

Nom i cognoms:

Columna (A,B,C...)	Fila (1,2,3...)
-----------------------	--------------------

(R₁)

1

Sigui $(x(t), y(t))$ la solució del problema de valors inicials $\begin{cases} x' = (x-1)^3x, & x(0) = 1/2, \\ y' = y^2, & y(0) = -1/2. \end{cases}$

Quina de les afirmacions següents és certa?

(a) $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (1, 0)$

*(c) $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$

(e) cap de les anteriors

(b) $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (-\infty, -\infty)$

(d) $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (\infty, \infty)$

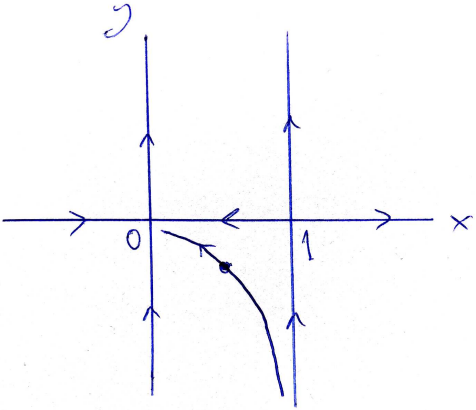
.....

Solució:

Es tracta d'un sistema desacoblat, i podem estudiar el comportament de $x(t)$ i $y(t)$ per separat, com a solucions d'EDOs autònomes de primer ordre:

- L'EDO $x' = (x-1)^3x$ té els punts d'equilibri 0 i 1, atractor i repulsor respectivament, i per tant la solució amb $x(0) = 1/2$ tendeix a 0 quan $t \rightarrow \infty$.
- L'EDO $y' = y^2$ té el punt d'equilibri 0, inestable no repulsor, amb totes les solucions $y(t)$ creixents llevat del 0, i per tant la solució amb $y(0) = -1/2$ tendeix a 0 quan $t \rightarrow \infty$.

Així, la solució $(x(t), y(t))$ del sistema amb $(x(0), y(0))$ tendeix a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$.



2

Sigui A la matriu 4×4 que té els vectors $\vec{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$ i $\vec{v}_2 = (1, 0, 1, 0)$ com a vectors propis de valor propi 1 i els vectors $\vec{v}_3 = (0, 1, 1, 0)$ i $\vec{v}_4 = (0, 0, 0, 1)$ com a vectors propis de valor propi -1 . Considereu el problema de valor inicial $\vec{x}' = A\vec{x}$, $x(0) = (1, 1, 1, 1)$, on $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, i digueu quina de les afirmacions següents és certa.

(a) $x_2(t) \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow \infty$

(c) $x_2(t) \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow -\infty$

(e) cap de les anteriors

*(b) $x_2(t) \rightarrow \infty$ quan $t \rightarrow \infty$

(d) $x_2(t) \rightarrow -\infty$ quan $t \rightarrow -\infty$

.....

Solució: Fàcilment es veu que $\vec{x}(0) = \frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_3 + \vec{v}_4$, amb la qual cosa $\vec{x}(t) = \frac{1}{2}e^t\vec{v}_1 + \frac{1}{2}e^t\vec{v}_2 + \frac{1}{2}e^{-t}\vec{v}_3 + e^{-t}\vec{v}_4$ i $x_2(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, i deduïm que $x_2(t) \rightarrow \infty$ quan $t \rightarrow \pm\infty$. Així, l'única afirmació correcta és que $x_2(t) \rightarrow \infty$ quan $t \rightarrow \infty$.

3

Considerem el sistema d'EDOs lineal homogeni 2D, donat per la matriu $\begin{pmatrix} -1/3 & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trobeu els valors del paràmetre b per als quals tenim un node repulsor.

*(a) $\frac{1}{3} < b < \frac{4}{9}$

(e) cap de les anteriors

(b) $-\frac{1}{2} < b < \frac{1}{16}$

(c) $-\frac{1}{3} < b < \frac{1}{9}$

(d) $\frac{1}{2} < b < \frac{9}{16}$

.....

Solució: Calculem el determinant, la traça i el discriminant: $D = b - 1/3$, $T = 2/3$, $\Delta = T^2 - 4D = 16/9 - 4b$. Per tenir un node repulsor cal que D i Δ siguin positius (tenint en compte que $T > 0$ sempre), és a dir $1/3 < b < 4/9$.

4 Donat el sistema d'EDO's $x' = 2y + axy - 3y^2$, $y' = -3x - 2x^2 + bxy$, trobeu els valors dels paràmetres a, b per tal que les solucions es trobin sobre corbes de nivell de la funció $V(x, y) = 3x^2 + 2y^2$.

- (a) $a = \frac{9}{2}$, $b = \frac{4}{3}$ (b) $a = \frac{9}{2}$, $b = \frac{32}{3}$ (c) $a = \frac{32}{3}$, $b = \frac{9}{2}$ *(d) $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{9}{2}$
 (e) cap de les anteriors

Solució: Hem de demanar que la derivada temporal de $V(x, y)$ sigui la funció zero,

$$W(x, y) = V_x \cdot x' + V_y \cdot y' = 6x(2y + axy - 3y^2) + 4y(-3x - 2x^2 + bxy) = (6a - 8)x^2y + (-18 + 4b)xy^2.$$

Igualant els coeficients a zero, resulta $a = 4/3$, $b = 9/2$.

5 Calculeu la circulació del camp $\vec{F}(x, y, z) = (xy, \frac{1}{2}x^2 + z, y)$ al llarg de la corba parametritzada $\sigma(t) = (e^{t/2}, t, \cos(\pi t))$, $0 \leq t \leq 1$.

- *(a) $(e - 2)/2$ (b) $e^2 - 1$ (c) $4(e + 1)$ (d) $8e^2 + 4$ (e) cap de les anteriors

Solució: Tenim $\vec{F} = \nabla f$, amb el potencial $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2y + yz$. Aplicant Newton-Leibniz,

$$\int_{\sigma} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = \frac{1}{2}e + \cos \pi = \frac{1}{2}(e - 2).$$

6 Calculeu el valor de la integral $\int_S (x^2 + y^2 + 3z^2) dS$, on S és l'esfera de radi R centrada a l'origen.

- (a) $\frac{20}{9} \pi R^4$ *(b) $\frac{20}{3} \pi R^4$ (c) $\frac{20}{9} \pi R^5$ (d) $\frac{20}{3} \pi R^5$ (e) cap de les anteriors

Solució: Per simetria, les integrals sobre S de x^2 , y^2 i z^2 són iguals. També, per simetria respecte el pla $z = 0$ podem restringir-nos a la semiesfera superior S_1 i multiplicar per 2,

$$I = \int_S (x^2 + y^2 + 3z^2) dS = \int_S 5z^2 dS = 10 \int_{S_1} z^2 dS.$$

Podem parametritzar S_1 com una gràfica $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, on el domini de definició D és el disc de radi R centrat a l'origen, i l'element de superfície $dS = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$. Llavors,

$$I = 10 \int_D (R^2 - x^2 - y^2) \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 10R \int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = 10R \cdot 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r dr = \frac{20}{3} \pi R^4,$$

on hem usat coordenades polars per integrar sobre D . Una altra possibilitat és usar les coordenades esfèriques per integrar la funció $5z^2$ sobre S .

7 Calculeu el flux del camp vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (2, 3y + 3, z)$ a través de la superfície

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1, y \geq 0\},$$

orientada pel camp normal $\vec{N}(x, y, z) = (x, y, 0)$.

- (a) $-(3\pi + 12)$ (b) $12 - 3\pi$ *(c) $3\pi + 12$ (d) $3\pi - 12$ (e) cap de les anteriors

Solució: Apliquem el teorema de la divergència al domini W tancat per S , els dos semidiscs T_1 i T_{-1} amb $z = 1$ i $z = -1$ respectivament, i el rectangle R amb $y = 0$, tots orientats per la normal exterior a W . Els vectors normals són $\vec{k}$, $-\vec{k}$ i $-\vec{j}$, respectivament. Les components normals, avaluades sobre cada superfície: $\langle \vec{F}, \vec{k} \rangle = z \equiv 1$, $\langle \vec{F}, -\vec{k} \rangle = -z \equiv 1$, $\langle \vec{F}, -\vec{j} \rangle = -(3y + 3) \equiv -3$. Com que $\text{div } \vec{F} \equiv 4$, resulta:

$$\int_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = 4 \text{vol}(W) - \int_{T_1} \langle \vec{F}, \vec{k} \rangle dS - \int_{T_{-1}} \langle \vec{F}, -\vec{k} \rangle dS - \int_R \langle \vec{F}, -\vec{j} \rangle dS = 4\pi - 2 \text{Area}(T_1) + 3 \text{Area}(R) = 3\pi + 12.$$

8 Sigui la superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 5\}$, orientada per la normal exterior. Calculeu la circulació del camp $\vec{F} = (x^2, -y^2, z)$ al llarg de la vora ∂S (orientada de manera compatible).

- (a) 2π (b) $\pi^2 + 1$ *(c) 0 (d) -2π (e) cap de les anteriors

Solució: Fàcilment veiem que $\text{rot } \vec{F} = (0, 0, 0)$ i, pel teorema de Stokes, la circulació val 0.

9 Considereu el següent problema, corresponent a l'equació de la calor amb condicions de contorn de Neumann,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 2), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 3x^2, & x \in (0, 2), \\ u_x(0, t) = t^2, & t > 0, \\ u_x(2, t) = 4t + 12, & t > 0. \end{cases}$$

Trobeu l'instant $t^* > 0$ en què la temperatura mitjana $T(t)$ assoleix el màxim absolut. [Ind.: Comenceu calculant $T'(t)$.]

- (a) $t^* = 2$ (b) mai (c) $t^* = 12$ *(d) $t^* = 6$ (e) cap de les anteriors

Solució: La temperatura mitjana és $T(t) = \frac{1}{2} \int_0^2 u(x, t) dx$. Derivant i usant l'EDP i les condicions de contorn, obtenim:

$$T'(t) = \frac{1}{2} \int_0^2 u_t(x, t) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 u_{xx}(x, t) dx = \frac{1}{2} (u_x(2, t) - u_x(0, t)) = \frac{1}{2} (4t + 12 - t^2).$$

La derivada s'anul·la per a $t = -2$ (que descartem) i $t = 6$. Fàcilment veiem que $T'(t) > 0$ per a $0 < t < 6$, i $T'(t) < 0$ per a $t > 6$, la qual cosa ens indica que s'assoleix un màxim absolut a l'instant $t^* = 6$.

10 Considerem el problema següent, corresponent a l'equació d'ones amb condicions mixtes,

$$\begin{cases} u_{tt} - 16 u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = \sin \frac{5x}{2}, & x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u_x(\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sabent que la solució és de la forma $u(x, t) = T(t) \cdot \sin \frac{5x}{2}$, trobeu la funció $T(t)$.

- (a) $T(t) = \cos 10t$ (b) $T(t) = \frac{1}{5} \sin 5t$ *(c) $T(t) = \frac{1}{10} \sin 10t$ (d) $T(t) = \cos 5t$
 (e) cap de les anteriors

Solució: Es comprova fàcilment que la solució proposada satisfà les condicions de contorn. Substituint-la a l'EDP i a les condicions inicials, veiem que $T(t)$ ha de complir el PVI

$$T''(t) + 100 T(t) = 0, \quad T(0) = 0, \quad T'(0) = 1,$$

que té com a solució $T(t) = \frac{1}{10} \sin 10t$.
