

- 1** Calculeu $\begin{pmatrix} x(\pi/2) \\ y(\pi/2) \end{pmatrix}$ per a la solució del sistema lineal $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-1 & -5a \\ 2a & 3a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ amb la condició inicial $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (essent $a \neq 0$).
-

Solució:

El polinomi característic és $\lambda^2 + 2\lambda + (1 + a^2)$, i els valors propis $-1 \pm ai$. Un vector propi de valor propi $-1 + ai$ és $v = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, i la solució general és:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \left[c_1 \begin{pmatrix} -5 \cos at \\ 3 \cos at - \sin at \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5 \sin at \\ 3 \sin at + \cos at \end{pmatrix} \right].$$

Imposant la condició inicial, resulta $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, i obtenim $\begin{pmatrix} x(\pi/2) \\ y(\pi/2) \end{pmatrix} = e^{-\pi/2} \begin{pmatrix} -5 \sin(\pi a/2) \\ 3 \sin(\pi a/2) + \cos(\pi a/2) \end{pmatrix}$.

- 2** Donada l'EDO $x'' - (k+1)x' + kx = e^{-t}$ (essent $k > 0$, $k \neq 1$), trobeu l'única solució $x(t)$ que tendeix a 0 quan $t \rightarrow +\infty$.
-

Solució:

L'EDO homogènia $x'' - (k+1)x' + kx = 0$ té com a polinomi característic $\lambda^2 - (k+1)\lambda + k$, que té arrels reals simples 1 i k . Per tant, la solució general de l'EDO homogènia és $x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{kt}$.

Busquem una solució particular de l'EDO no homogènia de la forma $x_p(t) = u_1(t) e^t + u_2(t) e^{kt}$, resolent el sistema

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{kt} \\ e^t & k e^{kt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Obtenim $u_1'(t) = -\frac{1}{k-1} e^{-2t}$, $u_2'(t) = \frac{1}{k-1} e^{-(k+1)t}$, i per tant podem escollir $u_1(t) = \frac{1}{2(k-1)} e^{-2t}$, $u_2(t) = -\frac{1}{k^2-1} e^{-(k+1)t}$, que ens dona $x_p(t) = \frac{1}{2(k+1)} e^{-t}$. La solució general és $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$, i l'única solució que tendeix a 0 l'obtenim quan $c_1 = c_2 = 0$, és a dir, la solució particular trobada.

- 3** Considerem les matrius $A_\sigma = \begin{pmatrix} a+\sigma & a-\sigma \\ -a+\sigma & (a+\sigma)/2 \end{pmatrix}$ per a $\sigma = \pm 1$. Estudieu l'estabilitat dels sistemes lineals a coeficients constants donats per aquestes dues matrius.
-

Solució:

Per a cada matriu, calculem la traça i el determinant: $T_\sigma = \frac{3}{2}(a+\sigma)$, $D_\sigma = \frac{3}{2}(a^2+1) - a\sigma$. En tots els casos tenim $D_\sigma > 0$, i per tant només cal mirar el signe de T_σ . Deduïm:

- * si $a < -1$, els dos sistemes són atractors;
- * si $a = -1$, el sistema és atractor per a $\sigma = -1$ i estable no atractor per a $\sigma = 1$;
- * si $-1 < a < 1$, el sistema és atractor per a $\sigma = -1$ i repulsor per a $\sigma = 1$;
- * si $a = 1$, el sistema és estable no atractor per a $\sigma = -1$ i repulsor per a $\sigma = 1$;
- * si $a > 1$, els dos sistemes són repulsors.

- 4** Considerem l'equació del moviment d'un pèndol amb fricció $ml\theta'' = -mg\sin\theta - \mu l\theta'$, on m és la massa, l és la longitud, $g = 10$ és l'acceleració de la gravetat, μ és el coeficient de fricció, i la funció incògnita $\theta(t)$ és l'angle respecte la posició vertical inferior. Trobeu la derivada temporal de l'energia total $V(\theta, \omega) = \frac{1}{2}ml^2\omega^2 + mgl(1 - \cos\theta)$, on $\omega = \theta'$, quan $\theta = \pi/3$ i $\theta' = a$.

Solució:

Passant l'EDO a sistema, el camp vectorial és $\mathbf{F}(\theta, \omega) = \left(\omega, -\frac{g}{l}\sin\theta - \frac{\mu}{m}\omega\right)$. Usant que $\nabla V(\theta, \omega) = (mgl\sin\theta, ml^2\omega)$, calculem

$$W(\pi/3, a) = \langle \nabla V(\pi/3, a), \mathbf{F}(\pi/3, a) \rangle = -\mu l^2 \omega^2 \Big|_{(\theta, \omega) = (\pi/3, a)} = -\mu l^2 a^2.$$

- 5** Sigui $u(x, t)$ la solució del problema següent,

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 2\sin((2i+1)\pi x), & 0 < x < 1, \\ u_t(x, 0) = \sin((2j+1)\pi x), & 0 < x < 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Calculeu $u(1/2, 1/4)$.

Solució:

Com que les dues condicions inicials són no homogènies, escrivim la solució com una suma $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, on v i w són solució de dos problemes amb la mateixa EDP i mateixes condicions de contorn, però amb una única condició inicial no homogènia:

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= 2\sin((2i+1)\pi x), & v_t(x, 0) &= 0, & \text{per a } v(x, y), \\ w(x, 0) &= 0, & w_t(x, 0) &= \sin((2j+1)\pi x), & \text{per a } w(x, y). \end{aligned}$$

En ambdós casos, el PVF associat és

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(1) = 0,$$

que té com a valors propis $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $n \geq 0$, i funcions pròpies $X_n(x) = \sin n\pi x$. Amb aquestes λ_n , l'altra EDO és $T''(t) + 4n^2\pi^2 T(t) = 0$, en el primer cas amb la condició inicial $T'(0) = 0$, i en el segon cas amb la condició inicial $T(0) = 0$, que ens donen $T_n^{(1)}(t) = \cos 2n\pi t$ i $T_n^{(2)}(t) = \sin 2n\pi t$ respectivament. Així obtenim els modes normals dels dos problemes:

$$\begin{aligned} v_n(x, t) &= X_n(x) \cdot T_n^{(1)}(t) = \sin n\pi x \cdot \cos 2n\pi t, \\ w_n(x, t) &= X_n(x) \cdot T_n^{(2)}(t) = \sin n\pi x \cdot \sin 2n\pi t. \end{aligned}$$

Finalment, hem de considerar combinacions lineals infinites d'aquests modes normals i imposar les condicions inicials no homogènies, sobre $v(x, 0)$ i $w_t(x, 0)$. Observem però que aquestes condicions inicials ja es compleixen amb un sol mode normal, multiplicat per un coeficient adequat. Així doncs, obtenim com a solució dels dos problemes $v(x, t) = 2v_{2i+1}(x, t)$

i $w(x, t) = \frac{1}{2(2j+1)\pi} w_{2j+1}(x, t)$, i la solució que busquem és

$$u(x, t) = 2\sin((2i+1)\pi x) \cdot \cos(2(2i+1)\pi t) + \frac{1}{2(2j+1)\pi} \sin((2j+1)\pi x) \cdot \sin(2(2j+1)\pi t).$$

Finalment, avaluem:

$$u(1/2, 1/4) = 2\sin\left((2i+1)\frac{\pi}{2}\right) \cdot \underbrace{\cos\left((2i+1)\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \frac{1}{2(2j+1)\pi} \underbrace{\sin\left((2j+1)\frac{\pi}{2}\right)}_{=(-1)^j} \cdot \underbrace{\sin\left((2j+1)\frac{\pi}{2}\right)}_{=(-1)^j} = \frac{1}{2(2j+1)\pi}.$$

6 Donat el problema

$$\begin{cases} u_t - k^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = ax + b, & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

escrivim la solució com una superposició de modes normals, $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n T_n(t) \cdot \sin nx$, on escollim les funcions $T_n(t)$ de manera que $T_n(0) = 1$. Calculeu el coeficient d_{2m+1} .

.....

Solució:

Imposant la condició inicial, tenim $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin nx = a + bx$, i hem de trobar d_{2m+1} com un dels coeficients d'aquesta sèrie de sinus:

$$\begin{aligned} d_{2m+1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (ax + b) \sin(2m+1)x \, dx = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{2m+1} (ax + b) \cos(2m+1)x \Big|_0^{\pi} + \frac{a}{2m+1} \int_0^{\pi} \cos(2m+1)x \, dx \right) \\ &= \frac{2}{(2m+1)\pi} ((a\pi + b) + b) + 0 = \frac{2a\pi + 4b}{(2m+1)\pi}. \end{aligned}$$

7 Calculeu la coordenada y del centre geomètric de la part de l'astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ donada per les restriccions $x \geq a/8$, $y \geq 0$.

.....

Solució:

La part de l'astroide sobre el primer quadrant ve parametritzada per $\sigma(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$, amb $0 \leq t \leq \pi/2$. La recta $x = a/8$ l'interseca a $\cos^3 t = 1/8$, o sigui $\cos t = 1/2$, o sigui $t = \pi/3$. Així doncs, tenim la corba C restringint el domini a $t \in [0, \pi/3]$. Tenim $\|\sigma'(t)\| = 3a \cos t \sin t$. Per trobar la coordenada $\bar{y}$ del centre geomètric, calculem les integrals següents:

$$\begin{aligned} \text{long}(C) &= \int_0^{\pi/3} 3a \cos t \sin t \, dt = \frac{3a}{2} [\sin^2 t]_0^{\pi/3} = \frac{3a}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{9}{8} a, \\ \int_C y \, d\ell &= \int_0^{\pi/3} a \sin^3 t \cdot 3a \cos t \sin t \, dt = 3a^2 \int_0^{\pi/3} \sin^4 t \cdot \cos t \, dt = 3a^2 \left[\frac{1}{5} \sin^5 t \right]_0^{\pi/3} = \frac{3a^2}{5} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 = \frac{27\sqrt{3}}{160} a^2. \end{aligned}$$

$$\text{Obtenim } \bar{y} = \frac{(27\sqrt{3}/160)a^2}{(9/8)a} = \frac{3\sqrt{3}}{20} a.$$

8 Calculeu la circulació del camp $\vec{F} = (y, x^2, x+z)$ al llarg de la corba $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, x + by - 2z = 0, y \geq 0\}$ orientada des del punt $(2, 0, 1)$ fins al punt $(-2, 0, -1)$.

.....

Solució:

Parametritzant la corba per $\sigma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, \cos t + b \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$, calculem:

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \langle \vec{F}, d\ell \rangle &= \int_{C^+} y \, dx + x^2 \, dy + (x+z) \, dz \\ &= \int_0^{\pi} (-4 \sin^2 t + 8 \cos^3 t + (3 \cos t + b \sin t)(-\sin t + b \cos t)) \, dt \\ &= \int_0^{\pi} (-(4+b) \sin^2 t + 8 \cos^3 t + (b^2 - 3) \sin t \cos t + 3b \cos^2 t) \, dt = (b-2)\pi. \end{aligned}$$

9 Calculeu l'àrea de la superfície $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq a + x^2 - y^2\}$ (essent $a \geq R^2$).

.....

Solució:

Parametritzem S per $\varphi(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z)$ amb $0 \leq \theta \leq 2\pi$ i $0 \leq z \leq a + R^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = a + R^2 \cos 2\theta$.

Llavors tenim $\|\varphi_\theta \wedge \varphi_z\| = R$ i resulta: $\text{Area}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{a+R^2 \cos 2\theta} R \, dz \, d\theta = R \int_0^{2\pi} (a + R^2 \cos 2\theta) \, d\theta = 2\pi Ra$.

També podem veure S com una tanca de base la circumferència $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}$ i altura donada per la funció $f(x, y) = a + x^2 - y^2$, i calcular la integral $\int_C f \, d\ell$.

10 Calculeu el flux del camp vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 - \sin y, y^3 - \sin x, z)$ a través del cilindre $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq h\}$ orientat per la normal exterior.

.....

Solució:

Afegim les tapes $S_1 \subset \{z = 0\}$ i $S_2 \subset \{z = h\}$ de manera que $S \cup S_1 \cup S_2$ sigui la frontera de W , el cilindre sòlid. Clarament, amb l'orientació exterior ($\vec{N}_1 = (0, 0, -1)$ i $\vec{N}_2 = (0, 0, 1)$ per a S_1 i S_2 respectivament), el flux de $\vec{F}$ a través de S_1 és zero (ja que $\vec{F}$ és horitzontal sobre S_1) i el flux a través de S_2 és $\pi R^2 h$ (el producte de la component normal $\langle \vec{F}, \vec{N}_2 \rangle = h$ per l'àrea de S_2 , que és πR^2).

D'altra banda, la divergència de $\vec{F}$ és $3(x^2 + y^2) + 1$, i la seva integral sobre W és

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R 3r^2 \cdot r \, dr \, d\theta \, dz + \int_W 1 \, dx \, dy \, dz = \frac{3\pi R^4 h}{2} + \pi R^2 h.$$

Usant el teorema de Gauss, el flux a través de S és aquesta integral menys els fluxs a través de les tapes S_1 i S_2 . Per tant el resultat és $\frac{3\pi R^4 h}{2} + \pi R^2 h - 0 - \pi R^2 h = \frac{3\pi R^4 h}{2}$.
