$

i per tant $u(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1$.