

Puntuació: respostes correctes +1 punt, incorrectes −0.25 punts. Cal deixar ben clar quina resposta s'ha marcat, o si no se n'ha marcat cap. Les respostes ambigües es consideraran incorrectes.

1 Calculeu l'àrea de la tanca que té com a base la corba $x^2 + y^2 = R^2$ i altura $h(x, y) = |x|e^y$.

- (a) $4Re^R$ (b) $2R(e^R + e^{-R})$ *(c) $2R(e^R - e^{-R})$ (d) $2Re^R$ (e) cap de les anteriors

Solució: La corba és una circumferència que parametritzem per $\sigma(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, amb velocitat constant $\|\sigma'(t)\| \equiv R$. Integrem la funció altura:

$$\int_C h \, d\ell = R \int_0^{2\pi} |R \cos t| e^{R \sin t} \, dt = 2R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \cos t e^{R \sin t} \, dt = 2R \left[e^{R \sin t} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2R(e^R - e^{-R}).$$

2 Sigui $\mathbf{F} = (P, Q)$ un camp vectorial definit a $\mathbb{R}^2$, que compleix $Q_x = P_y$. Quant val la circulació de $\mathbf{F}$ al llarg de la semicircumferència $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ recorreguda en sentit antihorari?

- (a) $\int_{-1}^1 Q(x, 0) \, dx$ *(b) $-\int_{-1}^1 P(x, 0) \, dx$ (c) 0 (d) $\int_{-1}^1 P_x(x, x) \, dx$
(e) cap de les anteriors

Solució: Podem “tancar” la semicircumferència C amb el segment C_1 entre els punts $(-1, 0)$ i $(1, 0)$, recorregut d'esquerra a dreta. Parametritzem C_1 per $\sigma(x) = (x, 0)$, $-1 \leq x \leq 1$. D'aquesta manera, tenim $C \cup C_1 = \partial D$, essent D un semicercle. Pel teorema de Green, tenim $\oint_{\partial D^+} P \, dx + Q \, dy = 0$ i per tant:

$$\int_{C^+} P \, dx + Q \, dy = - \int_{C_1^+} P \, dx + Q \, dy = - \int_{-1}^1 P(x, 0) \, dx.$$

3 Sigui S l'esfera de radi R centrada a l'origen. Sigui $C \subset S$ una corba parametritzada per $\theta = \theta(t)$ i $\phi = \phi(t)$ amb $t \in [a, b]$, on $\theta \in [0, 2\pi]$ i $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ denoten la longitud i la latitud sobre l'esfera, respectivament.

Llavors, la longitud de la corba C ve donada per $\int_a^b g(t) \, dt$, essent:

- *(a) $g = R\sqrt{(\theta')^2 \cos^2 \phi + (\phi')^2}$ (b) $g = R\sqrt{(\theta')^2 \cos^2 \theta + (\phi')^2}$
(c) $g = R\sqrt{(\theta')^2 + (\phi')^2 \cos^2 \theta}$ (d) $g = R\sqrt{(\theta')^2 + (\phi')^2 \cos^2 \phi}$
(e) cap de les anteriors

Solució: La parametrització de la corba en coordenades cartesianes és $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, on

$$x = R \cos \theta \cos \phi, \quad y = R \sin \theta \cos \phi, \quad z = R \sin \phi.$$

Derivem aquesta parametrització:

$$x' = -R\theta' \sin \theta \cos \phi - R\phi' \cos \theta \sin \phi, \quad y' = R\theta' \cos \theta \cos \phi - R\phi' \sin \theta \sin \phi, \quad z' = R\phi' \cos \phi.$$

Llavors l'element de longitud $d\ell = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} \, dt$ és

$$\begin{aligned} d\ell &= R\sqrt{(\theta')^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \cos^2 \phi + (\phi')^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \sin^2 \phi + (\phi')^2 \cos^2 \phi} \, dt \\ &= R\sqrt{(\theta')^2 \cos^2 \phi + (\phi')^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} \, dt = R\sqrt{(\theta')^2 \cos^2 \phi + (\phi')^2} \, dt. \end{aligned}$$

- 4** Calculeu el flux del camp vectorial $\mathbf{r} = (x, y, z)$ a través de la superfície lateral d'un con, $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = (Rz/h)^2, 0 \leq z \leq h\}$, orientat de manera que, en cada punt, el vector normal té la tercera component negativa.

- (a) $\frac{\pi(R^2 - h)}{2}$ (b) $-\pi R^2 h$ (c) $\frac{\pi R^2 h}{3}$ *(d) 0 (e) cap de les anteriors

Solució: Com que el camp té divergència constant, $\text{div } \mathbf{r} \equiv 3$, pel teorema de Gauss podem escriure $\int_{S^+} \langle \mathbf{r}, d\mathbf{S} \rangle = 3 \text{vol}(W) - \int_{T^+} \langle \mathbf{r}, d\mathbf{S} \rangle$, on W és el con sòlid (de radi de la base R i altura h) i $T = \{(x, y, z) : z = h, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ és la tapa que orientem, igual que S , per la normal exterior a W , que en el cas de T és $\mathbf{N}_T = (0, 0, 1)$. Sabem que $\text{vol}(W) = \pi R^2 h / 3$ i, d'altra banda, fàcilment calculem $\int_{T^+} \langle \mathbf{r}, d\mathbf{S} \rangle = \int_T \langle \mathbf{r}, \mathbf{N}_T \rangle dS = \int_T z dS = h \text{Area}(T) = h \cdot \pi R^2$. Deduïm que el flux demanat és $\int_{S^+} \langle \mathbf{r}, d\mathbf{S} \rangle = 0$. [Nota: També podem deduir directament que el flux és 0 del fet que el camp vectorial $\mathbf{r}$ és tangent a la superfície S en cada punt.]

- 5** Donada l'EDO de primer ordre $x' = x^3(x-1)(x-2)^2$, esbrineu si els seus punts d'equilibri són: estables (E), inestables (I), atractors (A), repulsors (R).

- (a) el punt 0 és E no A, el punt 1 és A, i el punt 2 és I no R
 (b) el punt 0 és I no R, el punt 1 és R, i el punt 2 és E no A
 (c) el punt 0 és R, el punt 1 és A, i el punt 2 és E no A
 *(d) el punt 0 és A, el punt 1 és R, i el punt 2 és I no R
 (e) cap de les anteriors

Solució: Els zeros de la funció $f(x) = x^3(x-1)(x-2)^2$ són els punts d'equilibri: 0, 1 i 2. Deduïm la seva estabilitat a partir del signe de f als diferents intervals:

- * $f(x) > 0$ si $x < 0$;
 * $f(x) < 0$ si $0 < x < 1$;
 * $f(x) > 0$ si $1 < x < 2$ o $x > 2$.

Obtenim que el punt 0 és atractor, el punt 1 és repulsor, i el punt 2 és inestable no repulsor.

- 6** Sigui $x(t)$ la solució del PVI $x'' + x = t^2$, $x(0) = x'(0) = 0$. Quin és el valor de $x(2\pi)$? [Ind.: L'EDO té una solució particular de la forma $x_p(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2$.]

- (a) $\pi^2 + 2\pi$ (b) 0 *(c) $4\pi^2$ (d) $1 - \pi$ (e) cap de les anteriors

Solució: L'EDO homogènia $x'' + x = 0$ té com a solució general $x_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Substituint $x_p(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2$ a l'EDO no homogènia, s'ha de complir que $2d_2 + d_0 + d_1 t + d_2 t^2 = t^2$ per a tot t , i comparant coeficients trobem que $d_2 = 1$, $d_1 = 0$, $d_0 = -2$. Així, una solució particular és $x_p(t) = t^2 - 2$, i la solució general $x(t) = t^2 - 2 + c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Imposant les condicions inicials, obtenim $c_1 = 2$, $c_2 = 0$ i per tant la solució és $x(t) = t^2 - 2 + 2 \cos t$, amb el valor $x(2\pi) = 4\pi^2$.

- 7** Donat el sistema lineal $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & \alpha \\ \alpha + 2 & \alpha + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, trobeu tots els valors del paràmetre α per als quals és un focus repulsor.

- *(a) $-1 < \alpha < 0$ (b) $\alpha < -1$ (c) $0 < \alpha < 4$ (d) $\alpha > -2$ (e) cap de les anteriors

Solució: Calculem la traça, el determinant i el discriminant: $T = 2(\alpha + 1)$, $D = 1$, $\Delta = T^2 - 4D = 4\alpha(\alpha + 2)$. Per tenir un focus repulsor, cal que $T > 0$, $D > 0$, $\Delta < 0$, la qual cosa s'acompleix per a $-1 < \alpha < 0$.

- 8** Considerem el sistema $x' = y^3 - x^5 + 3x^6$, $y' = -x^3 + ay^5$. Per estudiar l'estabilitat de l'origen com a punt d'equilibri, apliquem el mètode de Lyapunov amb la funció $V(x, y) = x^4 + y^4$. Per a quins valors del paràmetre a podem assegurar que l'origen és estable?

*(a) $a \leq 0$ (b) $a \geq -4$ (c) $-1 \leq a \leq 1$ (d) $a < 3$ (e) cap de les anteriors

Solució: El sistema ve definit pel camp vectorial $F(x, y) = (y^3 - x^5 + 3x^6, -x^3 + ay^5)$. A partir de la funció $V(x, y)$ (que és definida positiva a l'origen), calculem $W(x, y) = \langle \nabla V(x, y), F(x, y) \rangle = 4x^3(y^3 - x^5 + 3x^6) + 4y^3(-x^3 + ay^5) = -4x^8(1 - 3x) + 4ay^8$, que és una funció semi-definida negativa a l'origen si $a \leq 0$ (ja que $W(x, y) \leq 0$ almenys si $x \leq 1/3$, que inclou un petit entorn de l'origen), i és indefinida si $a > 0$. Per tant, podem assegurar que l'origen és estable quan $a \leq 0$.

- 9** Considereu l'equació de la calor 1D amb condicions de contorn de Neumann homogènies,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in (-\pi, \pi), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (-\pi, \pi) \\ u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Apliquem el mètode de separació de variables, escrivint $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Llavors haurem de resoldre les EDOs $X'' - \lambda X = 0$ i $T' - \lambda T = 0$. Quines condicions addicionals caldrà imposar?

- (a) $X'(-\pi) = X'(\pi) = 0$, $T(0) = 0$
 *(b) $X'(-\pi) = X'(\pi) = 0$, sense cap condició sobre $T(0)$
 (c) $X(-\pi) = X(\pi) = 0$, sense cap condició sobre $T(0)$
 (d) $X(-\pi) = X(\pi) = 0$, $T(0) = f(x)$
 (e) cap de les anteriors

Solució: En aplicar separació de variables, haurem suprimit la condició inicial (no homogènia). Les condicions de contorn de Neumann (homogènies) ens diuen que, a l'EDO de segon ordre per a $X(x)$, hi hem d'imposar $X'(-\pi) = X'(\pi) = 0$. D'altra banda, l'EDO de primer ordre per a $T(t)$ no requereix cap condició addicional.

- 10** Trobeu els modes normals $u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$ del problema homogeni

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \in (0, 2\pi), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, 2\pi), \\ u(0, t) = u(2\pi, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (a) $u_n(x, t) = \sin(nx) \cdot \sin(nt)$, $n \geq 1$ (b) $u_n(x, t) = \cos(nx) \cdot \sin(nt/2)$, $n \geq 0$
 *(c) $u_n(x, t) = \sin(nx/2) \cdot \sin(nt/2)$, $n \geq 1$ (d) $u_n(x, t) = \sin(nx/2) \cdot \cos(nt)$, $n \geq 1$
 (e) cap de les anteriors

Solució: En aplicar separació de variables, $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, obtenim EDOs per a $X(x)$ i $T(t)$, amb algunes condicions addicionals:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & \begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0, \\ T(0) = 0, \end{cases} \\ X(0) = X(2\pi) = 0, \end{cases}$$

En el primer cas, tenim un PVF que té els valors propis $\lambda_n = -n^2/4$, $n \geq 1$, amb les funcions pròpies $X_n(x) = \sin(nx/2)$. Amb aquests valors propis, el segon problema ens dóna $T_n(t) = \sin(nt/2)$. Multiplicant aquestes funcions, obtenim els modes normals.